Определим теперь ρ на $[0, \infty)$ как $\rho = c_m\tilde{\rho} + e\delta_0$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^4} f(x)\,d\mu(x) = \mu(\{0\})\,f(0) + \int_{m \geqslant 0} \left(\int f(x)\,d\Omega_m\right) d\rho(m).$$

Факт полиномиальной ограниченности ρ следует из полиномиальной ограниченности μ. ∎

IX. 9. Сужение на подмногообразия

Пусть M — гиперплоскость или компактное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ размерности $n-1$ или меньше. В этом разделе рассматривается следующая проблема: какие f из $L^2(\mathbb{R}^n)$ допускают естественное сужение на M? Поскольку мера Лебега множества M в $\mathbb{R}^n$ равна нулю, не каждую f можно сузить на M. Мы надеемся, что сможем сузить хотя бы те f, в классе эквивалентности которых имеется достаточно гладкий представитель. Например, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ имеет естественное сужение $T_M f$, задаваемое просто набором значений f на M. Идея нашего подхода — построить банахово пространство B, такое, что $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset B \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\|T_M f\|_{L^2(M)} \leqslant C\|f\|_B$ для $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Если $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в B, то можно применить теорему об ограниченном линейном отображении и продолжить T_M на все B. Другой подход к проблеме сужения рассматривается в Замечаниях к § IX.10.

Что же следует выбрать в качестве такого банахова пространства B? Наш опыт подсказывает, что условия гладкости f эквивалентны условиям на скорость убывания $\hat{f}$, поэтому естественно попытаться воспользоваться пространствами Соболева W_m. Для удобства обозначений введем пространство L^2_m — **пространство** L^2 **с весом**. Говорят, что $f \in L^2_m(\mathbb{R}^n)$, тогда и только тогда, когда $\hat{f} \in W_m$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m\,|f(x)|^2\,dx < \infty.$$

Возникает естественный вопрос: какая проблема двойственна поставленной проблеме сужения? Точнее, заданному $f \in L^2(M)$ можно сопоставить распределение умеренного роста $T^*_M f$ на $\mathbb{R}^n$, используя правило $T^*_M f\colon\ \varphi \longmapsto \int_M f(x)\,\varphi(x)\,d\omega$, где ω — естественная мера (см. ниже) на M. Каковы свойства роста обобщенной функции $\mathscr{F}_M f \equiv \widehat{T^*_M f}$? Начнём с решения этих двух проблем для гиперплоскостей.

Теорема IX.38. Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, и предположим, что M — плоскость в $\mathbb{R}^n$ коразмерности k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

(a) Пусть $T_M f$ — сужение f на M. Тогда существует такая константа C (не зависящая от f), что $\|T_M f\|_{L^2(M)} \leqslant C\|f\|_{W_m}$ для всех $m > k - 1/2$. Таким образом, T_M однозначно продолжается до ограниченного отображения W_m в $L^2(M)$.

(b) Пусть $d_M x$ — мера Лебега на M (определенная, например, с помощью переноса M в начало координат и выбора ортонормированного базиса), и пусть $f \in L^2(M, d_M x)$. Положим, по определению,

$$(\mathcal{F}_M f)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_M e^{-ix\cdot\lambda} f(x)\, d_M x. \qquad \text{(IX.44)}$$

Тогда $\mathcal{F}_M f$ — фурье-образ f, рассматриваемой как обобщенная функция умеренного роста, и $\mathcal{F}_M f \in L^2_m(\mathbb{R}^n)$ для всех $m < -k + 1/2$.

Доказательство. Приведем доказательство для случая $n = 2$, $k = 1$. Доказательство общего случая основано на той же идее, и мы его оставим в качестве упражнения (задача 57). Поскольку как условия, так и заключения теоремы не зависят от трансляций и поворотов M, можно допустить, что $M = \{\langle x_1, 0\rangle \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.

Чтобы доказать (a), выберем $m > 1/2$. Тогда

$$|f(x_1, 0)| \leqslant \int \left| \int \frac{e^{ix_1\lambda_1}}{2\pi} \hat{f}(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 \right| d\lambda_2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int \frac{d\lambda_2}{(1+\lambda_2^2)^m} \right)^{1/2} \left(\int (1 + |\lambda_2|^2)^m \left| \int e^{ix_1\lambda_1} \hat{f}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{d\lambda_1}{2\pi} \right|^2 d\lambda_2 \right)^{1/2},$$

откуда, по теореме Планшереля для одной переменной,

$$\int |f(x_1, 0)|^2 dx_1 \leqslant C \int \left(\int (1 + |\lambda_2|^2)^m \left| \int e^{ix_1\lambda_1} \hat{f}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{d\lambda_1}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 d\lambda_2 \right) dx_1 =$$
$$= C \int (1 + |\lambda_2|^2)^m |\hat{f}(\lambda_1, \lambda_2)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \leqslant$$
$$\leqslant C \int (1 + |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2)^m |\hat{f}(\lambda_1, \lambda_2)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 =$$
$$= C\|f\|_{W_m}.$$

Итак, отображение сужения $T_M f = f(\cdot, 0)$ продолжается до ограниченного отображения из W_m в $L^2(M)$.

