сделано выше, можно показать, что

$$\int |(B_\lambda f)(x_1, \ldots, x_n)|^2 (1+|\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon} d^n x \leqslant D_1^2 \|f\|_\alpha^2. \quad (\text{IX}.50)$$

Выберем единичные векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ вблизи $\mathbf{e}_n$ так, чтобы $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ образовали базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует такая константа $C$, что

$$1+|\mathbf{x}|^2 \leqslant C \sum_{i=1}^n (1+|\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_i|^2).$$

Отсюда для некоторой другой константы $C'$ получаем

$$(1+|\mathbf{x}|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon} \leqslant C' \sum_{i=1}^n (1+|\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_i|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon}.$$

Следовательно, по (IX.50),

$$\|B_\lambda f\|_{\alpha-1-2\varepsilon}^2 \leqslant C' D_1^2 \|f\|_\alpha^2. \ \blacksquare$$

*Доказательство теоремы IX.41.* Простые соображения, основанные на компактности, показывают, что $\mathbb{R}^n$ можно покрыть конечным числом окрестностей $V_1, \ldots, V_m$, таких, что

$$V_i = \{k \mid |k-\lambda^{1/2}e_i| \leqslant {}^1/_2 \lambda^{1/2}\} \text{ при } i=1, 2, \ldots, m-2,$$

где $e_1, \ldots, e_{m-2}$ — единичные векторы и

$$V_{m-1} = \{k \mid |k| \leqslant {}^3/_4 \lambda^{1/2}\}, \qquad V_m = \{k \mid |k| \geqslant {}^5/_4 \lambda^{1/2}\}.$$

Выберем $C^\infty$-функции $\{\chi_i\}_{i=1}^m$ с $\operatorname{supp}\chi_i \subset V_i$ так, чтобы $\sum_{i=1}^m \chi_i = 1$. По лемме 1, $\sum_{i=1}^m \|\widecheck{\chi_i \hat{f}}\|_\alpha \leqslant C_1 \|f\|_\alpha$. Следовательно, по лемме 1 при $i=m-1$ и $i=m$ и лемме 5 при $i \leqslant m-2$, получаем

$$\|B_\lambda f\|_{\alpha-1-2\varepsilon} \leqslant \sum_{i=1}^m \|\widecheck{(k^2-\lambda)^{-1} \chi_i \hat{f}}\|_{\alpha-1-2\varepsilon} \leqslant C_2 \|f\|_\alpha. \ \blacksquare$$

*Strč prst skrz krk* — *Чешская скороговорка*

## IX.10. Произведения обобщенных функций, волновые фронты, осцилляторные интегралы

В этом разделе мы хотим обсудить некоторые результаты, связанные с проблемой определения произведения двух обобщенных функций. В случае когда $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $S \in O_M^n$, произведение $ST$ уже было определено (см. пример 7 и операцию 1 в § V.3). В приложениях часто встречаются более сингулярные произведения. Например, в теории свободного квантованного поля желательно определить $\theta(x-y)\Delta_+(x-y)+\theta(y-x)\Delta_+(y-x)$, где $\Delta_+$ — двухточечная функция Паули (см. теорему IX.34) и

$$\theta(f)=\int_{x_0\geqslant 0} f(x)\,d^4x.$$

Проблема определения произведений состоит отнюдь не в построении одного конкретного произведения $TS$, а в определении произведения, обладающего разумными свойствами, для широкого класса $T$ и $S$. В предыдущем примере как $\theta$, так и $\Delta_+$ сингулярны при $x=0$, но в определенном смысле, который будет уточнен, эти сингулярности совместны, что позволяет нам определить $\theta\Delta_+$.

Мы подойдем к проблеме определения произведений в два этапа. Сначала мы «локализуем» $T$ и $S$ таким образом, чтобы рассматривать лишь распределения с компактным носителем. Потом мы воспользуемся тем, что фурье-образ произведения есть свертка фурье-образов сомножителей, и попытаемся определить $TS$ так, чтобы $\widehat{TS}=(2\pi)^{-n/2}\hat{T}*\hat{S}$. Этот путь исследования произведений естественно приведет нас к понятию волнового фронта распределения. В заключение этого раздела мы разработаем метод вычисления волнового фронта для одного класса обобщенных функций, называемых осцилляторными интегралами. И наконец мы применим эту технику для определения обсуждавшегося выше произведения.

Заметим, что у нас не будет случая применить развиваемую ниже технику осцилляторных интегралов и что определить произведение $\theta\Delta_+$ можно и без помощи этой техники. Мы включили сюда ее изложение отчасти для того, чтобы дать введение в ряд важных идей, находящих приложения в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Некоторые из этих приложений будут указаны в Замечаниях.

Для пояснения процедуры локализации рассмотрим сначала случай, когда $T$ и $S$ сингулярны в различных точках в смысле следующего определения.

***Определение.*** Пусть $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Будем говорить, что $x\in\mathbb{R}^n$ — **регулярная точка** $T$, когда существуют окрестность $U$ точки $x$ и функция $F$ из $C^\infty$ на $U$, такие, что $T(f)=\int f(x)F(x)\,dx$ для всех $f\in\mathscr{D}$, для которых $\operatorname{supp} f\subset U$. Дополнение множества регулярных точек $T$ называется **сингулярным носителем** $T$ и будет обозначаться $\operatorname{sing\,supp}(T)$.

Из этого определения сразу следует такое

***Предложение.*** Сингулярный носитель $T$ есть замкнутое подмножество носителя $T$.

Есть частный случай, когда легко определить $TS$. Для этого достаточно локализовать то понятие произведения, которое мы ввели в § V.3.

***Теорема IX.42.*** Пусть $T$ и $S$ принадлежат $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $\operatorname{sing\,supp}(T) \cap \operatorname{sing\,supp}(S) = \varnothing$. Тогда существует единственная $W \in \mathscr{D}'$, такая, что

(a) Если $x \notin \operatorname{sing\,supp}(S)$ и $S$ совпадает с некоторой $C^\infty$-функцией $F$ вблизи $x$, то $W = FT$ вблизи $x$. Иными словами, если $S(f) = \int F(x) f(x)\,dx$ для всех $f$ с $\operatorname{supp} f \subset U$, где $U$ — открытое множество вблизи $x$, то $W(f) = T(Ff)$ для всех $f$ с $\operatorname{supp} f \subset U$.

(b) Если $x \notin \operatorname{sing\,supp}(T)$ и $T$ совпадает с некоторой $C^\infty$-функцией $G$ вблизи $x$, то $W = GS$ вблизи $x$.

*Доказательство.* Докажем сначала, что существует не более одной такой $W$. Действительно, предположим, что $W_1$ и $W_2$ удовлетворяют (a), (b), и пусть задана $f$. Пусть $B_R$ обозначает шар радиуса $R$. Поскольку $\operatorname{sing\,supp}(T) \cap \operatorname{sing\,supp}(S) = \varnothing$, для любого $x \in B_{2R}$ можно найти такой шар $B^{(x)}_{r(x)}$ радиуса $r(x)$ с центром в $x$, что $W_1(g) = W_2(g)$ для всех $g$ с $\operatorname{supp} g \subset B^{(x)}_{r(x)}$, ибо или (a), или (b) справедливы вблизи $x$ как для $W_1$, так и для $W_2$. Выберем конечное множество $x_1, \ldots, x_k$ в $B_{2R}$ так, чтобы $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B^{(x_i)}_{r(x_i)/2} \supset \overline{B}_R$, и выберем неотрицательные $\chi_1, \ldots, \chi_k$, такие, что

$$\chi_i \in C_0^\infty, \quad \operatorname{supp} \chi_i \subset B^{(x_i)}_{r(x_i)} \quad \text{и} \quad \chi_i \upharpoonright B^{(x_i)}_{r(x_i)/2} \equiv 1.$$

Положим $h = \sum\limits_{i=1}^{k} \chi_i$, и пусть $\chi$ — функция из $C_0^\infty$, тождественно равная единице на $B_R$ с носителем в $N$ — окрестности $\overline{B}_R$, на которой $h$ ограничена снизу строго положительной константой. Тогда для любой $f \in C_0^\infty$ с $\operatorname{supp} f \subset B_R$ можно написать

$$f = f \sum_{i=1}^{k} \chi\chi_i h^{-1} = \sum_{i=1}^{k} f\chi_i h^{-1} \equiv \sum_{i=1}^{k} f_i,$$

где $f_i = \chi_i h^{-1} f$ принадлежит $C^\infty$, причем $\operatorname{supp} f_i \subset B^{(x_i)}_{r(x_i)}$. В силу предыдущих рассуждений, $W_1(f_i) = W_2(f_i)$, так что $W_1(f) = W_2(f)$. Поскольку $R$ произвольно, $W_1 = W_2$.

Это доказывает единственность. Предположим теперь, что для каждого $R$ можно построить распределение $W_R$ на $\mathscr{D}(B_R)$.

Тогда, на основе доказанной выше единственности, распределения $W_R$ при разных $R$ должны совпадать на их общей области определения, т. е. если $R_2 > R_1$, то $W_{R_2} \upharpoonright \mathscr{D}(B_{R_1}) = W_{R_1}$, так что распределения $W_R$ «подстраиваются» друг к другу, образуя функционал на $\mathscr{D}$, непрерывный в силу непрерывности на каждом $\mathscr{D}(B_R)$.

