образов граничные значения аналитических функций. Свойства аналитичности распределений $\hat{R}_n$ прямо связаны с аналитичностью амплитуды рассеяния.

Дополнение к § IX.8. Лоренц-инвариантные меры

В этом дополнении мы докажем те свойства лоренц-инвариантных мер, которые применялись в § IX.8, в частности теорему IX.33. Сначала нам потребуются некоторые общие результаты о мерах на произведениях пространств.

Теорема IX.35. (а) Пусть X — локально компактное пространство, и пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство гомеоморфизмов X в себя. Предположим, что существует одна и только одна (с точностью до постоянного множителя) бэрова мера μ, инвариантная относительно всех T_α. Пусть Y — другое локально компактное пространство; определим $T_\alpha\times I$ так: $T_\alpha\times I$: $\langle x, y\rangle \mapsto \langle T_\alpha x, y\rangle$ для всех $\langle x, y\rangle \in X\times Y$. Тогда любая бэрова мера ρ на $X\times Y$, инвариантная относительно всех отображений $T_\alpha\times I$, имеет вид $\rho=\mu\otimes\nu$, где ν — некоторая бэрова мера на Y.

(b) Если X и Y — локально компактные пространства и $\mu_1\otimes\nu_1=\mu_2\otimes\nu_2$, где μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 — ненулевые меры, то $d\mu_1 = c\,d\mu_2$ и $d\nu_1=c^{-1}\,d\nu_2$.

Доказательство. Пусть мера ρ инвариантна относительно $T_\alpha\times I$. Выберем $f\geqslant 0$ из $\varkappa(Y)$ — множества непрерывных функций с компактным носителем. Пусть ρ_f — отображение из $\varkappa(X)$ в $\mathbb{R}$, заданное формулой ρ_f: $g\mapsto\rho(g\otimes f)$. Поскольку ρ_f — положительная линейная форма на $\varkappa(X)$, то это бэрова мера. К тому же, ρ_f инвариантна относительно отображений T_α, поскольку мера ρ инвариантна относительно $T_\alpha\times I$, а потому, согласно предположению теоремы, $\rho_f=c_f\mu$ с некоторой константой c_f. Так как, опять-таки по предположению, $\mu\neq 0$, можно найти такую положительную функцию $g\in\varkappa(X)$, что $\mu(g)>0$. Тогда $c_f = \rho(g\otimes f)/\mu(g)$ — положительная линейная форма на $\varkappa(Y)$, а значит, $c_f=\nu(f)$, где ν — некоторая мера Бэра, т. е. $\rho=\mu\otimes\nu$. Это доказывает (a).

Для доказательства (b) заметим сначала, что μ_1 и μ_2, а также ν_1 и ν_2 должны иметь одни и те же множества меры нуль. Пусть f и g — характеристические функции множеств E и F соответственно в X и Y, где $\mu_1(f)\neq 0\neq\nu_2(g)$. Тогда $\mu_2(E)/\mu_1(E) = \nu_1(F)/\nu_2(F)$, откуда немедленно следует (b). ∎

Нам потребуются некоторые сведения о мерах на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^+$.

Теорема IX.36. (а) Любая трансляционно инвариантная мера Бэра на $\mathbb{R}^n$ представляет собой произведение меры Лебега на константу.

(b) Всякая мера Бэра на $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, инвариантная относительно всех преобразований T_a: $x \mapsto e^a x$ (для всех $a \in \mathbb{R}$), представляет собой произведение константы на меру dx/x.

Доказательство. Сначала докажем (a) для случая $n = 1$. Нужно только показать, что если μ трансляционно инвариантна и $\mu([0, 1]) = 1$, то μ — мера Лебега. Поскольку $\mu(\{x\})$ не зависит от x, а отрезок $[0, 1]$ содержит бесконечно много точек, то должно выполняться равенство $\mu(\{x\}) = 0$. Тогда $\mu([0, 1)) = 1$. Поскольку $[0, 1)$ — объединение n трансляций полуинтервала $[0, 1/n)$, то $\mu([0, 1/n)) = 1/n$, а отсюда легко получить, что $\mu([0, r)) = r$ для любого положительного рационального числа r. Из трансляционной инвариантности тогда вытекает, что если a и b рациональны и $a < b$, то $\mu((a, b)) = b - a$. Но поскольку μ — мера Бэра, она регулярна, откуда следует, что $\mu((a, b)) = b - a$ для всех $a < b$. Так как μ определяется значениями на конечных открытых интервалах, она должна быть мерой Лебега.