Теперь предположим, что $g \in L^2(M, d_M x) = L^2(\mathbb{R})$. Пусть χ_n — характеристическая функция интервала $(-n, n)$. Тогда $\chi_n(x_1) g(x_1) \delta(x_2)$ — распределение на $\mathbb{R}^2$ с компактным носителем, так что по теореме IX.5

$$\widehat{\chi_n g \delta}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\lambda_1 x_1} \chi_n(x_1) g(x_1)\, dx_1.$$

Если $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$, то

$$\iint \left(\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\lambda_1 x_1}\chi_n(x_1)\,g(x_1)\,dx_1\right)\varphi(\lambda_1,\lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2 \to$$
$$\to \iint \left(\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\lambda_1 x_1} g(x_1)\,dx_1\right)\varphi(\lambda_1,\lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2,$$

так что, поскольку $\chi_n g \to g$ слабо и преобразование Фурье слабо непрерывно, $(2\pi)^{-1}\int e^{-i\lambda_1 x_1}\cdot g(x_1)\,dx_1$ представляет собой фурье-образ $g(x_1)\,\delta(x_2)$ как распределения на $\mathbb{R}^2$. Для завершения доказательства положим $m < -1/2$. Тогда

$$\iint (1+|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2)^m\,|(\mathscr{F}_{\mathbb{R}}g)(\lambda_1,\lambda_2)|^2\,d\lambda_1 d\lambda_2 \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi)^{-1}\iint (1+|\lambda_2|^2)^m\,|\hat{g}(\lambda_1)|^2\,d\lambda_1 d\lambda_2 =$$
$$= (2\pi)^{-1}\left(\int (1+|\lambda_2|^2)^m\,d\lambda_2\right)\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

так что $\mathscr{F}_{\mathbb{R}}g \in L^2_m(\mathbb{R}^2)$. ∎

Обратимся теперь к случаю, когда M — компактное подмногообразие.

Определение. **Гиперповерхностью** M в $\mathbb{R}^n$ называется множество точек со следующими свойствами: существует вещественнозначная C^∞-функция F на $\mathbb{R}^n$, такая, что $M=\{x \mid F(x)=0\}$, причем $\nabla F = \langle \partial F/\partial x_1, \ldots, \partial F/\partial x_n\rangle \neq 0$ при каждом $x \in M$. Более общая формулировка: **регулярно вложенное подмногообразие коразмерности** k есть множество точек, где k вещественнозначных C^∞-функций обращаются в нуль и, кроме того, якобиан $\{\partial F_i/\partial x_j\}_{1\leqslant i\leqslant k,\,1\leqslant j\leqslant n}$ имеет ранг k в каждой точке в M.

Для упрощения обозначений мы обсудим лишь случай коразмерности 1. Если задана F, то гиперповерхность (более общо, регулярно вложенное подмногообразие) оказывается снабженной естественной мерой. Опишем ее в окрестности $x \in M$. Так как $\nabla F(x) \neq 0$, то $\partial F/\partial x_l \neq 0$ для некоторого l. По теореме о неявной функции можно найти окрестность N точки x и гладкую функцию h_l на $\mathbb{R}^{n-1}$, такие, что $x_l = h_l(x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_n)$ для всех $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in N \cap M$, где $\langle x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_n\rangle$ означает, что l-я координата опущена. Для каждого $S \subset (N \cap M)$ положим

$$\omega_N(S) = \int\limits_{h_l^{-1}(S)} \frac{dx_1 \ldots \widehat{dx_l} \ldots dx_n}{|\partial F/\partial x_l|}.$$

Тогда, применяя правило дифференцирования сложной функции и учитывая якобиан замены переменных, мы видим, что мера

ω_N не зависит от того, какое выбрано l, лишь бы выполнялось условие $\partial F/\partial x_l \neq 0$. Объединяя меры ω_N, можно получить естественную меру на всем M. Читатель может проверить, что естественная мера на S^{n-1} (т. е. поверхности единичного шара в $\mathbb{R}^n$) совпадает с обычной мерой на сфере, если