Фиксируем теперь $R$. Каждая точка $x \in B_{2R}$ является регулярной точкой или $T$, или $S$, а потому выберем $B^{(x)}_{r(x)}$ так, чтобы или $S \upharpoonright B^{(x)}_{r(x)}$ было $C^\infty$-функцией $F_x$, или $T \upharpoonright B^{(x)}_{r(x)}$ было $C^\infty$-функцией $G_x$. Как и выше, выберем конечное множество точек $x_i$ и пронумеруем их так, чтобы $x_1, \ldots, x_l$ соответствовали функциям $F_{x_i}$, а $x_{l+1}, \ldots, x_k$—функциям $G_{x_i}$. Так же как и выше, пусть $u_i = \chi\chi_i h^{-1}$; тогда $u_i$ принадлежит $C^\infty$, $\operatorname{supp} u_i \subset B^{(x_i)}_{r(x_i)}$ и $\sum_{i=1}^{k} u_i = 1$ на $\overline{B}_R$. Зададим $W_R$ формулой

$$W_R(f) = \sum_{i=1}^{l} T(F_{x_i} u_i f) + \sum_{i=l+1}^{k} S(G_{x_i} u_i f). \qquad \text{(IX.51)}$$

Проверку того, что (IX.51) удовлетворяет (a) и (b), оставляем читателю. ∎

Описанная выше процедура определения $W(f)$ с помощью функций $u_i f$ называется локализацией. В предыдущем построении имеется одно важное обстоятельство, благодаря которому мы ничего не теряем при локализации: локальные кусочки можно сложить вместе. Это целиком связано с тем, что топология на $\mathscr{D}$ определена локально, т. е. для непрерывности функционала $T$ на $\mathscr{D}$ достаточно, чтобы были непрерывны его сужения на каждое $\mathscr{D}(B_R)$. Для топологии на $\mathscr{S}$ это не верно. В самом деле, можно взять две обобщенные функции умеренного роста $T$ и $S$, которые имеют произведение $TS$ по теореме IX.42, но произведение это не будет обобщенной функцией умеренного роста!

*Пример 1.* Пусть $F$—ограниченная $C^\infty$-функция $F(x) = \exp(ie^x)$. Поскольку $F$ ограничена, $F \in \mathscr{S}'$. Пусть $F'$—производная $F$ в смысле обобщенных функций. Ясно, что $F' \in \mathscr{S}'$. В применении к любой $g \in \mathscr{D}$

$$F'(g) = \int g(x)(ie^x) F(x)\, dx, \qquad \text{(IX.52)}$$

хотя (IX.52) и не верно для произвольной $g \in \mathscr{S}$. Пусть $\overline{F}$ — распределение умеренного роста, равное $\exp(-ie^x)$. Рассматривая $\overline{F}$ и $F'$ как обобщенные функции из $\mathscr{D}'$, можно найти их сингулярные носители и убедиться, что они пусты. А тогда по теореме IX.42 можно определить такой элемент $W$ из $\mathscr{D}'$, что

$W = -i\overline{F}F'$. Оказывается, $W$ есть не что иное, как $e^x$, но $e^x$ не обладает умеренным ростом (так как любая *положительная* обобщенная функция умеренного роста должна задаваться полиномиально ограниченной мерой).

Этот пример иллюстрирует непригодность техники локализации для обобщенных функций умеренного роста. Например, $F'$ локально представляется $C^\infty$-функцией, но не равна никакой $C^\infty$-функции как элемент $\mathcal{S}'$.

Теперь мы попробуем определить произведения распределений, сингулярные носители которых могут иметь общую часть. Наиболее важное свойство произведений, которое мы хотим сохранить,— их связь со свертками через преобразование Фурье. Конечно, в общем случае элементы $T \in \mathcal{D}'$ могут не иметь фурье-образов, но если мы проведем локализацию, т. е. рассмотрим некоторое $fT$, где $f \in \mathcal{D}$, то, по теореме IX.12, $\widehat{fT}$—целая аналитическая функция. Поэтому испытаем такое

***Определение.*** Пусть $T, S \in \mathcal{D}'$. Будем говорить, что $W \in \mathcal{D}'$ есть **произведение** $T$ и $S$, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ существует такая функция $f \in \mathcal{D}$, что $f = 1$ вблизи $x$ и для каждого $k \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\widehat{f^2W}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{fT}(l)\, \widehat{fS}(k-l)\, dl, \qquad \text{(IX.53)}$$

где интеграл абсолютно сходится. Если такое распределение $W$ существует, то мы говорим, что **существует произведение** $T$ **и** $S$.

***Теорема IX.43.***

(a) Произведение $W$ корректно определено, т. е. существует не более одного $W$, удовлетворяющего данному выше определению.

(b) Если $f \in \mathcal{D}$ и $T \in \mathcal{D}'$, то $fT$ существует и задается обычным определением, т. е. $fT(g) = T(fg)$.

(c) Если $TS$, $(TS)V$, $SV$ и $T(SV)$ все существуют, то $T(SV) = (TS)V$. Если $TS$ существует, то существует $ST$ и $TS = ST$.

(d) Если $T$ и $S$—обобщенные функции с непересекающимися сингулярными носителями, то $TS$ существует и задается произведением $W$ из теоремы IX.42.

(e) Если $T$ и $S$—обобщенные функции с компактным носителем, то достаточным условием существования $TS$ является абсолютная сходимость интеграла $\int \hat{T}(l)\hat{S}(k-l)\,dl$ для каждого

$k$ и полиномиальная ограниченность определяемой этим интегралом функции от $k$.

(f) Достаточное условие существования $W=TS$ состоит в существовании для каждого $x\in\mathbb{R}^n$ такой $f\in\mathscr{D}$, что $f(x)\neq 0$ и интеграл в правой части (IX.53) абсолютно сходится к полиномиально ограниченной функции от $k$.

(g) Если $TS$ существует, то $\operatorname{supp}(TS)\subset\operatorname{supp}T\cap\operatorname{supp}S$.

*Доказательство*. Докажем (a) и (g), а остальное оставим в качестве задач. Отметим сначала, что если выполнено (IX.53), то для любой $g\in\mathscr{D}$

$$\widehat{gf^2W}=(2\pi)^{-n/2}\widehat{gfT}*\widehat{fS}=(2\pi)^{-n/2}\widehat{fT}*\widehat{gfS}. \qquad \text{(IX.54)}$$

Это следует из ассоциативности $\hat{g}*(\widehat{fT}*\widehat{fS})=(\hat{g}*\widehat{fT})*\widehat{fS}$, которая имеет место, поскольку необходимые замены переменных законны вследствие требования абсолютной сходимости интеграла в (IX.53). Итак, если и $W_1$, и $W_2$ удовлетворяют определению, то для каждого $x\in\mathbb{R}^n$ можно найти $f$ и $g$, тождественно равные единице вблизи $x$, такие, что $\widehat{f^2W_1}=(2\pi)^{-n/2}\widehat{fT}*\widehat{fS}$ и $\widehat{g^2W_2}=(2\pi)^{-n/2}\widehat{gT}*\widehat{gS}$. По (IX.54) заключаем, что $\widehat{f^2g^2W_1}=\widehat{f^2g^2W_2}$, поэтому $W_1-W_2$ обращается в нуль вблизи $x$, откуда в силу соображений, приведенных в доказательстве теоремы IX.42, следует, что эта разность равна нулю.

Для доказательства (g) нужно только показать, что если $x\notin\operatorname{supp}T$, то $x\notin\operatorname{supp}(TS)$, а затем вспомнить о симметрии. В силу построений из теоремы IX.42, достаточно показать, что $TS(f)=0$ для всех $f$ с носителем в некоторой малой окрестности $N$ точки $x$. Поэтому выберем $N$ так, чтобы $T(f)=0$, если $\operatorname{supp}f\subset N$. Тогда $fT\equiv 0$, поскольку для всех $g\in\mathscr{D}$ имеем $fT(g)=T(fg)=0$. Итак, в силу (c), $f(TS)=(fT)S=0$. Пусть, наконец, $\chi$ — произвольная функция из $\mathscr{D}$, тождественно равная единице на $N$; тогда $TS(f)=TS(f\chi)=(f\,TS)(\chi)=0$. ∎

***Пример 2.*** Пусть $T=S=\delta$ на $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Тогда $\hat{T}=\hat{S}=(2\pi)^{-1/2}$ и для любой $f$, тождественно равной единице вблизи $x=0$, имеем $fT=T$, так что интеграл (IX.53) расходится. Следовательно, произведения $TS$ не существует.

