из (IX.31) имеем

$$(e^{-iH_0t}\varphi)(x)-(V_t\varphi)(x)=(4\pi it)^{-n/2}e^{ix^2/4t}\cdot\int(e^{iy^2/4t}-1)e^{-ix\cdot y/2t}\varphi(y)\,dy=$$
$$=\frac{e^{ix^2/4t}}{(2it)^{n/2}}\hat{G}_t\left(\frac{x}{2t}\right),$$

где $G_t(y)=(e^{iy^2/4t}-1)\varphi(y)$. Следовательно,

$$\|e^{-iH_0t}\varphi-V_t\varphi\|_2=(2t)^{-n/2}\|\hat{G}_t(\cdot/2t)\|_2=\|\hat{G}_t(\cdot)\|_2=\|G_t\|_2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{4t}\|y^2\varphi(y)\|_2\to 0 \text{ при } t\to\infty.$$

На предпоследнем шаге мы воспользовались оценкой

$$|e^{iy^2/4t}-1|=\left|\int_0^{y^2/4t}\frac{d}{dx}(e^{ix})\,dx\right|\leqslant\frac{y^2}{4t}. \blacksquare$$

Формула (IX.33) допускает простую физическую интерпретацию. Чтобы убедиться в этом, введем массу, полагая $H_0=(-1/2m)\Delta$. Если система при $t=0$ находится в состоянии φ, то по (IX.33) асимптотическая плотность вероятности для координаты равна $(m/t)^n\cdot|\hat{\varphi}(mx/t)|^2$. Но $|\hat{\varphi}(\lambda)|^2$—начальная плотность вероятности для импульса. Значит, при больших временах вероятность обнаружить частицу в точке x в момент времени t пропорциональна вероятности того, что в начальный момент она обладала импульсом mx/t. Следовательно, при больших временах квантовая свободная частица ведет себя подобно свободной классической, начавшей движение из $x=0$ в момент $t=0$ с плотностью импульса $|\check{\varphi}(\lambda)|^2$.

IX.8. Аксиомы Гординга—Вайтмана

В этом разделе мы обсудим некоторые приложения преобразования Фурье к теории квантовых полей. Читателю не обязательно обладать предварительным опытом в квантовой теории поля. Мы начнем с краткой истории проблемы, сформулируем аксиомы Вайтмана и определим функции Вайтмана. Затем мы применим преобразование Фурье для доказательства свойств аналитичности вайтмановых функций, наброска доказательства PCT-теоремы и вывода представления Челлена—Лемана для двухточечной функции. В дополнении мы рассмотрим лоренц-инвариантные меры.

Квантовая теория поля родилась в двадцатые годы из попытки соединить квантовую механику и специальную теорию относительности в квантовом обобщении классических моделей электромагнитных явлений. С тех пор теория поля широко применялась для построения моделей многих явлений, в которых участвуют элементарные частицы. С самого начала основателям этой теории (Гейзенбергу, Паули, Дираку) было ясно, что в ней скрыто множество математических трудностей. Однако теория поля продолжала расти и к сороковым годам превратилась в мешанину «фольклорных» теорем, гипотез и сложных вычислений по теории возмущений, причем толком доказать что-либо было невозможно, потому что основной объект теории, сами поля, были определены весьма смутно. Но, несмотря на отсутствие твердого математического основания, Швингер, Фейнман, Томонага, Дайсон и другие сумели к концу сороковых годов систематизировать теорию возмущений, и это позволило проводить вычисления в электродинамике. Поразительное экспериментальное подтверждение этих вычислений позволяло допускать, что в рамках квантовой теории поля существуют разумные математические модели, по крайней мере для некоторых взаимодействий элементарных частиц.

В такой именно обстановке Гординг и Вайтман сформулировали определение «квантового поля», предложив систему математических свойств, которыми, как они показали, должна обладать любая теория квантованных полей. Эти свойства называются **аксиомами Вайтмана.** Изучение этих аксиом и их математических следствий обычно называется **аксиоматической квантовой теорией поля.** Это название отчасти сбивает с толку, потому что у многих создается ошибочное представление, что основной интерес представляют сами аксиомы, а не их математические следствия и построение конкретных примеров. По этой причине направление это иногда называют также «общей теорией квантованных полей».

Для простоты мы приведем аксиомы лишь для «теории эрмитова скалярного поля», а о других случаях упомянем в Замечаниях. Мы пользуемся системой единиц, в которой константа Планка, деленная на 2π, и скорость света равны единице. В силу краткости обсуждения каждого из свойств, сами определения довольно развернуты.

Эрмитова скалярная квантовая теория поля *есть четверка* $\langle\mathcal{H}, U, \varphi, D\rangle$, *обладающая следующими свойствами* (1—8).