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1\right).$$

Отметим, что построенная нами мера зависит от F. Но если M компактно, то любые две такие меры абсолютно непрерывны по отношению друг к другу, а их производные Радона—Никодима ограничены положительными константами как сверху, так и снизу. Таким образом, соответствующие пространства L^2 на M совпадают в том смысле, что нормы в них эквивалентны. Предостережем читателя: на M имеется естественная мера, которую можно построить геометрически, но которая может отличаться от построенных нами (см. Замечания). Если M компактно, то пространство L^2, соответствующее этой геометрической мере, то же, что для мер, построенных по F.

Теорема IX.39. Пусть M — регулярно вложенное компактное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ коразмерности k, заданное k функциями $F_1, \ldots, F_k$ из C^∞. Обозначим через ω естественную индуцированную меру на M. Предположим, что $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(a) Пусть $T_M f$ — сужение f на M. Тогда для всех $m > k - 1/2$ существует такая константа C (не зависящая от f), что $\|T_M f\|_{L^2(M, d\omega)} \leqslant C \|f\|_{W_m}$, и потому T_M однозначно продолжается до ограниченного отображения из W_m в $L^2(M, d\omega)$.

(b) Пусть $f \in L^2(M, d\omega)$; положим

$$(\mathcal{F}_M f)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_M e^{-ix\cdot\lambda} f(x)\, d\omega. \qquad \text{(IX.45)}$$

Тогда $\mathcal{F}_M f$ — фурье-образ обобщенной функции умеренного роста на $\mathbb{R}^n$, задаваемой функцией f, причем $\mathcal{F}_M f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{F}_M f \in L^2_m(\mathbb{R}^n)$ для всех $m < -k + 1/2$.

Доказательство. Как и ранее, приведем доказательство лишь для случая коразмерности 1. Доказательство состоит в основном из тех же вычислений, что и в теореме IX.38, за исключением того, что многообразие следует разбить на конечное число кусков, каждый из которых затем спрямляется, так что можно пользоваться теоремой Планшереля. Таким способом будет доказано (b). А тогда, пользуясь двойственностью, можно избежать вычислений в (a).

Пусть $f \in L^2(M, d\omega)$. Тогда функции f можно поставить в соответствие обобщенную функцию с компактным носителем, задав ее как функционал

$$\varphi \longmapsto \int_M f(x)\,\varphi(x)\,d\omega.$$

Поскольку эта обобщенная функция имеет компактный носитель, из теоремы IX.5 следует, что формула (IX.45) дает ее преобразование Фурье. При этом $\mathcal{F}_M f$ лежит в C^∞ по теореме Пэли—Винера для распределений.

На основе теоремы о неявной функции, в силу компактности многообразия M, можно найти его разложение на непересекающиеся измеримые множества $S_1, \ldots, S_N$:

$$S_j = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid x_{l(j)} = \\ = h_j(x_1, \ldots, \hat{x}_{l(j)}, \ldots, x_n), \langle x_1, \ldots, \hat{x}_{l(j)}, \ldots, x_n\rangle \in V_j\},$$

где V_j—измеримое подмножество $\mathbb{R}^{n-1}$, $c_1 < (\partial F/\partial x_{l(j)})(y) < c_2$ для всех $y \in S_j$ и $c_1 > 0$, $c_2 < \infty$. Положим, по определению,

$$G_j(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} \int_{S_j} e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,d\omega.$$

Для простоты обозначений допустим, что $l(j) = n$. Тогда

$$G_j(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} \int_{V_j} \exp\left(-i\lambda_n h_j(x_1, \ldots, x_{n-1}) - i\sum_{1}^{n-1} \lambda_i x_j\right) \times \\ \times \left(\frac{f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_j(x_1, \ldots, x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_j(x_1, \ldots, x_{n-1}))}\right) dx_1 \ldots dx_{n-1},$$

и то же вычисление, что и в доказательстве теоремы IX.38 (b), позволяет при $m < -1/2$ воспользоваться для оценки интеграла по λ_n множителем $(1+\lambda^2)^m$, а затем применить теорему Планшереля и получить

$$\|G_j\|^2_{L^2_m(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \int_{V_j} \frac{|f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_j(x_1, \ldots, x_{n-1}))|^2}{\left|\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_j(x_1, \ldots, x_{n-1}))\right|^2} dx_1 \ldots dx_{n-1} \leqslant \\ \leqslant \frac{C}{c_1} \|f\|^2_{L^2(M \cap S_j, d\omega)}.$$

Суммируя от 1 до N, находим, что существует константа $\tilde{C}$, для которой $\|\mathcal{F}_M f\|_{L^2_m(\mathbb{R}^n)} \leqslant \tilde{C} \|f\|_{L^2(M, d\omega)}$ при всех f. Это доказывает (b).