Доказательство завершается по индукции. Предположим, что единственные трансляционно инвариантные меры на $\mathbb{R}^k$ — это произведения $d^k x$ на константы, и пусть ρ — трансляционно инвариантная мера на $\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$. Поскольку ρ инвариантна относительно подгруппы трансляций вида $T \times I$, она имеет вид $d^k x \otimes d\nu$ в силу теоремы IX.35(a). Так как ρ инвариантна и относительно подгруппы вида $I \times T$, она имеет вид $d\mu \otimes dx$. Таким образом, по теореме IX.35 (b), $\rho = c\, d^k x \otimes dx = c\, d^{k+1} x$.

(b) следует из (a), поскольку отображение ln: $x \mapsto \ln x$ — гомеоморфизм $\mathbb{R}^+$ на $\mathbb{R}$, при котором T_a переходит в сдвиг на a. ∎

Теперь мы готовы изучать лоренц-инвариантные меры на $\bar{V}_+$, т. е. полиномиально ограниченные меры с носителем в $\bar{V}_+$, инвариантные относительно $\mathscr{L}_+^\uparrow$. Конус $\bar{V}_+$ можно представить как $\bar{V}_+ = \{0\} \cup \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} H_m \right)$. Далее, преобразования из $\mathscr{L}_+^\uparrow$ переводят множество $\{0\}$ и каждое из H_m в себя. Сначала рассмотрим H_m и покажем, что для него существует только одна инвариантная мера Ω_m (определенная в § 8). Затем будет доказана теорема IX.33, гласящая, что любая лоренц-инвариантная мера на $\bar{V}_+$ может быть получена «сложением» δ-функции, сосредоточенной в $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$, и этих инвариантных мер на H_m. Несмотря на многочисленные замены переменных в следующих ниже доказательствах, идея всех этих доказательств одна и та же: гомеоморфно отобразить интересующее нас пространство на произведение $X \times Y$, исследовать инвариантные меры на X и Y при помощи теоремы IX.36, а затем определить инвариантные меры на $X \times Y$ (а потому и на исходном пространстве), применяя теорему IX.35.

Лемма. Мера $\Omega_m(\cdot)$ на H_m инвариантна относительно $\mathscr{L}_+^\uparrow$.

Доказательство. Непосредственный способ убедиться в лоренц-инвариантности Ω_m — вычислить действие произвольного $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ на H_m и доказать, что якобиан преобразования обеспечивает неизменность Ω_m. Более поучительное доказательство основано на том, что мера d^4x инвариантна относительно $\mathscr{L}_+^\uparrow$, поскольку из $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ следует, что $\det \Lambda = 1$. Далее, если $f \in C_0^\infty(0, \infty)$, то, поскольку $\overline{V}_+$ есть $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантное множество, мера $f(x\cdot\tilde{x})\chi d^4x$ также $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантна; здесь χ — характеристическая функция множества $\overline{V}_+$. Отобразим теперь V_+ гомеоморфно на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ посредством h: $\langle x_0, \mathbf{x}\rangle \mapsto \langle \mathbf{x}, y\rangle$, где $y = x\cdot\tilde{x}$. Тогда $\partial y/\partial x_0 = 2x_0$, так что

$$d^4x = \frac{d^3\mathbf{x}\, dy}{2\sqrt{m^2+\mathbf{x}^2}}.$$

Значит, мера

$$\Omega^f(E) = \int\limits_{h[E]} \frac{f(y)\, d^3\mathbf{x}\, dy}{\sqrt{m^2+\mathbf{x}^2}}$$

$\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантна. Если $f_n(y)$ — последовательность функций из $C_0^\infty(0, \infty)$, сходящаяся к $\delta(y-m^2)$, где $m > 0$, то Ω^{f_n} сходится к Ω_m в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$, а потому Ω_m $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантна в том смысле, что $\Omega_m(g(x)) = \Omega_m(g(\Lambda x))$ для всех $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$. Простая выкладка показывает, что $\Omega_m(E) = \Omega_m(\Lambda E)$ для $m > 0$. Поскольку $\Omega_m \to \Omega_0$ в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$ при $m \downarrow 0$, доказан и случай $m = 0$. ∎

В соответствии со способом построения $d\Omega_m$ в предыдущем доказательстве, в физической литературе $d\Omega_m$ иногда обозначают $\theta(x^0)\,\delta(x^2-m^2)\,d^4x$ или даже $\theta(x^0)\,\delta(x^2-m^2)$.