Свойство 1 **(релятивистская инвариантность состояний).** *$\mathcal{H}$ есть сепарабельное гильбертово пространство, а $U(\cdot, \cdot)$—сильно непрерывное унитарное представление на $\mathcal{H}$ собственной ортохронной группы Пуанкаре.*

Собственная ортохронная группа Пуанкаре определяется следующим образом. Пусть $x=\langle x^0, x^1, x^2, x^3\rangle$ и $y=\langle y^0, y^1, y^2, y^3\rangle$— два вектора в $\mathbb{R}^4$. Лоренцево скалярное произведение векторов

x и y, по определению, равно $x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3$. Компонента x^0 называется временно́й, а $\langle x^1, x^2, x^3\rangle$ — пространственными компонентами x. Обозначим через x_μ компоненты вектора $\tilde{x} = \langle x^0, -x^1, -x^2, -x^3\rangle$; тогда лоренцево скалярное произведение x и y — не что иное, как обычное внутреннее произведение x и $\tilde{y}$. Применяя эйнштейново правило суммирования по одинаковым верхним и нижним индексам, мы будем иногда записывать сумму $\sum_{\mu=0}^{3} x^\mu y_\mu$ просто как $x^\mu y_\mu$. **Лоренцева группа** $\mathscr{L}$ есть множество линейных преобразований на $\mathbb{R}^4$, сохраняющих лоренцево скалярное произведение. **Собственная ортохронная (иначе, специальная) группа Лоренца** $\mathscr{L}_+^\uparrow$ — это подгруппа $\mathscr{L}$, состоящая из таких $\Lambda \in \mathscr{L}$, что $\det \Lambda = 1$, а матричный элемент Λ между вектором $\langle 1, 0, 0, 0\rangle$ и им же самим положителен. **Собственная ортохронная группа Пуанкаре** $\mathscr{P}_+^\uparrow$ — это множество пар $\langle a, \Lambda\rangle$, где $a \in \mathbb{R}^4$, $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$, снабженное групповой операцией

$$\langle a, \Lambda_1\rangle \langle b, \Lambda_2\rangle = \langle a + \Lambda_1 b, \Lambda_1\Lambda_2\rangle.$$

Группа $\mathscr{P}_+^\uparrow$ естественно действует на $\mathbb{R}^4$ по формуле $\langle a, \Lambda\rangle x = \Lambda x + a$ и иногда называется семейством релятивистских преобразований пространства $\mathbb{R}^4$.

Если положить $\Lambda = I$, то $U(a) = U(a, I)$ — сильно непрерывное унитарное представление $\mathbb{R}^4$. Из теоремы VIII.12 следует, что существуют четыре коммутирующих самосопряженных оператора P_0, P_1, P_2, P_3 в $\mathscr{H}$ и проекторнозначная мера E_Ω на $\mathbb{R}^4$, такая, что

$$(\varphi, U(a)\varphi) = (\varphi, \exp(ia^\mu P_\mu)\varphi) = \int_{\mathbb{R}^4} e^{ia^\mu \lambda_\mu} d(\varphi, E_\lambda \varphi). \quad \text{(IX.34)}$$

Оператор P_0 называется **гамильтонианом** (или оператором энергии), а P_j, $j = 1, 2, 3$, — **операторами импульса**.

Свойство 2 **(спектральное условие).** *Проекторнозначная мера E_Ω на $\mathbb{R}^4$, соответствующая $U(a, I) = e^{ia^\mu P_\mu}$, обладает носителем в замкнутом переднем световом конусе.*

Замкнутый передний световой конус — множество $\bar{V}_+ = \{x \mid x \cdot \tilde{x} \geqslant 0,\ x^0 \geqslant 0\}$. Его внутренность будет обозначаться через V_+. Спектральное условие эквивалентно такому условию: P_0 и $P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2$ — положительные операторы.

Свойство 3 **(существование и единственность вакуума).** *Существует единственный вектор $\psi_0 \in \mathscr{H}$, такой, что $U(a, I)\psi_0 = \psi_0$ для всех $a \in \mathbb{R}^4$. Он называется* **вакуумом**.

Из свойства 3 следует, что точка $\langle 0, 0, 0, 0\rangle$ имеет ненулевую E_Ω-меру и что $E_{\langle 0,0,0,0\rangle}$ имеет одномерную область значений. Представления $U(0, \Lambda)$ оставляют $\operatorname{Ran} E_{\langle 0,0,0,0\rangle}$ инвариантным, поэтому $U(0, \Lambda) \upharpoonright \operatorname{Ran} E_{\langle 0,0,0,0\rangle}$ — одномерное представление $\mathscr{L}_+^\uparrow$. Поскольку единственное одномерное представление $\mathscr{L}_+^\uparrow$ — тождественное, мы получаем, что $U(a, \Lambda)\psi_0 = \psi_0$ для всех $\langle a, \Lambda\rangle \in \mathscr{P}_+^\uparrow$.