Мы видим, что отображение $\mathscr{F}_M$: $L^2(M, d\omega) \to L^2_{-m}(\mathbb{R}^n)$ ограничено при $m > 1/2$. Можно отождествить $L^2_m(\mathbb{R}^n)$ с сопряженным к $L^2_{-m}(\mathbb{R}^n)$, сопоставляя каждому $f \in L^2_m(\mathbb{R}^n)$ функционал

$$g \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

Следовательно, $\mathscr{F}^*_M$ — ограниченное отображение $L^2_m(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(M, d\omega)$. Поэтому каждой функции $f \in W_m$ можно однозначно сопоставить функцию $T_M f = \mathscr{F}^*_M(\hat{f})$ на $L^2(M, d\omega)$, причем так, что если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то это отображение — не что иное, как сужение f на M. Кроме того, $\|T_M f\|_{L^2(M, d\omega)} \leqslant \tilde{C}\|f\|_{W_m}$. ∎

Часто важно знать, как изменяются отображения сужения при изменении подмногообразия M. Рассмотрим случай, когда $M = S^{n-1}$, и пусть $S^{n-1}_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i^2 - \lambda = 0 \right\}$. Из теоремы IX.39 следует, что отображение сужения T_λ есть ограниченное отображение из $W_m(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(S^{n-1}_\lambda, d\omega)$ для каждого λ, если $m > 1/2$. Положим $(U_\lambda f)(x) = f(\lambda x)$; тогда U_λ: $L^2(S^{n-1}_\lambda, d\omega) \to L^2(S^{n-1}, d\omega)$. Мы хотели бы выяснить свойства непрерывности семейства отображений $U_\lambda T_\lambda$: $W_m(\mathbb{R}^n) \to L^2(S^{n-1}, d\omega)$.

Определение. Функция g из метрического пространства $\langle X, \rho \rangle$ в банахово пространство $\langle B, \|\cdot\| \rangle$ называется **непрерывной по Гёльдеру порядка** α, $\alpha \in (0, 1]$, если для каждого $x \in X$ существует такое $\delta > 0$, что $\|g(x) - g(y)\| \leqslant C\rho(x, y)^\alpha$ для всех y, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$.

Теорема IX.40. Пусть $R_\lambda = U_\lambda T_\lambda$ — семейство отображений сужения, определенных выше при $m > 1/2$. Тогда для каждого $f \in W_m(\mathbb{R}^n)$ функция $R_\lambda f$ непрерывна по Гёльдеру порядка α как $L^2(S^{n-1}, d\omega)$-значная функция λ для каждого α, где $0 < \alpha < m - 1/2$.

Доказательство. Приведем только схему доказательства, оставляя детали читателю (задача 58). Пусть $f \in L^2(S^{n-1}, d\omega)$; определим «растянутое» преобразование Фурье формулой

$$(\mathscr{F}^{(\lambda)} f)(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{S^{n-1}} e^{-ik\cdot\lambda x} f(x)\, d\omega.$$

Заметим, что $|e^{-ik\cdot\lambda x} - e^{-ik\cdot\lambda' x}| \leqslant C|\lambda - \lambda'|^\alpha |k|^\alpha$ для любого $\alpha \leqslant 1$. На основе этого доказывается, что

$$\|\mathscr{F}^{(\lambda)} f - \mathscr{F}^{(\lambda')} f\|_{L^2_{-m}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C|\lambda - \lambda'|^\alpha \|f\|_{L^2(S^{n-1}, d\omega)},$$

если $\alpha < m - 1/2$. Поскольку $R_\lambda f = (\mathscr{F}^{(\lambda)})^* \hat{f}$ (в смысле сопряженности пространств, описанной в доказательстве теоремы IX.39), находим, что

$$\| R_\lambda f - R_{\lambda'} f \| \leqslant C_\alpha |\lambda - \lambda'|^\alpha \| f \|_{W_m}. \quad \blacksquare$$

Отметим, что можно доказать следующий более сильный результат. Пусть $n+1/2 < m \leqslant n+3/2$. Тогда функция $R_\lambda f$, рассматриваемая как отображение из $W_m(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(S^{n-1}, d\omega)$, непрерывно дифференцируема n раз и ее n-я производная непрерывна по Гёльдеру порядка α для всех $0 < \alpha < m-n-1/2$.