***Пример 3.*** $T=S=\mathscr{P}(1/x)-i\pi\delta(x)$, где $\mathscr{P}$ — главное значение в смысле Коши (пример 6 из § V.3). Как мы уже видели (задача 22 из гл. V),

$$T=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{x+i\varepsilon}. \qquad \text{(IX.55)}$$

Применяя (IX.55), легко показать (задача 54), что

$$\hat{T}(k) = -(2\pi)^{-1/2}(2\pi i)\,\theta(k), \tag{IX.56}$$

где $\theta$—функция Хевисайда, определенная в примере 8 из § V.3. Итак,

$$(2\pi)^{-1/2}\int \hat{T}(l)\,\hat{S}(k-l)\,dl = -(2\pi)^{-3/2}(2\pi)^2\int \theta(l)\,\theta(k-l)\,dl =$$
$$= -(2\pi)(2\pi)^{-1/2}k\theta(k) = (ik)\,\hat{T}(k).$$

Таким образом, в силу утверждения (e) предыдущей теоремы, $TS$ существует и $TS = -T'$, или, в явном виде,

$$(TS)(f) = \lim_{a\downarrow 0}\int_a^{\infty}\left(\frac{f(x)+f(-x)-2f(0)}{x^2}\right)dx - i\pi f'(0).$$

***Пример 4.*** Существует простое обобщение примера 3 на распределения в $\mathbb{R}^n$. А именно, если носители фурье-образов $T$ и $S$ лежат в выпуклом конусе, причем дуальный конус $C$ имеет непустую внутренность, то можно показать, что $\hat{T} * \hat{S}$ существует. В этом случае имеется другой способ определения $TS$ (задача 62). Действительно, так как $\hat{T}$ имеет носитель в конусе, то по теореме IX.16 существует аналитическая функция $\tilde{T}$ на $\mathbb{R}^n + iC$, причем $T = \lim\limits_{\varkappa\downarrow 0,\ \varkappa\in C}\tilde{T}(\cdot + i\varkappa)$. Тогда, поскольку $\tilde{T}$ и $\tilde{S}$ полиномиально ограничены при $\varkappa\to 0$, этим свойством обладает и $\tilde{T}\tilde{S}$, так что $\lim\limits_{\varkappa\downarrow 0,\ \varkappa\in C}\tilde{T}(\cdot + i\varkappa)\,\tilde{S}(\cdot + i\varkappa)$ существует и задает обобщенную функцию. Она совпадает с произведением $TS$, определенным нашей общей процедурой.

В примере 3 и $T$, и $S$ сингулярны при $x=0$, но их фурье-образы ведут себя плохо не по всем направлениям. Это наводит на мысль выделить сингулярные направления, а также сингулярные точки.

***Определение.*** Пусть $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Точка $\langle x, k\rangle\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ называется **регулярно направленной точкой** $T$, если существуют окрестность $N$ точки $x$, окрестность $M$ точки $k$ и функция $g\in\mathscr{D}$, тождественно равная единице в $N$, такие, что при каждом $m>0$ найдется константа $C_m$, для которой

$$|S(\lambda p)| \equiv |\widehat{gT}(\lambda p)| \leqslant C_m(1+|\lambda|)^{-m} \tag{IX.57}$$

при всех $p\in M$, $\lambda\in\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Дополнение в $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ множества регулярно направленных точек называется **волновым фронтом** $T$ и обозначается $WF(T)$.

Итак, $\langle x, k\rangle$ — регулярно направленная точка, если локализация $gT$ распределения $T$ около $x$ обладает фурье-образом, убывающим быстрее любой степени в некотором конусе около $k$ (рис. IX.6).

***Теорема IX.44.*** Пусть $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда

(a) $WF(T)$ — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

(b) Для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ множество

$WF_x(T) \equiv \{k \mid \langle x, k\rangle \in WF(T)\}$

есть конус, т. е. из $k \in WF_x(T)$ и $\lambda > 0$ следует, что $\lambda k \in WF_x(T)$.

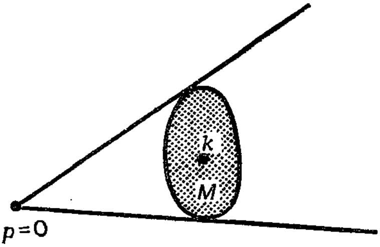


Рис. IX.6. Конус $\bigcup\limits_{\lambda>0} (\lambda M)$.

(c) $WF(T+S) \subset WF(T) \cup WF(S)$.

(d) Множество $\{x \mid WF_x(T) \neq \varnothing\}$ есть $\operatorname{sing\,supp}(T)$.

(e) Если $T \in \mathscr{S}'$ и носитель $\hat{T}$ лежит в замкнутом конусе $C$, то $WF_x(T) \subset C$ для каждого $x$.

(f) Пусть $M$ — диффеоморфизм $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, т. е. $C^\infty$-отображение с $C^\infty$-обратным, и пусть $T \circ M$ — обобщенная функция

$$(T \circ M)(f) = T(g^{-1}(f \circ M^{-1})),$$

где $g$ — детерминант якобиевой матрицы $dM_x$, состоящей из элементов $(dM_x)_{ij} = \partial M_i / \partial x_j$. Пусть отображение $M_*$: $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ определяется формулой

$$M_* \langle x, k\rangle = \langle M(x), dM_x^*(k)\rangle,$$

где $dM_x^*$ — матрица, сопряженная к $dM_x$ по отношению к евклидову внутреннему произведению на $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$WF(T \circ M) = M_*[WF(T)].$$

*Доказательство.* (a)—(c) немедленно следуют из определения $WF(T)$. Для случая линейного преобразования координат (f) доказывается легко, но в общем случае необходимы довольно тонкие рассуждения (задача 75). Для доказательства (d) следует показать, что $x$ — регулярная точка тогда и только тогда, когда $\langle x, k\rangle$ — регулярное направление для всех $k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Утверждение «только тогда» очевидно, поэтому предположим, что $\langle x, k\rangle$ — регулярное направление для каждого $k$. Тогда для каждого $k$ на единичной сфере $S = \{k \mid |k| = 1\}$ существуют такие $g_k$, $N_k$, $M_k$, что выполняется (IX.57). В силу компактности $S$ можно выбрать $k_1, \ldots, k_m$ так, чтобы $\bigcup\limits_{i=1}^{m} M_{k_i} \supset S$. Пусть $g = \prod\limits_i g_{k_i}$ и $N = \bigcap N_{k_i}$.

По (IX.57) и приведенной ниже лемме $\widehat{gT}$ убывает быстрее любой степени в каждом множестве $\bigcup_{\lambda>0} \lambda\tilde{M}_{k_i}$, где $\tilde{M}_{k_i}$ — произвольное компактное подмножество $M_{k_i}$, а потому $\widehat{gT}$ обладает этим свойством и в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Отсюда следует, что $\widehat{g^2T} = (2\pi)^{-n/2}\hat{g} * \widehat{gT}$ лежит в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и, значит, $g^2T \in C^\infty$. Поскольку $g$ тождественно равна 1 вблизи $x$, то $T$ бесконечно дифференцируема вблизи $x$.

Чтобы доказать (e), выберем положительную вблизи $x$ функцию $f$, причем такую, что $\hat{f}$ имеет компактный носитель. Тогда $\widehat{fT}(k) = \hat{T}(g_k)$, где $g_k(l) = (2\pi)^{-n/2}\hat{f}(l-k)$. Если $k \notin C$, то для некоторого малого открытого множества $U$ вблизи $k$ имеем $\bar{U} \cap C = \varnothing$. Для всех больших $\lambda$ также $\operatorname{supp} g_{\lambda l} \cap C = \varnothing$ при всех $l \in U$, а потому $\widehat{fT}(k)$ обращается в нуль на $\lambda U$ при больших $\lambda$. Теперь для заданного $x$ возьмем такое $h \in \mathscr{D}$, что $hf \equiv 1$ вблизи $x$. Согласно лемме, $\widehat{hfT}$ убывает быстрее любой степени в $\bigcup_{\lambda>0} \lambda\tilde{U}$, где $\tilde{U}$ — некоторая компактная окрестность $k$ в $U$. ∎

Следующая лемма завершает доказательство теоремы IX.44.

***Лемма.*** Пусть $M$ — открытое множество, отделенное от 0, и предположим, что $S \in O_M^n$ удовлетворяет (IX.57) при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $k \in M$. Пусть $\tilde{M}$ — произвольное компактное подмножество в $M$, и пусть $h \in \mathscr{S}$. Тогда $h * S$ удовлетворяет (IX.57) для всех $k \in \tilde{M}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

*Доказательство.* Пусть $U = \bigcup_{\lambda>0} \lambda M$. Разобьем интеграл на два слагаемых:

$$(S * h)(\lambda k) = \int_{l \in U} S(l)\, h(\lambda k - l)\, dl + \int_{l \notin U} S(l)\, h(\lambda k - l)\, dl.$$

На $U$ выполняется неравенство $|S(l)| \leqslant C_m (1 + |l|)^{-m}$ для любого $m$, а на всем $\mathbb{R}^n$ для всех $j$ — неравенство $|h(l)| \leqslant D_j (1 + |l|)^{-j}$. Теперь

$$|\lambda k| + 1 \leqslant |\lambda k - l| + |l| + 1 \leqslant (|\lambda k - l| + 1)(|l| + 1),$$

так что для любого $k$

$$\left| \int_{l \in U} S(l)\, h(\lambda k - l)\, dl \right| \leqslant \int D_j C_{j+n+1} (|\lambda k| + 1)^{-j} (|l| + 1)^{-n-1}\, dl \leqslant$$

$$\leqslant (\text{const})(|\lambda k| + 1)^{-j}.$$

Далее, пусть $\tilde{U} = \bigcup\limits_{\lambda > 0} \lambda \tilde{M}$, и пусть $\alpha = \sup \{l \cdot k \mid |l| = |k| = 1, l \notin U, k \in \tilde{U}\}$. Тогда, поскольку $\tilde{M}$ компактно, а $M$ открыто, $\alpha < 1$. Итак, при $l \notin U$, $k \in \tilde{U}$

$$|l-k|^2 \geqslant |l|^2 + |k|^2 - 2\alpha |l||k| \geqslant (1-\alpha)(|l|^2 + |k|^2) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}(1-\alpha)(|l| + |k|)^2,$$