Свойство 4 **(инвариантные области определения полей).** *Существуют плотное подпространство $D \subset \mathscr{H}$ и отображение φ из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ во множество (неограниченных) операторов в $\mathscr{H}$, такие, что*

(i) *для каждого $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ имеем $D \subset D(\varphi(f))$, $D \subset D(\varphi(f)^*)$ и $\varphi(f)^* \upharpoonright D = \varphi(\bar{f}) \upharpoonright D$;*

(ii) *$\psi_0 \in D$ и $\varphi(f) D \subset D$ для всех $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$.*

(iii) *При фиксированном $\psi \in D$ отображение $f \mapsto \varphi(f)\psi$ линейно.*

В ранних формулировках теории поля φ рассматривали как операторнозначную функцию, хотя создатели теории и понимали, что $\varphi(x)$ — весьма сингулярный объект. По аналогии с классическим электромагнитным полем оператор $\varphi(x)$ назывался «полем в точке x». Такая формулировка вела к различным трудностям, которые были преодолены, когда поле φ стали понимать как операторнозначное распределение, а не как операторнозначную функцию. Иными словами, φ определено на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, а не на $\mathbb{R}^4$. При этом $\varphi(f)$ следует рассматривать как пространственно-временнóе среднее гипотетического поля $\varphi(x)$ с усредняющей функцией f. Символически это выглядит так:

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x) f(x)\, dx.$$

Уже Бор и Розенфельд указали, что с физической точки зрения невозможно измерить напряженность электрического поля в точке в силу специфических квантовомеханических эффектов, связанных с принципом неопределенности. Поэтому и с математической и с *физической* точек зрения разумно рассматривать **сглаженное поле** $\varphi(f)$. Действительно, можно показать (задача 53), что в квантовой теории поля, обладающей свойствами 1—8, поле $\varphi(f)$ не может быть результатом интегрирования хорошо определенной операторнозначной функции $\varphi(x)$ с $f(x)$.

Выбор в качестве пространства основных функций $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, а не $C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ или еще какого-нибудь пространства, не обязателен. Детальное исследование этой проблемы провел Джаффе (см. Замечания). Мы ввели именно условие (ii) для того, чтобы **вакуумные средние** $(\psi_0, \varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n)\psi_0)$ имели смысл. Можно было бы подумать, что разумнее считать $\varphi(f)$ самосопряженным в существенном на D, а не просто симметрическим, но такое дополнительное требование, по-видимому, не приводит к важным следствиям.

Свойство 5 **(регулярность поля).** *Для любых ψ_1 и ψ_2 из D отображение $f \longmapsto (\psi_1, \varphi(f)\psi_2)$ есть обобщенная функция умеренного роста.*

Из свойств 4 и 5 следует более сильное утверждение: для $\psi \in D$ отображение $f \longmapsto \varphi(f)\psi$ сильно непрерывно (задача 54).

Свойство 6 **(пуанкаре-инвариантность поля).** *Для каждого $\langle a, \Lambda\rangle \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ имеем $U(a, \Lambda) D \subset D$ и для всех $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, $\psi \in D$*

$$U(a, \Lambda)\varphi(f) U(a, \Lambda)^{-1}\psi = \varphi(\langle a, \Lambda\rangle f)\psi,$$

где

$$\langle a, \Lambda\rangle f(x) = f(\Lambda^{-1}(x-a)).$$

Условие инвариантности часто формально записывают в виде

$$U(a, \Lambda)\varphi(x) U(a, \Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda x + a).$$

Свойство 7 **(локальная коммутативность или микроскопическая причинность).** *Если f и $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ имеют пространственно-подобные носители, то для всех $\psi \in D$*

$$[\varphi(f)\varphi(g) - \varphi(g)\varphi(f)]\psi = 0.$$

Говорят, что два множества S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^4$ **пространственно-подобны**, если из $x \in S_1$ и $y \in S_2$ следует, что $(x-y)\cdot\widetilde{(x-y)} < 0$. Свойство 7 — математическая формулировка квантовомеханического утверждения о том, что измерения в пространственно-подобных областях не могут интерферировать друг с другом.

Свойство 8 **(цикличность вакуума).** *Множество D_0 конечных линейных комбинаций векторов вида $\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n)\psi_0$ плотно в $\mathcal{H}$.*

Это свойство устанавливает, что гильбертово пространство $\mathcal{H}$ не слишком велико, или, иначе говоря, что теория может быть описана посредством единственного поля φ.

Это завершает определение эрмитовой скалярной квантовой теории поля. Далее есть два пути, по которым может развиваться математическое исследование. Во-первых, можно изучать следствия этих аксиом. К этому типу принадлежала основная масса работ по аксиоматической теории поля в пятидесятых и в начале шестидесятых годов. В оставшейся части этого раздела мы покажем, как для вывода некоторых следствий из этих аксиом применяется преобразование Фурье. Вторая большая задача состоит в построении моделей, удовлетворяющих всем аксиомам (или по крайней мере некоторым из них). Когда эти аксиомы формулировались, было уже известно, что они непротиворечивы, ибо теория свободного поля (см. § X.7) обладает всеми этими свойствами. Но, к сожалению, теория свободного поля описывает систему частиц, не взаимодействующих друг с другом. Оказалось, что построить примеры интересных (т. е. учитывающих взаимодействия) теорий очень трудно. Некоторые успехи в решении этой задачи были достигнуты только в последние годы (см. § X.7 и гл. XIX).