Теорема IX.37. Ω_m — единственная $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантная мера на H_m, $m \geqslant 0$.

Доказательство. Начнем с выбора новой системы координат на $\mathbb{R}^4$, полагая $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 - x_3)$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + x_3)$ и $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2\rangle \in \mathbb{R}^2$.

В этой новой системе лоренцево внутреннее произведение равно

$$x\cdot\tilde{x} = 2z\tau - \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}.$$

На любом H_m при $m > 0$ можно использовать τ и $\mathbf{x}$ как координаты, поскольку $z = (2\tau)^{-1}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + m^2)$. Отметим, что если $x \in H_m$ и $m > 0$, то как z, так и τ лежат в $(0, \infty)$.

Пусть ρ — инвариантная мера на H_m $(m > 0)$, и пусть s — гомеоморфизм H_m на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, задаваемый формулой $x \mapsto \langle \mathbf{x}, \tau\rangle$.

Пусть L_a, где $a\in\mathbb{R}$,—линейное преобразование на $\mathbb{R}^4$: $\tau\mapsto e^a\tau$, $z\mapsto e^{-a}z$, $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}$. Поскольку L_a сохраняет форму $2z\tau-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$, отображает V_+ в себя и $\det L_a=1$, оно является преобразованием Лоренца и sL_as^{-1}: $\langle\mathbf{x},\tau\rangle\mapsto\langle\mathbf{x}, e^a\tau\rangle$. Так как $s(d\rho)$—мера на $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$, инвариантная относительно sL_as^{-1} для всех $a\in\mathbb{R}$, из теорем IX.36 (b) и IX.35 (a) находим, что $s(d\rho)=d\mu(\mathbf{x})\otimes d\tau/\tau$.

Пусть теперь $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2$ и $T_\mathbf{b}$: $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$—преобразование вида

$$T_\mathbf{b}\colon \langle\tau, z, \mathbf{x}\rangle\mapsto\langle\tau, z+\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}+\frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2\tau, \mathbf{x}+\tau\mathbf{b}\rangle.$$

Короткое вычисление показывает, что $T_\mathbf{b}\in\mathscr{L}_+^\uparrow$. Очевидно, что $sT_\mathbf{b}s^{-1}$: $\langle\mathbf{x},\tau\rangle\mapsto\langle\mathbf{x}+\tau\mathbf{b},\tau\rangle$. Пусть t: $\langle\mathbf{x},\tau\rangle\mapsto\langle\mathbf{x}/\tau,\tau\rangle$. Тогда t: $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$ и $tsT_\mathbf{b}s^{-1}t^{-1}$: $\langle\mathbf{x},\tau\rangle\mapsto\langle\mathbf{x}+\mathbf{b},\tau\rangle$. Применяя теоремы IX.36 (a) и IX.35 (a), находим, что $ts(d\rho)=d^2\mathbf{x}\otimes d\nu(\tau)$, т. е. $s(d\rho)=d^2\mathbf{x}\otimes d\nu(\tau)/\tau^2$.

Поскольку $s(d\rho)=d\mu\otimes d\tau/\tau$ и $s(d\rho)=d^2\mathbf{x}\otimes d\nu(\tau)/\tau^2$, по теореме IX.35 (b) получаем, что $s(d\rho)=cd^2\mathbf{x}\otimes d\tau/\tau$. Поскольку s устанавливает взаимно однозначное соответствие между мерами на H_m и мерами на $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$, оказывается, что существует не более одной (с точностью до постоянного множителя) меры на H_m, инвариантной относительно $\mathscr{L}_+^\uparrow$. Из леммы следует, что по крайней мере одна такая мера существует; таким образом, она существует и единственна.