Последняя наша задача в этом разделе — исследование отображения

$$f \mapsto \widecheck{((k^2-\lambda)^{-1}\hat{f})}$$

для положительных λ. Это отображение интересно нам потому, что оно представляет собой неограниченный оператор $(-\Delta-\lambda)^{-1}$ для $\lambda > 0$. Изучение оператора $(-\Delta-\lambda)^{-1}$ будет продолжено в § XIII.7, где рассматриваются спектральные свойства некоторых квантовомеханических гамильтонианов. Идея следующей теоремы такова: функция $(k^2-\lambda)^{-1}$ сингулярна лишь на $S^{n-1}_{\lambda^{1/2}}$, т. е. на сфере радиуса $\lambda^{1/2}$, так что если сужение $\hat{f}$ на $S^{n-1}_{\lambda^{1/2}}$ равно нулю, то можно ожидать, что отображение $f \mapsto \widecheck{(k^2-\lambda)^{-1}\hat{f}}$ не так уж и сингулярно. Для удобства обозначим норму на $L^2_\alpha(\mathbb{R}^n)$ через $\|\cdot\|_\alpha$.

Теорема IX.41. Пусть $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^n)$ для некоторого $\alpha > 1/2$, и предположим, что сужение функции $\hat{f}$ (задаваемое теоремой IX.39) на сферу радиуса $\lambda^{1/2}$ $(\lambda > 0)$ — нулевая функция. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$

$$B_\lambda f \equiv \widecheck{(k^2-\lambda)^{-1}\hat{f}} \in L^2_{\alpha-1-2\varepsilon}.$$

Более того, для любых $\varepsilon > 0$, $\alpha > 1/2$ и $\lambda > 0$ существует такая постоянная C, что

$$\| B_\lambda f \|_{\alpha-1-2\varepsilon} \leqslant C \| f \|_\alpha$$

для всех $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^n)$, для которых $\hat{f}$ обращается в нуль на $S^{n-1}_{\lambda^{1/2}}$. При этом C остается ограниченной, когда λ пробегает произвольное компактное подмножество в $(0, \infty)$.

Доказательство теоремы IX.41 мы разобьем на ряд лемм. Первая — прямое следствие того факта, что L^2_α — множество фурье-образов элементов пространства Соболева W_α, а также доказательства предложения 2 из § IX.6.

Лемма 1. Пусть F — некоторая C^∞-функция, такая, что все ее производные ограничены. Тогда отображение $f \mapsto (F\hat{f})\check{}$ ограничено на каждом L^2_α.

Наш метод доказательства теоремы IX.41 таков: сначала мы докажем ее для случая $n=1$, а затем, применяя этот частный случай в процедуре «раскроя и склеивания», получим доказательство общего случая.

Лемма 2. Пусть $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R})$, причем $\alpha > 1/2$ (так что $f \in L^1(\mathbb{R})$). Предположим, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$. Тогда

(a) Существует однопараметрическое семейство обобщенных функций умеренного роста, удовлетворяющих условию $k\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$. Каждая из них — непрерывная функция, и лишь одна из них такова, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.

(b) Для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция g удовлетворяет оценке

$$|g(x)| \leqslant C\|f\|_\alpha (1+|x|^2)^{-1/2(\alpha-1/2-\varepsilon)}, \tag{IX.46}$$

где C зависит только от α и ε.

Доказательство. Пусть $g(x)$ задана соотношением

$$g(x) = i\int\limits_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = -i\int\limits_{x}^{\infty} f(y)\,dy. \tag{IX.47}$$

Предположим, что $x < 0$, и выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $\alpha > 1/2+\varepsilon$. Тогда

$$|g(x)|^2 \leqslant \left| \int\limits_{-\infty}^{x} |f(y)|(1+|y|^2)^{\alpha/2}(1+|y|^2)^{-1/4-1/2\varepsilon} \times \right.$$
$$\left. \times (1+|x|^2)^{-1/2(\alpha-1/2-\varepsilon)}\,dy \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (1+|x|^2)^{-(\alpha-1/2-\varepsilon)}\|f\|^2_\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|y|^2)^{-1/2-\varepsilon}\,dy.$$