Обсуждение некоторых следствий сформулированных выше аксиом мы начнем с определения функционалов

$$\mathscr{W}_n(f_1, \ldots, f_n) = (\psi_0, \varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n)\psi_0).$$

$\{\mathscr{W}_n\}$ называются **функциями Вайтмана, или вайтмановыми обобщенными функциями, или вакуумными средними**; иногда $\mathscr{W}_n$ называют **n-точечной функцией**. В гл. XVII мы увидим, что можно восстановить всю теорию поля, если известны ее функции Вайтмана. Пусть $\psi_1 = \varphi(\overline{f}_{k-1}) \ldots \varphi(\overline{f}_1)\psi_0$ и $\psi_2 = \varphi(f_{k+1}) \ldots \varphi(f_n)\psi_0$. Тогда, согласно свойству 4, ψ_1 и ψ_2 лежат в D, а значит, в силу свойства 5, $\mathscr{W}_n(f_1, \ldots, f_n) = (\psi_1, \varphi(f_k)\psi_2)$ непрерывна по f_k при фиксированных остальных f. Итак, $\mathscr{W}_n(f_1, \ldots, f_n)$ — раздельно непрерывный мультилинейный функционал на $\overset{n}{\underset{1}{\times}} \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Следовательно, по теореме о ядре (теорема V.12) существует обобщенная функция $\tilde{\mathscr{W}}_n$ из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n})$, такая, что $\mathscr{W}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \tilde{\mathscr{W}}_n(f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n)$, если $f_i \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Мы будем обозначать $\tilde{\mathscr{W}}_n$ также через $\mathscr{W}_n$.

Из свойств 3 и 6 следует, что $\mathscr{W}_n$ обладает свойством инвариантности:

$$\mathscr{W}_n(\langle a, \Lambda\rangle f_1, \ldots, \langle a, \Lambda\rangle f_n) = \mathscr{W}_n(f_1, \ldots, f_n)$$

для всех $\langle a, \Lambda\rangle \in \mathscr{P}_+^\uparrow$. В частности,

$$\mathscr{W}_n(f_1(x_1 - a), f_2(x_2 - a), \ldots, f_n(x_n - a)) = \mathscr{W}_n(f_1, \ldots, f_n). \quad \text{(IX.35)}$$

Из (IX.35), как показывает простое построение (см. задачу 56), следует, что существует распределение $W_n \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n-4})$, для которого символически

$$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = W_n(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n).$$

Иными словами, для $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$

$$\mathscr{W}_n(f) = \int_{\mathbb{R}^4} W_n(f_{(x)})\, dx,$$

где

$$f_{(x)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = f(x, x-\xi_1, x-\xi_1-\xi_2, \ldots, x-\xi_1-\ldots-\xi_{n-1}).$$

Мы уже ввели обозначение V_+ для переднего светового конуса и $\overline{V}_+$ для замкнутого переднего светового конуса. Определим теперь

$$V_+^{(n)} = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathbb{R}^{4n} \mid x_i \in V_+ \text{ для каждого } i\}.$$

Подчеркнем, что $V_+^{(n)}$ и его замыкание $\overline{V}_+^{(n)}$ — конусы. Пусть

$$\mathcal{T}_n = \mathbb{R}^{4n} - iV_+^{(n)}.$$

Мы будем называть $\mathcal{T}_n$ **трубой будущего.**

Теперь мы готовы сформулировать и доказать важную теорему для вайтмановых обобщенных функций.

Теорема IX.32. Для каждого $n \geqslant 1$ носитель $\hat{W}_n$ лежит в $-\overline{V}_+^{(n-1)}$ и W_n есть граничное значение функции, аналитической в трубе будущего $\mathcal{T}_{n-1}$.

Доказательство. Пусть задано k, $1 \leqslant k \leqslant n$, и пусть $a \in \mathbb{R}^4$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_n(f_1(x_1) \ldots f_k(x_k) f_{k+1}(x_{k+1}-a) \ldots f_n(x_n-a)) &= \\
= (\psi_0, \varphi(f_1) \ldots \varphi(f_k) U(a) \varphi(f_{k+1}) \ldots \varphi(f_n)\psi_0) &= \\
= \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\lambda\cdot\tilde{a}} d(\psi_1, E_\lambda \psi_2) &= \\
= \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\tilde{\lambda}\cdot a} d(\psi_1, E_\lambda \psi_2) &= \\
= \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\lambda\cdot a} d(\psi_1, E_{\tilde{\lambda}} \psi_2)&,
\end{aligned}$$