поэтому $|l-k| \geqslant \beta(|l| + |k|)$ для подходящего $\beta > 0$. Далее, так как $S \in O_M^n$, то $|T(k)| \leqslant E(1+|k|^p)$ для подходящего $p$ и $|h(l)| \leqslant \leqslant D_{p+n+1+m}(1+|l|)^{-(p+n+1+m)}$. Следовательно, для $k \in \tilde{U}$

$$\left| \int\limits_{l \notin U} S(l)\, h(\lambda k - l)\, dl \right| \leqslant$$
$$\leqslant E D_{p+n+1+m} \int (1 + |\lambda k| + |l|)^{-p-n-m-1} (1+|l|)^p\, dl \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\, (|\lambda k| + 1)^{-m}.$$

Итак, при $k \in \tilde{U}$

$$|(S * h)(\lambda k)| \leqslant \mathrm{const}\, (1 + |\lambda k|)^{-m}.$$

Поскольку $\inf \{|k| \mid k \in \tilde{M}\} > 0$, лемма доказана. ∎

***Пример 2 еще раз.*** $WF(\delta) = \{\langle 0, \lambda\rangle \mid \lambda \neq 0\}$.

***Пример 3 еще раз.*** $WF(\mathcal{P}(1/x) - i\pi\delta(x)) = \{\langle 0, \lambda\rangle \mid \lambda > 0\}$.

Даже если $\langle x, k\rangle \in WF(T)$, то $\widehat{gT}$ полиномиально ограничено в направлении $k$, поскольку $gT$ — распределение умеренного роста. Итак, в «хороших» направлениях $\widehat{gT}$ падает быстрее любого полинома, а в «плохих» направлениях $\widehat{gT}$ полиномиально ограничено. Следовательно, чтобы произвольный интеграл типа $\int \widehat{gT}(l)\, \widehat{gS}(k-l)\, dl$ сходился, достаточно, чтобы каждое направление было хорошим либо для $T$, либо для $S$. Это приводит к следующему результату, являющемуся первой основной теоремой этого раздела.

***Теорема IX.45.*** Пусть $T$ и $S$ — обобщенные функции. Предположим, что множество

$$WF(T) \oplus WF(S) \equiv \{\langle x, k_1 + k_2\rangle \mid \langle x, k_1\rangle \in WF(T);\ \langle x, k_2\rangle \in WF(S)\}$$

не содержит ни одного элемента вида $\langle x, 0\rangle$. Тогда произведение $TS$ существует и

$$WF(TS) \subset WF(T) \cup WF(S) \cup [WF(T) \oplus WF(S)]. \qquad \text{(IX.58)}$$

*Доказательство.* По определению, нужно задать произведение только локально. Итак, для фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ пусть $\Gamma_1 = WF_x(T)$, $\Gamma_2 = WF_x(S)$. По предположению $0 \notin \Gamma_1 + \Gamma_2$, так что в силу замкнутости $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ имеем $\sup\{k_1 \cdot k_2 | k_1 \in \tilde{\Gamma}_1, -k_2 \in \tilde{\Gamma}_2\} < 1$, где через $\tilde{C}$ для любого конуса $C$ обозначено множество $\{x \in C \| x| = 1\}$. Для любых замкнутых конусов $K_1$, $K_2$ в $\{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$, таких, что $\tilde{\Gamma}_1 \subset \tilde{K}_1^{\text{int}}$, $\tilde{\Gamma}_2 \subset \tilde{K}_2^{\text{int}}$ (int обозначает «внутренность»), можно, в силу соображений компактности, найти $f$, тождественно равную единице вблизи $x$ и такую, что

$$|\widehat{fT}(k)| \leqslant c_j (1 + |k|)^{-j} \quad \text{при всех } k \notin K_1 \text{ и всех } j, \tag{IX.59}$$

$$|\widehat{fS}(k)| \leqslant d_j (1 + |k|)^{-j} \quad \text{при всех } k \notin K_2 \text{ и всех } j. \tag{IX.60}$$

Более того, поскольку $fT$ и $fS$ обладают компактными носителями, существуют $m$ и $D$, такие, что

$$|\widehat{fS}(k)| + |\widehat{fT}(k)| \leqslant D (1 + |k|)^m \quad \text{при всех } k. \tag{IX.61}$$

Предположим, что $K_1$, $K_2$ выбраны столь «близкими» к $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, что справедливо неравенство

$$\beta = \sup\{k_1 \cdot k_2 \,|\, k_1 \in \tilde{K}_1, -k_2 \in \tilde{K}_2\} < 1.$$

Это всегда возможно, поскольку соответствующая точная верхняя грань с заменой $K_i$ на $\Gamma_i$ не превосходит 1.

Докажем, что интеграл

$$I(k) = \int\limits_{l_2 = k - l_1} \widehat{fS}(l_1)\, \widehat{fT}(l_2)\, dl_1$$

абсолютно сходится, полиномиально ограничен и убывает быстрее любой степени в окрестности любого направления $k \notin K_1 \cup K_2 \cup (K_1 + K_2)$. Отсюда, в силу части (е) теоремы IX.43, будет следовать существование произведения, а также включение $WF_x(TS) \subset K_1 \cup K_2 \cup (K_1 + K_2)$. Так как $K_i$ — произвольно малый конус вокруг $\Gamma_i$, мы получим тогда, что $WF_x(TS) \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup (\Gamma_1 + \Gamma_2)$, что завершает доказательство теоремы.

Представим $I(k)$ в виде суммы четырех интегралов:

$$I(k) = I_1(k) + I_2(k) + I_3(k) + I_4(k)$$

по четырем областям $l_1 \in K_1$, $l_2 \in K_2$; $l_1 \in K_1$, $l_2 \notin K_2$; $l_1 \notin K_1$, $l_2 \in K_2$; $l_1 \notin K_1$, $l_2 \notin K_2$. Ниже будет часто применяться неравенство из предыдущей леммы:

$$|x| + 1 \leqslant (|y| + 1)(|x - y| + 1). \tag{IX.62}$$

Согласно (IX.59), (IX.60) и (IX.62),

$$|I_4(k)| \leqslant c_j d_{n+j+1} \int (|l_1|+1)^{-n-j-1} (|l_1-k|+1)^{-j} dl_1 \leqslant$$
$$\leqslant (|k|+1)^{-j} \left[ c_j d_{n+j+1} \int (|l_1|+1)^{-n-1} dl_1 \right],$$

так что интеграл $I_4$ сходится и убывает во всех направлениях быстрее любой степени.

Далее, $I_1(k)=0$ всюду, за исключением $k \in K_1+K_2$, поэтому чтобы оценить вклад $I_1$, требуется доказать лишь сходимость этого интеграла и его полиномиальную ограниченность, так как включение $WF(I_1) \subset K_1+K_2$ выполняется автоматически. Если $l_1 \in K_1$, $l_2 \in K_2$, то

$$|l_1+l_2|^2 \geqslant \frac{1}{2}(1-\beta)(|l_1|+|l_2|)^2.$$

Итак, при фиксированном $k$ в интеграл $I_1$ входят только такие $l_1$, $l_2$, для которых $|l_1|$, $|l_2| \leqslant 2(1-\beta)^{-1}|k|$. Применяя (IX.61), видим, что $I_1(k)$ сходится и

$$I_1(k) \leqslant \int_{|l_1| \leqslant 2(1-\beta)^{-1}|k|} D^2 [1+2(1-\beta)^{-1}|k|]^{2m} dl_1 =$$
$$= D^2 [1+2(1-\beta)^{-1}|k|]^{2m+n} \times (\text{объем единичного шара}).$$

Рассмотрим наконец $I_2$ (доказательство для $I_3$ аналогично). По (IX.61) и (IX.60)

$$I_2(k) \leqslant D d_{j+m+n+1} \int_{k-l_2 \in K_1} (1+|k-l_2|)^m (1+|l_2|)^{-j-m-n-1} dl_2.$$

Если проигнорировать условие $k-l_2 \in K_1$ и применить неравенство $|k-l_2| \leqslant |k|+|l_2|$, то видно, что интеграл сходится и полиномиально ограничен. Но мы утверждаем даже, что $I_2(k_0)$ полиномиально убывает при $k_0 \notin K_1$, так что $WF(I_2) \subset K_1$. Действительно, если $k_0 \notin K_1$, выберем конус $K_3$ вокруг $k_0$ так, чтобы $\sup\{k_1 \cdot k_2 \mid k_1 \in \tilde{K}_1, k_2 \in \tilde{K}_3\} = \gamma < 1$. Тогда для $k \in K_3$, $k-l_2 \in K_1$ получим $|l_2| \geqslant 1/2(1-\gamma)(|k|+|k-l_2|)$, а потому при $k \in K_3$

$$I_2(k) \leqslant D d_{j+m+n+1} \int (1+|l_1|)^m \left[ 1+\frac{1}{2}(1-\gamma)(|k|+ \right.$$
$$\left. +|l_1|) \right]^{-j-m-n-1} dl_1 \leqslant \text{const}(1+|k|)^{-j}.$$

Итак, $WF(I_2) \subset K_1$. По теореме IX.44(c)

$$WF(I) \subset \bigcup_{j=1}^{4} WF(I_j) \subset (K_1+K_2) \cup K_1 \cup K_2. \blacksquare$$

***Пример 3 в третий раз.*** $WF(\mathscr{P}(1/x)-i\pi\delta(x))=\{\langle 0, \lambda\rangle \mid \lambda>0\}$. Следовательно, по теореме IX.45 существуют все степени $\mathscr{P}(1/x)-i\pi\delta(x)$.

