УКАЗАНИЯ ЧИТАТЕЛЮ

Глава IX, по существу, замкнута, и для ее чтения требуются минимальные предварительные знания. Читатель должен знать свойства интеграла Лебега, элементарные понятия из теории гильбертовых и банаховых пространств, определения и основные свойства пространства Шварца быстро убывающих функций и его сопряженного — пространства обобщенных функций умеренного роста. Этот материал содержится в главах I—III и § V.1—V.3 первого тома, так же как и во многих других руководствах по функциональному анализу. Эпизодические ссылки на теоремы первого тома обычно носят описательный характер, так что читатель, знакомый с другими учебниками, легко может понять, о чем идет речь.

Ниже мы дадим описание материала от раздела к разделу. А сейчас скажем кратко о содержании главы в целом. Наиболее важный материал содержится в § 1, 2 и первой части § 3. Читателю, которого интересует главным образом квантовая механика, следует ознакомиться в особенности с § 1, 2, первой частью § 3 и § 4, 7, частично с § 9 и дополнением к § 4. Читателю, которого интересует квантовая теория поля, следует познакомиться с § 1, 2, 3, 8. По поводу дифференциальных уравнений следует читать § 1, 2, первую часть § 3, § 4, 5, 6 и 10.

Основные свойства преобразования Фурье даны в § 1, 2, 4 и первой части § 3. В § 1 определено преобразование Фурье на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, которое затем продолжено на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ путем перехода к сопряженному отображению. Доказана теорема обращения Фурье, определена операция свертки и исследованы ее свойства. В § 2 изучается область значений преобразования Фурье, задаваемого на классических пространствах, и доказываются теоремы Планшереля, Хаусдорфа—Юнга и Бохнера. В первой части § 3 доказаны теоремы Пэли—Винера, характеризующие фурье-образы функций класса C^∞ и распределений с компактными носителями. Во второй части § 3 доказана более трудная теорема, характеризующая фурье-образы обобщенных функций умеренного роста в $\mathbb{R}^4$ с носителями в конусах. При первом чтении эту часть можно пропустить, если только читатель не интересуется аксиомами Вайтмана (§ 8). Наконец, в § 4 приведены различные L^p-оценки, связывающие преобразования Фурье и свертки. Читателю следует знать, как используются интерполяционные теоремы, приводимые в дополнении, поскольку они составляют основной инструмент доказательства оценок. Идея интерполирования красива, но доказательства интерполяционных теорем громоздки, поэтому доказательства в дополнении следует при первом чтении опустить.

В остальных разделах 5—10 речь идет о более современном материале и приложениях. Разделы 5 и 6 содержат применения преобразования Фурье в теории дифференциальных уравнений в частных производных. В § 5 доказано существование фундаментальных решений уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. В § 6 исследуются пространства Соболева и доказывается, что каждое слабое решение уравнения $\Delta u = f$ на самом деле является классическим решением (лемма Вейля).

В § 7 с помощью преобразования Фурье выводятся свойства свободного квантовомеханического гамильтониана $H_0 = -\Delta$, его резольвенты $(H_0+\varkappa^2)^{-1}$ и группы $\exp(-itH_0)$, им порождаемой.

В § 8 приводятся и обсуждаются аксиомы Гординга — Вайтмана квантовой теории эрмитова скалярного поля. Никакого предварительного знакомства с квантовой теорией поля для чтения этого раздела не требуется. Мы показываем, как можно использовать преобразование Фурье для определения свойств аналитического продолжения функций Вайтмана и для доказательства PCT-теоремы. Дополнение технического характера посвящено выводу явного представления для полиномиально ограниченной лоренц-инвариантной меры с носителем в замкнутом переднем световом конусе.

В § 9 рассматривается вопрос о том, какие L^2-функции на $\mathbb{R}^n$ допускают естественное сужение на подмногообразия меньшей размерности. Этот материал не будет использоваться вплоть до исследования спектра квантовомеханических гамильтонианов в гл. XIII. При первом чтении следует разобраться в утверждении теоремы IX.41 и общей идее доказательства, опустив кровопролитные детали.

Раздел 10 задуман как введение в теорию волновых фронтов и осцилляторных интегралов—двух важных инструментов изучения уравнений в частных производных с непостоянными коэффициентами. Эту теорию можно использовать для того, чтобы сформулировать условия, при которых определено произведение двух обобщенных функций. В томах 2 и 3 материал § 10 не используется.