где $\psi_1 = \varphi(f_k)^* \ldots \varphi(f_1)^* \psi_0$ и $\psi_2 = \varphi(f_{k+1}) \ldots \varphi(f_n)\psi_0$. Согласно свойству 2, носитель $d(\psi_1, E_\lambda\psi_2)$ лежит в $\overline{V}_+$. Поскольку отображение $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ переводит $\overline{V}_+$ в себя, то и $d(\psi_1, E_{\tilde{\lambda}}\psi_2)$ имеет носитель в $\overline{V}_+$. Положим теперь

$$g(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \prod_{j=2}^{n} f_j\left(-\sum_{i=1}^{j-1} \xi_i\right)$$

и допустим, что функция $h_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ вещественнозначна. В дальнейших выкладках аргументы $\xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_{n-1}$ функции g опускаются. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^4} h_k(a)\mathscr{W}_n(f_1(x_1)\ldots f_k(x_k-a)\ldots f_n(x_n-a))\,da= \tag{IX.36}$$

$$=\int_{\mathbb{R}^4}\int_{\mathbb{R}^4} W_n(g(\xi_1-x_1,\ \xi_k+a))\,f_1(x_1)\,h_k(a)\,dx_1\,da=$$

$$=W_n\left(\int_{\mathbb{R}^4}\int_{\mathbb{R}^4} g(\xi_1-x_1,\ \xi_k+a)\,f_1(x_1)\,h_k(a)\,dx_1\,da\right)=$$

$$=W_n(g*(f_1\tilde{h}_k))=(2\pi)^{(n-1)/2}\,\hat{W}_n(\check{g}\check{f}_1\hat{h}_k),$$

где $\tilde{h}_k(a)=h_k(-a)$. С другой стороны,

$$(\text{IX}.36)=\int_{\mathbb{R}^4} h_k(a)\int_{\mathbb{R}^4} e^{i\lambda\cdot a}\,d(\psi_1,\ E_{\tilde{\lambda}}\psi_2)\,da=$$

$$=(2\pi)^{1/2}\int_{\mathbb{R}^4}\check{h}_k(\lambda)\,d(\psi_1,\ E_{\tilde{\lambda}}\psi_2).$$

Следовательно, $\hat{W}_n(\check{g}\check{f}_1\hat{h}_k)=0$, если $(\operatorname{supp}\check{h}_k)\cap\bar{V}_+=\varnothing$. Поскольку это справедливо для каждого k и поскольку конечные линейные комбинации функций $\check{f}_1\check{g}$ плотны в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n-4})$, заключаем, что носитель $\hat{W}_n$ содержится в $-\bar{V}_+^{(n-1)}$. Утверждение теоремы следует теперь из теоремы IX.16. ∎

Поскольку база конуса $\bar{V}_+^{(n-1)}$ не является сферической (при $n>2$), нам пришлось применить обобщение теоремы IX.16, приведенное в задаче 23. Термин «граничное значение» в формулировке теоремы означает граничное значение в смысле обобщенных функций умеренного роста, как объяснено в § IX.3. Оценки теоремы IX.16 порождают соответствующие оценки, которые мы здесь не приводим, для аналитического продолжения вайтмановых распределений.

Одно из важных применений аналитических свойств состоит в демонстрации того, что функции Вайтмана обладают определенными свойствами симметрии. Приведем схему типичного рассуждения. Для упрощения обозначений мы позволим себе считать распределения Вайтмана обычными функциями $W_n(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$. Читатель легко восстановит опущенные при этом основные функции. Пределы всегда берутся в смысле $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n-4})$.

Вследствие свойства 6

$$W_n(z_1,\ldots,z_{n-1})=W_n(\Lambda z_1,\ldots,\Lambda z_{n-1}) \tag{IX.37}$$

для всех $z_j=\xi_j-i\eta_j$, $\eta_j\in V_+$ и $\Lambda\in\mathscr{L}_+^\uparrow$. Заметим, что правая часть (IX.37) имеет смысл, поскольку Λ: $V_+\to V_+$. Пусть $\mathscr{L}_+(\mathbb{C})$ обозначает множество *комплексных* 4×4-матриц Λ с детерминантом единица, удовлетворяющих условию $\Lambda z\cdot\widetilde{\Lambda z}=z\cdot\tilde{z}$. Тогда

$\mathscr{L}_+(\mathbb{C})$ — шестипараметрическое комплексное многообразие, содержащее шестипараметрическое вещественное многообразие $\mathscr{L}_+^\uparrow$. Элегантный технический результат — теорема Баргмана — Холла — Вайтмана — утверждает, что W_n можно продолжить до аналитической функции на

$$\mathscr{T}_{n-1}^e = \{\langle \Lambda z_1, \ldots, \Lambda z_{n-1}\rangle \mid \langle z_1, \ldots, z_{n-1}\rangle \in \mathscr{T}_{n-1}, \ \Lambda \in \mathscr{L}_+(\mathbb{C})\},$$