***Пример 5.*** Пусть $x_1$, $x_2$ — координаты в $\mathbb{R}^2$, и пусть $\delta(x_1)$, $\delta(x_2)$ определены обычным образом, например

$$\int f(x_1, x_2)\,\delta(x_1)\,dx_1\,dx_2=\int f(0, x_2)\,dx_2.$$

Тогда

$$WF(\delta(x_1))=\{\langle 0, x_2; \lambda, 0\rangle \mid x_2\in\mathbb{R},\ \lambda\neq 0\},$$
$$WF(\delta(x_2))=\{\langle x_1, 0; 0, \lambda\rangle \mid x_1\in\mathbb{R},\ \lambda\neq 0\}.$$

По предыдущей теореме $\delta(x_1)\,\delta(x_2)$ существует и, очевидно, есть $\delta(x_1, x_2)$ — обобщенная функция, переводящая $f$ в $f(0)$.

Чтобы воспользоваться развитой нами техникой, необходим метод вычисления волновых фронтов. Рассмотрим сначала один частный пример, который затем обобщим настолько, чтобы это позволило вычислить волновой фронт двухточечной функции $\Delta_+(x; m^2)$ свободного квантового поля.

***Пример 6.*** Пусть $T_\alpha$ — фурье-образ функции $(2\pi)^{-1/2}(1+|k|^2)^\alpha$ в $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Если $\alpha$ равно целому положительному $n$, то носитель

$$T_n=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\delta^{(2m)}(x),$$

очевидно, сосредоточен в нуле, причем $WF(T_n)=\{\langle 0, \lambda\rangle \mid \lambda\neq 0\}$. Можно также явно, посредством интегрирования по контуру, вычислить $T_{-1}$:

$$T_{-1}(x)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}(1+k^2)^{-1}\,dk=\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

и вообще все $T_{-n}$. Множество $\{0\}$ не является носителем $T_{-1}$, однако является его сингулярным носителем. Это наводит на мысль, что $\{0\}$ — сингулярный носитель $T_\alpha$ при произвольном $\alpha$. Как это можно показать? Если $T_\alpha\in C^\infty$ вне нуля, то можно ожидать, что *глобально* $x^nT_\alpha$ становится все более гладким с ростом $n$. Более того, если можно показать, что для любого $m$ существует $n$, при котором $x^nT_\alpha\in C^m(\mathbb{R})$, то, очевидно, $T_\alpha$ бесконечно дифференцируема вне нуля. Но

$$\widehat{x^nT_\alpha}=\left(i\frac{d}{dk}\right)^n\hat{T}_\alpha\equiv f_{\alpha,n},$$

откуда, проводя явное вычисление, получаем

$$|f_{\alpha,n}(k)|\leqslant C(1+k^2)^{\alpha-n/2}.$$

Итак, для любых фиксированных $\alpha$ и $m$ можно найти такое $n$, что $k^m f_{\alpha,n}(k) \in L^1$ (например, $n > m + 2\alpha + 1/2$) и потому $T_\alpha$ принадлежит $C^\infty$ вне $x=0$. Наконец, ясно, что распределения $T_\alpha$ не являются гладкими около нуля. Действительно, по смыслу теоремы Пэли—Винера и в связи с тем, что функция $(1+k^2)^\alpha$ аналитична в полосе $|\operatorname{Im} k| < 1$, распределение $T_\alpha$ и все его производные убывают экспоненциально. Если бы $T_\alpha \in C^\infty$ в нуле, то $T_\alpha$ и $\hat{T}_\alpha$ принадлежали бы $\mathscr{S}$.

В предыдущих рассуждениях было важно то, что все производные $\hat{T}_\alpha$ убывают все быстрее и быстрее, т. е. то, что это распределение ведет себя не так, как $x^{-n}\sin x$, производные которого асимптотически суть $\pm x^{-n}\sin x$ или $\pm x^{-n}\cos x$ на бесконечности. В этой связи введем такое

***Определение.*** $C^\infty$-функция $F$ на $\mathbb{R}^n$ называется **символом порядка** $k$ на $\{0\}\times\mathbb{R}^n$, если для всех $\alpha \in I_+^n$ существует такая константа $d_\alpha$, что

$$|(D^\alpha F)(x)| \leqslant d_\alpha (1+|x|)^{(k-|\alpha|)}.$$

Обобщенная функция $F$ на $\mathbb{R}^n$ называется **приближенным символом порядка** $k$ на $\{0\}\times\mathbb{R}^n$, если для любого $\alpha \in I_+^n$ существуют компактное множество $S_\alpha$ и такая постоянная $d_\alpha$, что $F$ вне $S_\alpha$ равна функции из $C^{|\alpha|}$, удовлетворяющей неравенству

$$|(D^\alpha F)(x)| \leqslant d_\alpha (1+|x|)^{(k-|\alpha|)}.$$

Условие «на $\{0\}\times\mathbb{R}^n$» добавлено потому, что это определение сейчас станет частным случаем другого, более общего. А пока мы будем опускать это условие.

***Теорема IX.46.*** Пусть $F$ — приближенный символ порядка $k$. Пусть $T=\hat{F}$. Тогда сингулярный носитель $T$ или пуст, или равен $\{\langle 0, \ldots, 0\rangle\}$.

*Доказательство*, основанное на идеях примера 6, мы оставляем читателю (задача 66). ∎

Предыдущая теорема не покрывает многих примеров, представляющих интерес. Например, напомним, что $\Delta_+(x; m^2)$ имеет вид

$$\Delta_+(x; m^2) = \frac{i}{2(2\pi)^3}\int \exp(i\psi(x, \mathbf{k}))\frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}},$$

где $\psi(x, \mathbf{k}) = -x_0\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{k}$. Это чем-то похоже на примеры функций, удовлетворяющих условиям теоремы IX.46, однако фазовый множитель сложнее, чем $e^{ik\cdot x}$, а переменных интегрирования меньше, чем в преобразовании Фурье. Введем поэтому более широкий класс подходящих функций и распределений.

***Определение.*** Пусть $\Omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Функция $a(\cdot, \cdot)\colon \Omega\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{C}$ называется **символом порядка** $m$ на $\Omega\times\mathbb{R}^s$, если для каждого компакта $K\subset\Omega$ и любых $\alpha\in I_+^n$, $\beta\in I_+^s$ существует такая константа $d_{\alpha,\beta,K}$, что

$$|(D_x^\alpha D_\theta^\beta a)(x, \theta)|\leqslant d_{\alpha,\beta,K}(1+|\theta|)^{m-|\beta|} \qquad \text{(IX.63)}$$

при всех $x\in K$, $\theta\in\mathbb{R}^s$. Семейство всех символов порядка $m$ с полунормами

$$\|a\|_{\alpha,\beta,K}=\sup_{x\in K,\,\theta}(1+|\theta|)^{|\beta|-m}|(D_x^\alpha D_\theta^\beta a)(x, \theta)|$$

будет обозначаться $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$.

Будем говорить, что $a(\cdot, \cdot)\colon \Omega\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{C}$ есть **асимптотический символ порядка** $m$ на $\Omega\times\mathbb{R}^s$, если $a=a_1+a_2$, где $a_1\in\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$ и где (i) $a_2$ имеет компактный носитель по переменным $\theta$ и (ii) отображение $x\mapsto a_2(x, \cdot)$ принадлежит $C^\infty$ как отображение из $\Omega$ в $L^\infty(\mathbb{R}^s)$.

***Определение.*** **Фазовой функцией** на $\Omega\times\mathbb{R}^s$ называется такая функция $\varphi\colon \Omega\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$, что

(i) $\varphi$ непрерывна и однородна степени 1 по $\theta$, т. е. $\varphi(x, \lambda\theta)=\lambda\varphi(x, \theta)$ для всех $\langle x, \theta\rangle\in\Omega\times\mathbb{R}^s$ и $\lambda\geqslant 0$;

(ii) $\varphi$ принадлежит $C^\infty$ на $\Omega\times(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})$;

(iii) $\varphi$ не имеет критических точек в $\Omega\times(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})$, т. е. $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s)$-значная функция $\langle\operatorname{grad}_x\varphi, \operatorname{grad}_\theta\varphi\rangle$ никогда не обращается в нуль.

***Определение.*** **Осцилляторный интеграл на** $\Omega\times\mathbb{R}^s$ есть формальное выражение вида

$$\int\limits_{\theta\in\mathbb{R}^s} e^{i\varphi(x,\theta)}a(x, \theta)\,d\theta,$$

где $\varphi$ — фазовая функция, а $a$ — асимптотический символ.