Для $x \geqslant 0$ применяется аналогичное построение, опирающееся на второе равенство в (IX.47). Так как $f \in L^1(\mathbb{R})$, то g абсолютно непрерывна и $g'(x)=if(x)$, а потому $k\hat{g}(k)=\hat{f}(k)$. В силу заданных условием свойств f, имеем $g(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$. Если g_β—другое распределение умеренного роста, удовлетворяющее равенству $k\hat{g}_\beta=\hat{f}$, то $k(\hat{g}-\hat{g}_\beta)=0$, так что носитель $\hat{g}-\hat{g}_\beta$ сосредоточен в начале координат. Отсюда следует, что $\hat{g}_\beta-\hat{g}$ — конечная линейная комбинация дельта-функции и ее производных. Поскольку $k(\hat{g}_\beta-\hat{g})=0$, коэффициенты членов с производными обращаются в нуль, так что $\hat{g}_\beta=\hat{g}+\beta\delta_0$. Отсюда следует, что $g_\beta=g+\beta(2\pi)^{-1/2}$. Это показывает, что $g_\beta\to 0$ на $\pm\infty$ тогда и только тогда, когда $\beta=0$. ∎

Теперь можно доказать одномерный случай теоремы IX.41.

Лемма 3. Пусть $\lambda>0$ и $\alpha>1/2$. Предположим, что $h\in L^2_\alpha(\mathbb{R})$ и $\hat{h}(\pm\lambda^{1/2})=0$. Тогда существует непрерывная функция g, стремящаяся к нулю на бесконечности, такая, что $(k^2-\lambda)\hat{g}=\hat{h}$. Кроме того, g удовлетворяет неравенству

$$|g(x)|\leqslant D_\lambda\|h\|_\alpha(1+|x|^2)^{-1/2(\alpha-1/2-\varepsilon)}, \tag{IX.48}$$

где D_λ — константа, зависящая только от λ, α и ε. При фиксированных α и ε константа D_λ ограничена, когда λ меняется в любом компактном подмножестве в $(0, \infty)$.

Доказательство. Простые соображения, основанные на формуле $\widehat{e^{i\gamma x}f(x)}(k)=\hat{f}(k-\gamma)$, в силу леммы 2 показывают, что если $\hat{h}(\gamma)=0$, то существует функция g, удовлетворяющая (IX.46), причем $(k-\gamma)\hat{g}=\hat{h}$. Обозначим такую g через $\widecheck{(k-\gamma)^{-1}\hat{h}}$. Выберем такую C^∞-функцию χ, что $\chi(k)=0$, если $k<-{}^1/_2\lambda^{1/2}$, и $\chi(k)=1$, если $k>{}^1/_2\lambda^{1/2}$, и положим

$$F_1(k)=(k+\lambda^{1/2})^{-1}\chi(k),\qquad F_2(k)=(k-\lambda^{1/2})^{-1}(1-\chi(k)),$$

так что $(k-\lambda^{1/2})^{-1}F_1+(k+\lambda^{1/2})^{-1}F_2=(k^2-\lambda)^{-1}$. Пусть $f_i=\widecheck{F_i\hat{h}}$. По лемме 1, $\|f_i\|_\alpha\leqslant C_{i,\alpha}\|h\|_\alpha$. Пусть $\hat{g}=(k-\lambda^{1/2})^{-1}\hat{f}_1+(k+\lambda^{1/2})^{-1}\hat{f}_2$. Тогда $(k^2-\lambda)\hat{g}=\hat{h}$ и

$$|g(x)|\leqslant C[\|f_1\|_\alpha+\|f_2\|_\alpha](1+|x|^2)^{-1/2(\alpha-1/2-\varepsilon)}\leqslant$$
$$\leqslant D\|h\|_\alpha(1+|x|^2)^{-1/2(\alpha-1/2-\varepsilon)}.$$

То, что D_λ ограничена, когда λ пробегает компактное подмножество в $(0, \infty)$, прямо следует из приведенного доказательства. ∎

Заметим, что в силу (IX.48) справедливо неравенство

$$\int |g(x)|^2 (1+|x|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon} dx \leqslant D^2 \|h\|_\alpha^2 \int (1+|x|^2)^{-1/2-\varepsilon} dx,$$

так что лемма 3 в действительности представляет собой усиленный вариант теоремы IX.41 в случае $n=1$.

Лемма 4. Пусть $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^n)$, причем $\alpha > 1/2$, и предположим, что $\hat{f}$ обращается в нуль на сфере радиуса λ. Тогда для почти всех $p \in \mathbb{R}^{n-1}$ функция

$$h_p(y) \equiv (2\pi)^{-(n-1)/2} \int e^{-i(p_1x_1+\ldots+p_{n-1}x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)\, d^{n-1}x$$

лежит в $L_\alpha^2(\mathbb{R})$ и при почти всех $p \in \mathbb{R}^{n-1}$, таких, что $|p| \leqslant \lambda$, $\hat{h}_p(\pm\sqrt{\lambda^2-|p|^2})=0$.