так что (IX.37) по-прежнему выполняется, но Λ теперь может пробегать все $\mathscr{L}_+(\mathbb{C})$. Множество $\mathscr{T}_{n-1}^e$ называется **расширенной трубой будущего.** Оно содержит некоторые вещественные точки, называемые **точками Йоста.** В действительности можно показать, что $\langle \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\rangle \in \mathscr{T}_{n-1}^e \cap \mathbb{R}^{4n-4}$ тогда и только тогда, когда все векторы вида $\xi = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \xi_j$, где $\lambda_j \geqslant 0$ и $\sum \lambda_j > 0$, пространственно-подобны, т. е. $\xi \cdot \tilde{\xi} < 0$. Поэтому если $\langle x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n\rangle$ — точка Йоста, то

$$(x_i - x_j) \cdot (\widetilde{x_i - x_j}) < 0$$

при любых i и j. Из свойства 7 теперь следует, что

$$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_n(x_n, \ldots, x_1),$$

или

$$W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = W_n(-\xi_{n-1}, \ldots, -\xi_1), \qquad \text{(IX.38)}$$

когда $\langle \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\rangle$ — точка Йоста. Так как $-I \in \mathscr{L}_+(\mathbb{C})$, то (IX.37) и (IX.38) вместе дают

$$W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = W_n(\xi_{n-1}, \ldots, \xi_1). \qquad \text{(IX.39)}$$

Поскольку W_n аналитична в $\mathscr{T}_{n-1}^e$ и (IX.39) выполняется на открытом подмножестве $(4n-4)$-мерного подпространства, (IX.39) выполняется во всей $\mathscr{T}_{n-1}^e$, т. е.

$$W_n(z_1, \ldots, z_{n-1}) = W_n(z_{n-1}, \ldots, z_1) \qquad \text{(IX.40)}$$

для $z = \langle z_1, \ldots, z_{n-1}\rangle \in \mathscr{T}_{n-1}^e$. Если $z_j = \xi_j - i\eta_j$, причем $\eta_j \in V_+$, то, по теореме IX.16, $W_n(z_1, \ldots, z_{n-1})$ сходится к $W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, а $W_n(z_{n-1}, \ldots, z_1)$ сходится к $W_n(\xi_{n-1}, \ldots, \xi_1)$ в смысле обобщенных функций при $\eta \downarrow 0$. Итак, (IX.39) справедливо для всех $\langle \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\rangle \in \mathbb{R}^{4n-4}$, а тогда

$$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_n(-x_n, \ldots, -x_1) \qquad \text{(IX.41)}$$

для всех $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^{4n}$. Введем теперь оператор Θ формулой

$$\Theta\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_{n+1})\psi_0 = \varphi(\bar{\tilde{f}}_1)\ldots\varphi(\bar{\tilde{f}}_{n+1})\psi_0$$

и продолжим Θ на все множество D_0 по вещественной линейности. Согласно (IX.41), оператор Θ сохраняет норму, а потому хорошо определен. Легко проверить, что $\Theta(\psi_1+\psi_2)=\Theta(\psi_1)+\Theta(\psi_2)$ и $\Theta(c\psi)=\bar{c}\Theta\psi$. Такой оператор называется **сопряженно-линейным**. Согласно свойству 8, D_0 плотно в $\mathcal{H}$, и так как $\Theta^2=I$, то Θ однозначно продолжается до антиунитарного оператора на $\mathcal{H}$, удовлетворяющего условию

$$\Theta\varphi(f)\Theta^{-1}=\varphi(\bar{\tilde{f}}) \text{ для всех } f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^4).$$

Существование такого Θ и составляет содержание знаменитой ***PCT*-теоремы** в случае эрмитовой скалярной теории поля.

Отметим, что пользоваться указанными выше аналитическими свойствами следует с некоторой осторожностью. Например, из (IX.38) и аналитичности следует, что

$$W_n(z_1, \ldots, z_{n-1})=W_n(-z_{n-1}, \ldots, -z_1) \qquad \text{(IX.42)}$$

во всей расширенной трубе будущего. Однако мы *не можем* отсюда заключить, переходя к граничным значениям, что

$$W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})=W_n(-\xi_{n-1}, \ldots, -\xi_1) \qquad \text{(IX.43)}$$

для $\langle\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\rangle\in\mathbb{R}^{4n-4}$. Функция Вайтмана $W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ есть граничное значение $W_n(z_1, \ldots, z_{n-1})$ при $z_j\to x_j$ в трубе будущего. Но если $\eta_j\in V_+$, то $-\eta_j\notin V_+$, а поэтому и $\langle -z_{n-1}, \ldots, -z_1\rangle$ не принадлежит трубе будущего. Следовательно, предел $W_n(-z_{n-1}, \ldots, -z_1)$ в смысле $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n-4})$ может не иметь ничего общего с $W_n(-\xi_{n-1}, \ldots, -\xi_1)$.