***Пример 7.*** Мы можем написать

$$\Delta_+(x; m^2)=\frac{i}{2(2\pi)^3}\int e^{i\varphi(x,\theta)}a(x, \theta; m)\,d\theta,$$

где

$$\varphi(x, \theta)=-x_0|\theta|+\mathbf{x}\cdot\theta,$$
$$a(x, \theta; m)=(m^2+|\theta|^2)^{-1/2}\exp\left(-ix_0\left[(m^2+|\theta|^2)^{1/2}-|\theta|\right]\right).$$

Пусть $\Omega=\mathbb{R}^4$. Очевидно, что $\varphi$ — фазовая функция, поскольку $\partial\varphi/\partial x_0=|\theta|\neq 0$, если $\langle x, \theta\rangle\in\mathbb{R}^4\times(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$. Функция $a$ не принадлежит $C^\infty$, поскольку $|\theta|$ не является гладкой около нуля, но, применяя неравенство $\left|\sqrt{m^2+\theta^2}-|\theta|\right|\leqslant C(1+|\theta|)^{-1}$, нетрудно доказать, что $a$ — асимптотический символ порядка —1 (задача 68). Покажем, например, что $\partial a/\partial\theta_i$ убывает как $|\theta|^{-2}$ (при больших $\theta$). Пусть $f=(m^2+\theta^2)^{-1/2}$ и $g=[(m^2+|\theta|^2)^{1/2}-|\theta|]$. Тогда

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\right|=\left|\frac{\theta_i}{\theta}\right|\left|\frac{\theta}{(m^2+\theta^2)^{-3/2}}\right|\leqslant c\,|\theta|^{-2} \text{ для больших } \theta$$

и

$$\left|\frac{\partial g}{\partial\theta_i}\right|=\left|\frac{\theta_i}{\theta}\right|\left|[(m^2+|\theta|^2)^{-1/2}\,\theta-1]\right|\leqslant[(1+m^2|\theta|^{-2})^{-1/2}-1]\leqslant c\,|\theta|^{-2}.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{\partial a}{\partial\theta_i}\right|\leqslant\left|\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\right|+\left|x_0 f\frac{\partial g}{\partial\theta_i}\right|\leqslant c\,|\theta|^{-2}.$$

Поскольку $a$ — асимптотический символ, то $\Delta_+$ — осцилляторный интеграл.

Мы держим курс на общую теорему, утверждающую, что любой осцилляторный интеграл естественным образом определяет некоторое распределение, и описывающую явным образом волновой фронт так определенного распределения. Сначала без доказательства отметим два простых факта (задача 69).

*Лемма 1.* $C^\infty$-функции с компактными носителями в $\Omega\times\mathbb{R}^s$ плотны в $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ в топологии $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m')$, если только $m'>m$. В частности, отображение из множества функций с компактным носителем в некоторое топологическое пространство имеет не более одного непрерывного продолжения на $\bigcup_{m<\infty}\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$, которое непрерывно на каждом $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ в его естественной топологии.

*Лемма 2.* Пусть $a(x,\theta)$ — функция с компактным носителем в $\Omega\times\mathbb{R}^s$, так что $x\longmapsto a(x,\theta)$ принадлежит $C^\infty$ как $L^\infty$-значная функция на $\Omega$. Тогда для любой фазовой функции интеграл $\int a(x,\theta)\,e^{i\varphi(x,\theta)}\,d\theta$ принадлежит $C^\infty$ по $x$.

Для основной теоремы нам потребуется ввести еще одно понятие и изучить его свойства.

*Определение.* Пусть $\varphi(x,\theta)$ — фазовая функция на $\Omega\times\mathbb{R}^s$, где $\Omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$M(\varphi)=\{\langle x,\theta\rangle\in\Omega\times\mathbb{R}^s\setminus\{0\}\mid(\nabla_\theta\varphi)(x,\theta)=0\},$$
$$SP(\varphi)=\{\langle x,(\nabla_x\varphi)(x,\theta)\rangle\mid\langle x,\theta\rangle\in M(\varphi)\}\subset\Omega\times\mathbb{R}^n.$$

$SP(\varphi)$ называется **многообразием стационарной фазы для** $\varphi$.

***Лемма 3.*** $SP(\varphi)$ — *замкнутое* подмножество в $\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, и если $\langle x, k\rangle\in SP(\varphi)$, то $\langle x, \lambda k\rangle\in SP(\varphi)$ для всех $\lambda>0$.

*Доказательство.* Поскольку $\varphi$ — фазовая функция, она не имеет критических точек, а потому если $\langle x, \theta\rangle\in M(\varphi)$, то $\nabla_x\varphi\neq 0$. Итак, $SP(\varphi)\subset\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Если $\langle x, \theta\rangle\in SP(\varphi)$, то и $\langle x, \lambda\theta\rangle\in\in SP(\varphi)$, так как $\varphi$ однородна степени 1 и, значит, $(\nabla_x\varphi)(x, \lambda\theta)=\lambda(\nabla_x\varphi)(x, \theta)$. Наконец, $M(\varphi)$ замкнуто как множество нулей непрерывной функции. Легко убедиться, что и множество $\{x\mid M_x(\varphi)\neq\varnothing\}$ замкнуто. Поскольку функция $\nabla_x\varphi$ непрерывна, множество $SP(\varphi)$ замкнуто как график непрерывной функции на замкнутом множестве. ∎

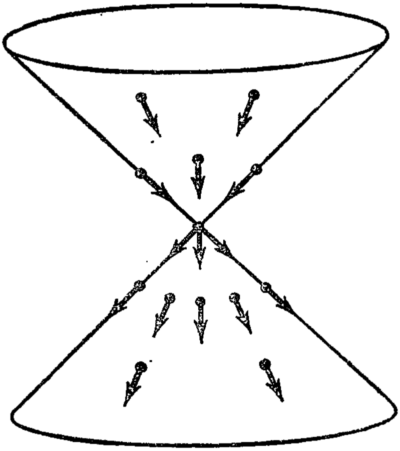

Рис. IX.7. Множество $SP(\varphi)$.

***Пример 7, продолжение.*** $\varphi(x, \theta)=-x_0|\theta|+\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}$. Таким образом,

$$\nabla_\theta\varphi=-x_0\theta|\theta|^{-1}+\mathbf{x},$$

откуда

$$M(\varphi)=\{\langle x, \theta\rangle\mid x=0\}\cup\{\langle x, \theta\rangle\,\|\mathbf{x}|=|x_0|\neq 0;\ \boldsymbol{\theta}=\lambda\mathbf{x}/x_0,\ \text{где }\lambda>0\}.$$

Поскольку $\nabla_x\varphi(x, \theta)=\langle-|\theta|, \theta\rangle$, заключаем, что

$$SP(\varphi)=\{\langle 0, 0;\ -|\theta|, \theta\rangle\mid\theta\in\mathbb{R}^3\}\cup$$
$$\cup\ \{\langle\pm|\mathbf{x}|, \mathbf{x};\ -\lambda|\mathbf{x}|, \mp\lambda\mathbf{x}\rangle\mid\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\text{ и }\lambda>0\}.$$

Итак, множество $\{x\mid SP_x(\varphi)\neq\varnothing\}$ есть световой конус $\{x\mid x_0=\pm|\mathbf{x}|\}$, а $SP(\varphi)$ — семейство векторов, касательных к световому конусу, свето-подобных (т. е. $x\cdot\tilde{x}=0$) и имеющих отрицательную временну́ю компоненту (см. рис. IX.7).

Теперь мы переходим ко второй основной теореме этого раздела.

***Теорема IX.47.*** Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — фиксированное открытое множество, и пусть $\varphi(x, \theta)$ — фиксированная фазовая функция на $\Omega\times\mathbb{R}^s$. Тогда каждому асимптотическому символу $a$ на $\Omega\times\mathbb{R}^s$ можно сопоставить такую обобщенную функцию $D_\varphi(a)$ на $\Omega$, что

(a) Отображение $a\mapsto D_\varphi(a)$ линейно.

(b) Если носитель $a$ по переменной $\theta$ компактен, то $D_\varphi(a)$ есть $C^\infty$-функция, равная

$$\int\limits_{\theta\in\mathbb{R}^s} a(x, \theta)\, e^{i\varphi(x, \theta)}\, d\theta.$$

(c) Сужение $D_\varphi(\cdot)$ на множество $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ есть непрерывная функция из $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ в $\mathscr{D}'_\Omega$.

$D_\varphi$ однозначно определяется условиями (a)—(c) и, более того,

(d) Для любого асимптотического символа $a$ множество $WF(D_\varphi(a))$ принадлежит $SP(\varphi)$ — многообразию стационарной фазы для $\varphi$.

Распределение $D_\varphi(a)$ записывается в виде формального выражения

$$D_\varphi(a) = \int a(x, \theta)\, e^{i\varphi(x, \theta)}\, d\theta.$$

Основной элемент доказательства — развитие и применение процедуры «интегрирования по частям», обобщающей равенство $-ix^{-1}(d/dk)\, e^{ikx} = e^{ikx}$, которым мы пользовались при анализе примера 6.