Доказательство для случая $m=0$ аналогично. Нужно только заметить, что множество $\{x\mid\tau=0\}$ должно иметь ρ-меру нуль. ∎

Доказательство теоремы IX.33. Пусть μ—полиномиально ограниченная мера, инвариантная относительно $\mathscr{L}_+^\uparrow$, с носителем в $\overline{V}_+$. Пусть χ_0—характеристическая функция множества H_0, а χ—характеристическая функция множества $\bigcup\limits_{m>0} H_m$. Тогда $\chi_0\mu$ $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантна, так что $\chi_0\mu=e\Omega_0$, т. е. $\mu=\mu(\{0\})\delta_0+e\Omega_0+\chi\mu$. Пусть j—гомеоморфизм $\bigcup\limits_{m>0} H_m$, заданный как j: $\langle x_0,\mathbf{x}\rangle\mapsto\langle\mathbf{x}/x\cdot\tilde{x}, x\cdot\tilde{x}\rangle$. Для каждого $\Lambda\in\mathscr{L}_+^\uparrow$ матрица $j\Lambda j^{-1}$ действует на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+$ как произведение $\Lambda_s\times I$. Мера $j(\chi\mu)$ инвариантна относительно отображений $\Lambda_s\times I$. По теореме IX.37 существует единственная мера Ω на $\mathbb{R}^3$, инвариантная относительно всех Λ_s, и $\Omega=c_mj(\Omega_m)$ для каждого m. По теореме IX.35 (a), $h(\chi\mu)=\Omega\otimes\tilde{\rho}$ для некоторой меры Бэра $\tilde{\rho}$ на $(0,\infty)$. Иначе говоря, для $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$

$$\int\limits_{\overline{V}+} f(x)\,d\mu(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^+}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(j^{-1}(x))'d\Omega\right)d\tilde{\rho}(m)=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^+}\left(\int\limits_{H_m} f(x)\,c_m\,d\Omega_m\right)d\tilde{\rho}(m).$$

Определим теперь ρ на $[0, \infty)$ как $\rho = c_m\tilde{\rho} + e\delta_0$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^4} f(x)\,d\mu(x) = \mu(\{0\})\,f(0) + \int_{m\geqslant 0}\left(\int f(x)\,d\Omega_m\right)d\rho(m).$$

Факт полиномиальной ограниченности ρ следует из полиномиальной ограниченности μ. ∎

IX. 9. Сужение на подмногообразия

Пусть M — гиперплоскость или компактное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ размерности $n-1$ или меньше. В этом разделе рассматривается следующая проблема: какие f из $L^2(\mathbb{R}^n)$ допускают естественное сужение на M? Поскольку мера Лебега множества M в $\mathbb{R}^n$ равна нулю, не каждую f можно сузить на M. Мы надеемся, что сможем сузить хотя бы те f, в классе эквивалентности которых имеется достаточно гладкий представитель. Например, $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеет естественное сужение $T_M f$, задаваемое просто набором значений f на M. Идея нашего подхода — построить банахово пространство B, такое, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset B\subset L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\|T_M f\|_{L^2(M)}\leqslant C\|f\|_B$ для $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Если $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в B, то можно применить теорему об ограниченном линейном отображении и продолжить T_M на все B. Другой подход к проблеме сужения рассматривается в Замечаниях к § IX.10.

Что же следует выбрать в качестве такого банахова пространства B? Наш опыт подсказывает, что условия гладкости f эквивалентны условиям на скорость убывания $\hat{f}$, поэтому естественно попытаться воспользоваться пространствами Соболева W_m. Для удобства обозначений введем пространство L^2_m — **пространство L^2 с весом**. Говорят, что $f\in L^2_m(\mathbb{R}^n)$, тогда и только тогда, когда $\hat{f}\in W_m$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m\,|f(x)|^2\,dx<\infty.$$

Возникает естественный вопрос: какая проблема двойственна поставленной проблеме сужения? Точнее, заданному $f\in L^2(M)$ можно сопоставить распределение умеренного роста $T_M^* f$ на $\mathbb{R}^n$, используя правило $T_M^* f\colon\ \varphi\longmapsto\int_M f(x)\,\varphi(x)\,d\omega$, где ω — естественная мера (см. ниже) на M. Каковы свойства роста обобщенной функции $\mathcal{F}_M f\equiv\widehat{T_M^* f}$? Начнём с решения этих двух проблем для гиперплоскостей.

Теорема IX.38. Пусть $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, и предположим, что M — плоскость в $\mathbb{R}^n$ коразмерности k, $1\leqslant k\leqslant n-1$.