Вайтмановы аксиомы налагают весьма сильные ограничения на распределения W_n. В качестве последней иллюстрации этого факта применим методы преобразования Фурье к выводу представления Челлена—Лемана для двухточечной функции W_2. Чтобы сделать это, нам потребуется одна теорема о лоренц-инвариантных мерах. Для каждого $m\geqslant 0$ пусть $H_m=\{p\in\mathbb{R}^4 \mid p\cdot\bar{p}=m^2,\ p_0>0\}$. Множества H_m, называемые **массовыми гиперболоидами**, инвариантны относительно $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Пусть j_m—гомеоморфизм H_m на $\mathbb{R}^3$ (а в случае $m=0$ на $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$), такой, что j_m: $\langle p_0, p_1, p_2, p_3\rangle\mapsto\langle p_1, p_2, p_3\rangle=\mathbf{p}$. Определим меру Ω_m на H_m, полагая

$$\Omega_m(E)=\int\limits_{j_m(E)}\frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{m^2+|\mathbf{p}|^2}}$$

для любого измеримого множества $E\subset H_m$. Как легко видеть, мера Ω_m $\mathcal{L}_+^\uparrow$-инвариантна. В действительности Ω_m—единственная с точностью до произвольного постоянного множителя $\mathcal{L}_+^\uparrow$-инвариантная мера на H_m (см. дополнение к этому разделу). Более того, каждая полиномиально ограниченная $\mathcal{L}_+^\uparrow$-

инвариантная мера на $\bar{V}_+$ есть сумма δ-функции, умноженной на константу, и интеграла по мерам Ω_m. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема IX.33. Пусть μ — полиномиально ограниченная мера с носителем в $\bar{V}_+$. Если μ $\mathcal{L}_+^\uparrow$-инвариантна, то существуют полиномиально ограниченная мера ρ на $[0, \infty)$ и константа c, такие, что

$$\int_{\mathbb{R}^4} f\,d\mu = cf(0) + \int_0^\infty \left(\int_{H_m} f\,d\Omega_m \right) d\rho(m)$$

для всех $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$.

Доказательство. См. дополнение к этому разделу. ∎

Теорема IX.34 (представление Челлена—Лемана). Пусть W_2 — двухточечная функция некоторой полевой теории, удовлетворяющей аксиомам Вайтмана и следующему дополнительному условию: $(\psi_0, \varphi(f)\psi_0) = 0$ для всех $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Тогда существует полиномиально ограниченная положительная мера на $[0, \infty)$, такая, что для всех $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$

$$W_2(f) = \int_0^\infty \left(\int_{H_m} \hat{f}\,d\Omega_m \right) d\rho(m).$$

Символически

$$W_2(x) = \int_0^\infty \frac{1}{i} \Delta_+(x; m^2)\,d\rho(m),$$

где

$$\Delta_+(x; m^2) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-ix_0\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2} + i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k})}{\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}}\,d^3\mathbf{k}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Тогда

$$\iint \overline{f(x)}\,f(y)\,W_2(x-y)\,dx\,dy = (\psi_0, \varphi(\bar{f})\,\varphi(f)\,\psi_0) = \\ = \|\varphi(f)\psi_0\|^2 \geqslant 0.$$

Итак, W_2 — положительно определенная обобщенная функция. По теореме Бохнера—Шварца $\check{W}_2$ — полиномиально ограниченная мера, а по теореме IX.27 носитель $\check{W}_2$ содержится в $\bar{V}_+$. Поскольку $\mathcal{W}_2$ $\mathcal{L}_+^\uparrow$-инвариантна, то и W_2 инвариантна, и читатель легко проверит, что отсюда следует $\mathcal{L}_+^\uparrow$-инвариантность $\check{W}_2$. Итак, $\check{W}_2$ удовлетворяет всем условиям теоремы IX.33, а потому

$$W_2(f) = c\hat{f}(0) + \int_0^\infty \left(\int_{H_m} \hat{f}\, d\Omega_m \right) d\rho(m)$$

с некоторой полиномиально ограниченной мерой ρ на $[0, \infty)$ и константой c.

Чтобы завершить доказательство, воспользуемся тем, что, по предположению, $(\psi_0, \varphi(f)\psi_0) = 0$ для всех $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, и докажем, что $c = 0$. Пусть $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Положим $G(a) = (\varphi(g)\psi_0, U(-a, I)\varphi(g)\psi_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} G(a) &= (\psi_0, \varphi(\bar{g})\varphi(g_{-a}(x))\psi_0) = (W_2 * g_{-a})(\bar{g}) = \\ &= (W_2 * g)(\bar{g}_a) = (W_2 * g * \tilde{\bar{g}})(a). \end{aligned}$$

Следовательно, $\check{G}$ — это мера $|\check{g}(k)|^2 \check{W}_2$. Но

$$\begin{aligned} G(a) &= \int e^{-ia\cdot\lambda} d(\varphi(g)\psi_0, E_\lambda \varphi(g)\psi_0) = \\ &= \int e^{-ia\cdot\lambda} d(\varphi(g)\psi_0, E_{\tilde{\lambda}} \varphi(g)\psi_0), \end{aligned}$$