***Лемма 4.*** Пусть $\varphi$ — фазовая функция на $\Omega\times\mathbb{R}^s$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Тогда существуют функции $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_n$ и $c$ на $\Omega\times\mathbb{R}^s$, такие, что

(1) $a_i\in\mathrm{Sym}(\Omega, s, 0)$; $i=1, \ldots, s$;

(2) $b_j\in\mathrm{Sym}(\Omega, s, -1)$; $j=1, \ldots, n$;

(3) $c\in\mathrm{Sym}(\Omega, s, -1)$;

(4) ${}^tVe^{i\varphi} = e^{i\varphi}$,

где $V$ — дифференциальный оператор

$$V = \sum_{j=1}^{s} a_j \frac{\partial}{\partial\theta_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c,$$

а ${}^tV$ — его сопряженный

$${}^tVf = -\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial\theta_j}(a_j f) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(b_k f) + cf.$$

*Доказательство.* Поскольку $\varphi$ не имеет критических точек на $\Omega\times(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})$, функция $\eta(x, \theta)$, заданная равенством

$$\eta(x, \theta) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^2 + |\theta|^2 \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\right)^2,$$

на $\Omega\times(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})$ не обращается в нуль. Более того, в силу однородности $\varphi$ по $\theta$ порядка 1, $\eta$ — однородная функция порядка 2, т. е. $\eta(x, \lambda\theta)=\lambda^2\eta(x, \theta)$. Пусть $\chi(\theta)$ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$, тождественно равная единице вблизи $\theta=0$, и пусть

$$\tilde{a}_j=-i(1-\chi)\eta^{-1}|\theta|^2\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j},$$

$$\tilde{b}_k=-i(1-\chi)\eta^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j},$$

$$\tilde{c}=\chi.$$

Положим $U=\sum_j\tilde{a}_j\,\partial/\partial\theta_j+\sum_k\tilde{b}_k\,\partial/\partial x_k+\tilde{c}$. Тогда $Ue^{i\varphi}=-i(1-\chi)\times\times\eta^{-1}(\eta ie^{i\varphi})+\chi e^{i\varphi}=e^{i\varphi}$. Более того, $\tilde{a}_j$, $\tilde{b}_k$ — функции из $C^\infty$, однородные по $\theta$ вблизи $\theta=\infty$ (например, $\tilde{a}_j(\lambda\theta, x)=\tilde{a}_j(\theta, x)$, если $\lambda>1$, а $\theta$ больше радиуса $\operatorname{supp}\chi$). В результате производные от $\tilde{a}_j$ и $\tilde{b}_k$ однородны вблизи бесконечности как раз так, как это нужно для того, чтобы $\tilde{a}_j\in\operatorname{Sym}(\Omega, s, 0)$ и $\tilde{b}_k\in\in\operatorname{Sym}(\Omega, s, -1)$. Очевидно, $\tilde{c}\in\operatorname{Sym}(\Omega, s, -1)$. Полагая $a_j=-\tilde{a}_j$, $b_j=-\tilde{b}_j$, $c=\tilde{c}-\sum_{j=1}^{s}\partial a_j/\partial\theta_j-\sum_{k=1}^{n}\partial b_k/\partial x_k$, завершаем доказательство леммы. ∎

*Доказательство теоремы IX.47.* Пусть $a$ — асимптотический символ. Напишем $a=a_1+a_2$, где $a_1$ имеет компактный носитель, а $a_2$ — символ. Тогда $D_\varphi(a_1)$ определяется по (b) и принадлежит $C^\infty$ по лемме 2. Более того, если можно построить $D_\varphi(a_2)$, удовлетворяющую (b) и (c), то по лемме 1 она определена однозначно.

Мы утверждаем, что тем самым осталось показать, что $D_\varphi(a)$, определенная по (b), непрерывно продолжается на $\bigcup_{m>0}\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$ (в смысле (c)) и что для любого символа $a$ имеем $WF(D_\varphi(a))\subset\subset SP(\varphi)$. Действительно, если $WF(T)=\varnothing$, то $WF(T+S)\subset WF(S)$ и $WF(S)=WF(T+S-T)\subset WF(T+S)$ и поэтому из $WF(D_\varphi(a_1))=\varnothing$ следует, что $WF(D_\varphi(a))=WF(D_\varphi(a_2))\subset SP(\varphi)$.

Пусть теперь $a$ имеет компактный носитель в $\Omega\times\mathbb{R}^s$ и принадлежит $C^\infty$. Пусть $D_\varphi(a)$ — обобщенная функция, заданная $C^\infty$-функцией $\int a(x, \theta)e^{i\varphi(x,\theta)}d\theta$. Выберем $f\in\mathscr{D}_\Omega$. Тогда для любого целого $p$

$$\begin{aligned}[D_\varphi(a)](f)&=\int a(x, \theta)e^{i\varphi(x,\theta)}f(x)\,dx\,d\theta=\\&=\int[({}^tV)^pe^{i\varphi(x,\theta)}]a(x, \theta)f(x)\,dx\,d\theta=\\&=\int e^{i\varphi(x,\theta)}V^p(a(x, \theta)f(x))\,dx\,d\theta,\end{aligned}$$

так что

$$|[D_\varphi(a)](f)| \leqslant \int |V^p(a(x, \theta) f(x))|\, dx\, d\theta.$$

Теперь легко видеть, что $\langle a, f\rangle \mapsto af$ — непрерывное билинейное отображение $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m) \times C_0^\infty(\Omega) \to \mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ и что $V$ — непрерывное отображение $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m) \to \mathrm{Sym}(\Omega, s, m-1)$ (задачи 70, 71). Итак, $V^p(a(x, \theta) f(x))$ — символ порядка $m-p$ с компактным носителем и, в частности,

$$|V^p(a(x, \theta) f(x))| \leqslant |||a|||_p \|f\|_p (1+|\theta|)^{m-p}$$

для подходящих норм $|||\cdot|||_p$ и $\|\cdot\|_p$ на $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ и $C_0^\infty(K)$ ($\operatorname{supp} f \subset K \subset \Omega$; $K$ компактно). Фиксируя $p > n+m$, найдем

$$|D_\varphi(a)(f)| \leqslant C_{p,K} |||a|||_p \|f\|_p,$$

где $C_{p,K}$ — постоянная, зависящая лишь от $K$ и $p$. Итак, отображение $a \mapsto D_\varphi(a)$ из $C_0^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^s)$ в $\mathscr{D}'_\Omega$ продолжается до непрерывного отображения из $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ в $\mathscr{D}'_\Omega$.

Теперь остается только доказать, что $WF(D_\varphi(a)) \subset SP(\varphi)$ для любого $a \in \mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$. Чтобы сделать это, следует еще немного усовершенствовать нашу технику.

*Лемма 5.* Пусть $M$ — открытое множество в $\Omega$, а $C$ — конус в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, причем множество $M \times C$ не пересекается с $SP(\varphi)$. Тогда существуют функции $A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_n$ и $D$ на $M \times C \times (\mathbb{R}^s \setminus \{0\})$, такие, что

(a) $A_i$, $B_j$ и $D$ принадлежат $C^\infty$ на $M \times C \times (\mathbb{R}^s \setminus \{0\})$ и однородны степени $-1$ *совместно* по $\langle k, \theta\rangle$, т. е. $A_i(x, \lambda k, \lambda\theta) = \lambda^{-1} A_i(x, k, \theta)$, и т. д.

(b) ${}^tV_k \exp(i\tilde{\varphi}) = \exp(i\tilde{\varphi})$, где

$$V_k = \sum_{j=1}^{s} A_j(x, k, \theta) |\theta| \frac{\partial}{\partial\theta_j} + \sum_{l=1}^{n} B_l(x, k, \theta) \frac{\partial}{\partial x_l} + D$$

и

$$\tilde{\varphi}(x, k, \theta) = \varphi(x, \theta) - k \cdot x.$$

*Доказательство.* Пусть

$$\tilde{\eta}(x, \theta, k) = |\theta|^2 \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\right)^2 + \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} - k_l\right)^2.$$

Тогда, в силу определения $SP(\varphi)$, функция $\tilde{\eta}$ не обращается в нуль на $M\times[C\times(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})]$. Положим, по определению,

$$A_j=+i\tilde{\eta}^{-1}|\theta|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j},$$
$$B_l=+i\tilde{\eta}^{-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}-k_l\right),$$
$$C=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial(|\theta|A_j)}{\partial\theta_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial B_k}{\partial x_k}.$$

Поскольку $\tilde{\eta}$ на $M\times C\times(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})$ не обращается в нуль и однородна степени 2 по $\langle k,\theta\rangle$, завершаем доказательство так же, как в случае леммы 3. ∎

*Окончание доказательства теоремы IX.47.* Предположим, что $\langle x_0, k_0\rangle\notin SP(\varphi)$. Выберем окрестность $M\times C$ точки $\langle x_0, k_0\rangle$, как в лемме 5. Пусть $\chi$ — некоторая $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-функция с носителем в $M$, тождественно равная единице вблизи $x_0$. Для каждой пары целых положительных $m$, $n$ найдем непрерывную норму $|||\cdot|||_{(m,n)}$ на $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$, такую, что

$$|\widehat{\chi D_\varphi(a)}(k)|\leqslant|||a|||_{(m,n)}(1+|k|)^{-n}\quad\text{для всех } k\in C \qquad \text{(IX.64)}$$