Доказательство. Если бы f лежала в $L^1(\mathbb{R}^n)$, то заключение леммы было бы тривиальным. Но нам придется проделать несколько более сложную работу. Поскольку $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)\left(1+\sum_1^{n-1} x_i^2+y^2\right)^{\alpha/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то, как известно, и $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)(1+y^2)^{\alpha/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Значит, по теореме Планшереля,

$$\int |h_p(y)|^2 (1+|y|^2)^\alpha dy\, d^{n-1}p < \infty.$$

Отсюда следует, что $h_p(\cdot) \in L_\alpha^2(\mathbb{R})$ при почти всех p. Выберем теперь $f_m \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы $\|f-f_m\|_\alpha \to 0$. По теореме IX.39, $\hat{f}_m \to \hat{f}$ в $L^2(S_\lambda^{n-1})$. Следовательно, переходя, если необходимо, к подпоследовательностям, можно считать, что

(1) $\hat{f}_m(p, \pm\sqrt{\lambda-|p|^2}) \to 0$ при почти всех $p \in \mathbb{R}^{n-1}$ с $|p|^2 < \lambda$;
(2) $\|f_m - f\|_\alpha \leqslant 4^{-m}$.

Положим, по определению,

$$h_p^{(m)}(y) = (2\pi)^{-(n-1)/2} \int \exp\left(-i \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right) f_m(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)\, d^{n-1}x.$$

Мы утверждаем, что $\|h_p^{(m)}-h_p\|_{L_\alpha^2(\mathbb{R})} \to 0$ п. в. по p. Действительно, на основании доводов, приведенных в начале доказательства, $\int \|h_p^{(m)}-h_p\|_\alpha^2 d^{n-1}p \leqslant 4^{-2m}$. Следовательно, для каждого m множество $U_m = \{p \mid \|h_p^{(m)}-h_p\|_\alpha < 2^{-m}\}$ имеет дополнение, мера которого меньше 4^{-m}. Пусть $T_m = \bigcap_{n \geqslant m} U_n$, и пусть μ — мера Лебега. Тогда $\mu(\mathbb{R}^{n-1} \setminus T_m) \leqslant 4^{-m+1}$, так что $\mu(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \bigcup_m T_m) = 0$. Но на каждом T_m имеем $h_p^{(m)} \to h_p$ в $L_\alpha^2(\mathbb{R})$, так что $\|h_p^{(m)}-h_p\|_\alpha \to 0$

для почти всех p. Следовательно, по теореме IX.39,

$$\hat{h}_p^{(m)}(\pm\sqrt{\lambda^2-|p|^2}) \to \hat{h}_p(\pm\sqrt{\lambda^2-|p|^2}) = \hat{f}(p, \sqrt{\lambda^2-|p|^2})$$

при почти всех p с $|p|^2<\lambda$. Так как $\hat{h}_p^{(m)}(\pm\sqrt{\lambda-|p|^2}) = \hat{f}_m(p, \pm\sqrt{\lambda-|p|^2})$, то из (1) вытекает, что $\hat{h}_p(\pm\sqrt{\lambda-|p|^2})=0$. ∎

Лемма 5. Фиксируем $\lambda>0$, и пусть

$$V=\left\{k \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n-1}|k_i|^2+|k_n-\lambda^{1/2}|^2<\frac{1}{4}\lambda\right\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Пусть $f\in L^2_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\alpha>1/2$, и предположим, что $\hat{f}$ имеет носитель в V и что $\hat{f}\restriction S_\lambda^{n-1}=0$. Тогда

$$B_\lambda f=(k^2-\lambda)^{-1}\hat{f}\in L^2_{\alpha-1-2\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad \|B_\lambda f\|_{\alpha-1-2\varepsilon}\leqslant C'\|f\|_\alpha.$$

Доказательство. Определим $h_p(y)$, как в лемме 4, и заметим, что в силу доводов в начале доказательства леммы 4

$$\int\|h_p\|^2_\alpha\, d^{n-1}p\leqslant\|f\|^2_\alpha. \tag{IX.49}$$

По предположению, $\hat{h}_p=0$, если $|p|>{}^1/_2\lambda^{1/2}$. Для каждого p с $|p|<{}^1/_2\lambda^{1/2}$ введем $\hat{g}_p(k)=(k^2-(\lambda-|p|^2))^{-1}\hat{h}_p(k)$. Тогда, по лемме 3,

$$|g_p(y)|^2\leqslant D^2\|h_p\|^2_\alpha(1+|y|^2)^{-(\alpha-1/2-\varepsilon)}.$$