так что $\check{G}$ есть также и мера $(2\pi)^2 d(\varphi(g)\psi_0, E_{\tilde{\lambda}}\varphi(g)\psi_0)$. В силу единственности вакуума (свойство 3) масса меры $d(\varphi(g)\psi_0, E_{\tilde{\lambda}}\varphi(g)\psi_0)$ в начале координат равна $|(\psi_0, \varphi(g)\psi_0)|^2$, что равно нулю по предположению. Итак, $|\check{g}(k)|^2 \check{W}_2$ не имеет массы в начале координат. Так как это верно для всех $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, мы заключаем, что $c = 0$. ∎

Отметим, что теорему IX.32 вместе со свойством микроскопической причинности можно применить для вывода свойств аналитичности некоторых обобщенных функций, связанных с коммутаторами поля. Например, если, по определению,

$$C_2(y - x) = (\psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\psi_0) - (\psi_0, \varphi(y)\varphi(x)\psi_0),$$

то, согласно свойству 7, носитель C_2 лежит в $\bar{V}_+ \cup (-\bar{V}_+)$. Такую обобщенную функцию можно записать в виде $C_2 = R_2 + A_2$, где $\operatorname{supp} R_2 \subset \bar{V}_+$, а $\operatorname{supp} A_2 \subset -\bar{V}_+$ (см. задачу 56). Очевидно, что R_2 определено с точностью до обобщенной функции с носителем в начале координат. Поскольку $\operatorname{supp} R_2 \subset \bar{V}_+$, преобразование Фурье R_2 аналитично в трубе $\mathbb{R}^4 - i V_+$. Для R_2 это видно непосредственно из представления Челлена — Лемана. Для взаимодействующих полей общего типа хотелось бы доказать, что коммутаторы высших порядков C_n представимы в виде суммы обобщенных функций с носителями в конусах. Тогда соответствующие запаздывающие функции R_n имели бы в качестве фурьеобразов граничные значения аналитических функций. Свойства аналитичности распределений $\hat{R}_n$ прямо связаны с аналитичностью амплитуды рассеяния.

Дополнение к § IX.8. Лоренц-инвариантные меры

В этом дополнении мы докажем те свойства лоренц-инвариантных мер, которые применялись в § IX.8, в частности теорему IX.33. Сначала нам потребуются некоторые общие результаты о мерах на произведениях пространств.

Теорема IX.35. (a) Пусть X — локально компактное пространство, и пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство гомеоморфизмов X в себя. Предположим, что существует одна и только одна (с точностью до постоянного множителя) бэрова мера μ, инвариантная относительно всех T_α. Пусть Y — другое локально компактное пространство; определим $T_\alpha\times I$ так: $T_\alpha\times I$: $\langle x, y\rangle \mapsto \langle T_\alpha x, y\rangle$ для всех $\langle x, y\rangle \in X\times Y$. Тогда любая бэрова мера ρ на $X\times Y$, инвариантная относительно всех отображений $T_\alpha\times I$, имеет вид $\rho=\mu\otimes\nu$, где ν — некоторая бэрова мера на Y.

(b) Если X и Y — локально компактные пространства и $\mu_1\otimes\nu_1=\mu_2\otimes\nu_2$, где μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 — ненулевые меры, то $d\mu_1 = c\,d\mu_2$ и $d\nu_1=c^{-1}\,d\nu_2$.

Доказательство. Пусть мера ρ инвариантна относительно $T_\alpha\times I$. Выберем $f\geqslant 0$ из $\varkappa(Y)$ — множества непрерывных функций с компактным носителем. Пусть ρ_f — отображение из $\varkappa(X)$ в $\mathbb{R}$, заданное формулой ρ_f: $g\mapsto\rho(g\otimes f)$. Поскольку ρ_f — положительная линейная форма на $\varkappa(X)$, то это бэрова мера. К тому же, ρ_f инвариантна относительно отображений T_α, поскольку мера ρ инвариантна относительно $T_\alpha\times I$, а потому, согласно предположению теоремы, $\rho_f=c_f\mu$ с некоторой константой c_f. Так как, опять-таки по предположению, $\mu\neq 0$, можно найти такую положительную функцию $g\in\varkappa(X)$, что $\mu(g)>0$. Тогда $c_f = \rho(g\otimes f)/\mu(g)$ — положительная линейная форма на $\varkappa(Y)$, а значит, $c_f=\nu(f)$, где ν — некоторая мера Бэра, т. е. $\rho=\mu\otimes\nu$. Это доказывает (a).

Для доказательства (b) заметим сначала, что μ_1 и μ_2, а также ν_1 и ν_2 должны иметь одни и те же множества меры нуль. Пусть f и g — характеристические функции множеств E и F соответственно в X и Y, где $\mu_1(f)\neq 0\neq\nu_2(g)$. Тогда $\mu_2(E)/\mu_1(E) = \nu_1(F)/\nu_2(F)$, откуда немедленно следует (b). ∎

Нам потребуются некоторые сведения о мерах на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^+$.

Теорема IX.36. (a) Любая трансляционно инвариантная мера Бэра на $\mathbb{R}^n$ представляет собой произведение меры Лебега на константу.