при любом $a\in C_0^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^s)$. По уже доказанной непрерывности, (IX.64) продолжается на все $a\in\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$, и тем самым доказано, что $\langle x_0, k_0\rangle\notin WF(D_\varphi(a))$. Выберем функцию $\psi(\theta)$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$, тождественно равную единице при $|\theta|<1$ и тождественно равную нулю при $|\theta|>2$. Представим $a$ как $a=\psi a+(1-\psi)a$. По лемме 2, $\widehat{\chi D_\varphi(\psi a)}(k)$ удовлетворяет оценке вида (IX.64). При $k\in C$ имеем

$$|\widehat{\chi D_\varphi((1-\psi)a)}(k)|=$$
$$=\left|\int\exp(i\tilde{\varphi}(x,k,\theta))\chi(x)(1-\psi(\theta))a(x,\theta)\,dx\,d\theta\right|=$$
$$=\left|\int\exp(i\tilde{\varphi}(x,k,\theta))V_k^p[\chi(x)a(x,\theta)(1-\psi(\theta))]\,dx\,d\theta\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\left|V_k^p[\chi a(1-\psi)]\right|dx\,d\theta. \qquad \text{(IX.65)}$$

На основании свойств однородности $A$, $B$, $D$ по $\langle k,\theta\rangle$ можно утверждать, что $|V_k^p[\chi a(1-\psi)]|\leqslant|||a|||(|k|+|\theta|)^{-p}(1+|\theta|)^m$, где $|||\cdot|||$ — норма на $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$. Поскольку $1-\psi$ обращается в нуль при $|\theta|<1$ для всех $\theta$ в интеграле (IX.65), справедливы неравенства

$$(|k|+|\theta|)^{-1}\leqslant(|k|+1)^{-1},$$
$$(|k|+|\theta|)^{-1}\leqslant(|\theta|)^{-1}\leqslant(1/2+1/2|\theta|)^{-1},$$

а тогда получаем (IX.64), выбирая достаточно большое $p$ и учитывая, что множитель $\chi$ делает интегрирование в (IX.65) конечным. ▮

На протяжении этой главы были развиты различные методы применения преобразования Фурье к анализу функций или распределений. Теперь эти методы можно применить к анализу распределения $\Delta_+(x;\ m^2)$.

***Теорема IX.48.*** Двухточечная функция $\Delta_+(x;\ m^2)$ свободного поля обладает следующими свойствами:

(a) $\Delta_+$ лоренц-инвариантна.

(b) $WF(\Delta_+) = \{\langle 0,\ 0,\ -|\theta|,\ \theta\rangle \mid \theta \in \mathbb{R}^3\} \cup$
$$\cup \{\langle \pm|\mathbf{x}|,\ \mathbf{x},\ -\lambda|\mathbf{x}|,\ \mp\lambda\mathbf{x}\rangle \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \lambda > 0\}.$$

(c) Существуют такие $C^\infty$-функции $f_s$, $f_t^+$ и $f_t^-$ на $(0, \infty)$, что
$$\Delta_+(x;\ m^2) = \begin{cases} f_s(x^2;\ m^2), & \text{если } x^2 < 0, \\ f_t^+(x^2;\ m^2), & \text{если } x^2 > 0,\ x_0 > 0, \\ f_t^-(x^2;\ m^2), & \text{если } x^2 > 0,\ x_0 < 0, \end{cases}$$
где $x^2 = x \cdot \tilde{x} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

(d) При $y > 1$ имеем $f_s(y^2) \leqslant C_\varepsilon \exp(-(m-\varepsilon)\, y)$.

(e) $\lim\limits_{y\to\infty} |y|^{2n} f_t^\pm(y) = 0$.

(f) $f_t^+(y) = \overline{f_t^-(y)}$.

*Доказательство.* (a) следует из того факта, что $\Delta_+$ — фурье-образ лоренц-инвариантной меры. Для доказательства (b) отметим, что в силу нашего анализа примера 7 и теоремы IX.47 множество $WF(\Delta_+)$ содержится в $S_0 \cup S_+ \cup S_-$, где $S_0 = \{\langle 0, 0, -|\theta|, \theta\rangle \mid \theta \in \mathbb{R}^3\}$, $S_\pm = \{\langle \pm|\mathbf{x}|,\ \mathbf{x},\ -\lambda|\mathbf{x}|,\ \mp\lambda\mathbf{x}\rangle \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \mathbf{x} \neq 0,\ \lambda > 0\}$. Более того, в силу лоренц-инвариантности $\Delta_+$, лоренц-инвариантным должно быть и $WF(\Delta_+)$, а это означает, что $S_+$ либо содержится в $WF(\Delta_+)$, либо не пересекается с ним. Если бы $S_+$ не пересекалось с $WF(\Delta_+)$, то обобщенная функция $\Delta_+$ равнялась бы некоторой функции из $C^\infty$ на $\{\langle t,\ \mathbf{x}\rangle \mid t > 0\}$. Поскольку мы увидим, что $\Delta_+(t_0,\ \mathbf{x})$ и ее производные экспоненциально убывают при $\mathbf{x} \to \infty$ и при фиксированном $t_0$, из предыдущего следовало бы, что при $t_0 > 0$ функция $\Delta_+(t_0,\ \cdot)$ принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Но ее фурье-образ не лежит даже в $L^1$, поэтому множество $S_+$ не может не пересекаться с $WF(\Delta_+)$. В силу (f), раз известно, что $S_+ \subset WF(\Delta_+)$, можно заключить, что $S_- \subset WF(\Delta_+)$. Наконец, поскольку $WF(\Delta_+)$ замкнуто и $S_0 \subset \overline{S}_+$, имеем $S_0 \subset WF(\Delta_+)$. Из (b) следует, что сингулярный носитель $\Delta_+$ есть $\{x \mid x^2 = 0\}$, значит, $\Delta_+$ принадлежит

$C^\infty$ в рассматриваемых областях и лоренц-инвариантна. Это доказывает (c).

Для доказательства (d) рассмотрим обобщенную функцию на $\mathbb{R}^3$, фурье-образ которой есть $(k^2+m^2)^{-1/2}$. В соответствии с идеями теоремы Пэли—Винера (задача 76) и фактом аналитичности $(k^2+m^2)^{-1/2}$ в трубе, эта обобщенная функция падает экспоненциально с любым показателем $a<m-\varepsilon$. Поскольку $\Delta_+(0, x)$ — как раз такая обобщенная функция (с точностью до константы), доказано (d).

Для доказательства (e) отметим, что формально

$$f_t^\dagger(x^2;\ m^2)=\frac{i}{2(2\pi)^3}\int \exp\left(-i\,|x|\sqrt{m^2+k^2}\right)d^3k/\sqrt{k^2+m^2}.$$

Проводя анализ точно так же, как в примере 6, видим, что функция $|x|^{2n} f_t^\dagger(x^2;\ m^2)$ ограничена, коль скоро $n\geqslant 2$ (задача 72).

Наконец, в силу вещественности $\hat{\Delta}_+$ имеем $\Delta_+(-x)=\overline{\Delta_+(x)}$, что доказывает (f). ∎

***Следствие.*** Произведение $\theta(x_0)\,\Delta_+(x;\ m^2)$, где $\theta(x_0)$ определено формулой $\theta(f)=\int\limits_{x_0\geqslant 0} f(x)\,d^4x$, существует.

*Доказательство.* $WF(\theta)=\{\langle 0,\ \mathbf{x},\ \pm\lambda,\ 0\rangle\,|\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\ \lambda\in\mathbb{R}_+\}$, так что $WF(\theta)\oplus WF(\Delta_+)$ не содержит ни одного вектора вида $\langle x,\ 0\rangle$. Следовательно, по теореме IX.45 произведение существует. ∎

## ЗАМЕЧАНИЯ

§ *IX.1.* Вывод формулы обращения, который дал сам Ж. Фурье, содержится в его классической работе La Théorie Analytique de Chaleur, Didot, Paris, 1822. Хотя по современным стандартам его рассуждения нельзя рассматривать как «строгое доказательство», они содержат все основные моменты приведенного нами доказательства. Идея определения преобразования Фурье сначала на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, а затем его сужение на классические пространства предложена Л. Шварцем и описана в его монографии Théorie des Distributions, v. II, Hermann, Paris, 1954. Ясно написанная книга Шварца представляет собой основной источник для изучения преобразования Фурье на пространствах обобщенных функций и теории сверток обобщенных функций.

Разложение Эрмита, обсуждавшееся в дополнении к § V.3, можно применить к построению более коротких доказательств формулы обращения Фурье и теорем Планшереля, так как $\hat{\phi}_n(k)=(-i)^n\,\phi_n(k)$.

§ *IX.2.* Лемма Римана—Лебега была доказана первоначально Риманом только для узкого класса функций в работе: B. Riemann, Ueber der Darstellbarkeit einer Funktion durch einen trigonometrische Reihe, Math. Werke, Teubner, 1876, S. 213—253 (см. русский перевод: Б. Риман, Сочинения, Гостехтеориздат, М.—Л., 1948, стр. 225—261); а позже Лебегом уже для всего множества $L^1$: H. Lebesgue, Sur les Séries Trigonométriques, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 20 (1903), 453—485. Теорема Планшереля опубликована в работе: M. Plancherel, Contribution à l'étude de la représentation d'un fonction arbitraire par des intégrales définies, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 30 (1910), 289—335.