Поскольку

$$g_p(y)=(2\pi)^{-(n-1)/2}\int\exp\left(-i\sum_{i=1}^{n-1}p_ix_i\right)(B_\lambda f)(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)\, d^{n-1}x,$$

теорема Планшереля и (IX.49) дают

$$\int|(B_\lambda f)(x_1, \ldots, x_n)|^2\, d^{n-1}x\leqslant D^2\|f\|^2_\alpha(1+|x_n|^2)^{-(\alpha-1/2-\varepsilon)}.$$

Теперь надо рассмотреть два случая. Если $\alpha-1-2\varepsilon\leqslant 0$, то

$$(1+|x|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon}\leqslant(1+|x_n|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon},$$

так что

$$\|B_\alpha f\|^2_{\alpha-1-2\varepsilon}\leqslant\int|(B_\lambda f)(x_1, \ldots, x_n)|^2(1+|x_n|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon}\, d^nx\leqslant$$
$$\leqslant D^2\|f\|^2_\alpha\int(1+|x_n|^2)^{-1/2-\varepsilon}\, dx_n.$$

С другой стороны, если $\alpha-1-2\varepsilon>0$, нужна более тонкая аргументация. Пусть $e_n=(0, 0, \ldots, 1)$. Если e — единичный вектор, достаточно близкий к e_n, то, подобно тому, как это было сделано выше, можно показать, что

$$\int |(B_\lambda f)(x_1, \ldots, x_n)|^2 (1+|\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon} d^n x \leqslant D_1^2 \|f\|_\alpha^2. \quad \text{(IX.50)}$$

Выберем единичные векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ вблизи $\mathbf{e}_n$ так, чтобы $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ образовали базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует такая константа C, что

$$1+|\mathbf{x}|^2 \leqslant C \sum_{i=1}^n (1+|\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_i|^2).$$

Отсюда для некоторой другой константы C' получаем

$$(1+|\mathbf{x}|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon} \leqslant C' \sum_{i=1}^n (1+|\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_i|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon}.$$

Следовательно, по (IX.50),

$$\|B_\lambda f\|_{\alpha-1-2\varepsilon}^2 \leqslant C' D_1^2 \|f\|_\alpha^2. \ \blacksquare$$

Доказательство теоремы IX.41. Простые соображения, основанные на компактности, показывают, что $\mathbb{R}^n$ можно покрыть конечным числом окрестностей $V_1, \ldots, V_m$, таких, что

$$V_i = \{k \mid |k-\lambda^{1/2}e_i| \leqslant {}^1/_2\lambda^{1/2}\} \text{ при } i=1, 2, \ldots, m-2,$$

где $e_1, \ldots, e_{m-2}$ — единичные векторы и

$$V_{m-1} = \{k \mid |k| \leqslant {}^3/_4\lambda^{1/2}\}, \qquad V_m = \{k \mid |k| \geqslant {}^5/_4\lambda^{1/2}\}.$$

Выберем C^∞-функции $\{\chi_i\}_{i=1}^m$ с $\operatorname{supp}\chi_i \subset V_i$ так, чтобы $\sum_{i=1}^m \chi_i = 1$.

По лемме 1, $\sum_{i=1}^m \|\widecheck{\chi_i \hat{f}}\|_\alpha \leqslant C_1 \|f\|_\alpha$. Следовательно, по лемме 1 при $i=m-1$ и $i=m$ и лемме 5 при $i \leqslant m-2$, получаем

$$\|B_\lambda f\|_{\alpha-1-2\varepsilon} \leqslant \sum_{i=1}^m \|\widecheck{(k^2-\lambda)^{-1}\chi_i \hat{f}}\|_{\alpha-1-2\varepsilon} \leqslant C_2 \|f\|_\alpha. \ \blacksquare$$

Strč prst skrz krk *Чешская скороговорка*

IX.10. Произведения обобщенных функций, волновые фронты, осцилляторные интегралы

В этом разделе мы хотим обсудить некоторые результаты, связанные с проблемой определения произведения двух обобщенных функций. В случае когда $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $S \in O_M^n$, произведение ST уже было определено (см. пример 7 и операцию 1 в § V.3). В приложениях часто встречаются более сингулярные произведения. Например, в теории свободного кванто-