C^∞ в рассматриваемых областях и лоренц-инвариантна. Это доказывает (c).

Для доказательства (d) рассмотрим обобщенную функцию на $\mathbb{R}^3$, фурье-образ которой есть $(k^2+m^2)^{-1/2}$. В соответствии с идеями теоремы Пэли — Винера (задача 76) и фактом аналитичности $(k^2+m^2)^{-1/2}$ в трубе, эта обобщенная функция падает экспоненциально с любым показателем $a<m-\varepsilon$. Поскольку $\Delta_+(0, x)$ — как раз такая обобщенная функция (с точностью до константы), доказано (d).

Для доказательства (e) отметим, что формально

$$f_t^\dagger(x^2;\ m^2)=\frac{i}{2(2\pi)^3}\int \exp\left(-i\,|x|\sqrt{m^2+k^2}\right)d^3k/\sqrt{k^2+m^2}.$$

Проводя анализ точно так же, как в примере 6, видим, что функция $|x|^{2n} f_t^\dagger(x^2;\ m^2)$ ограничена, коль скоро $n\geqslant 2$ (задача 72).

Наконец, в силу вещественности $\hat{\Delta}_+$ имеем $\Delta_+(-x)=\overline{\Delta_+(x)}$, что доказывает (f). ∎

Следствие. Произведение $\theta(x_0)\,\Delta_+(x;\ m^2)$, где $\theta(x_0)$ определено формулой $\theta(f)=\int\limits_{x_0\geqslant 0} f(x)\,d^4x$, существует.

Доказательство. $WF(\theta)=\{\langle 0, \mathbf{x}, \pm\lambda, 0\rangle \mid \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\ \lambda\in\mathbb{R}_+\}$, так что $WF(\theta)\oplus WF(\Delta_+)$ не содержит ни одного вектора вида $\langle x, 0\rangle$. Следовательно, по теореме IX.45 произведение существует. ∎

ЗАМЕЧАНИЯ

§ IX.1. Вывод формулы обращения, который дал сам Ж. Фурье, содержится в его классической работе La Théorie Analytique de Chaleur, Didot, Paris, 1822. Хотя по современным стандартам его рассуждения нельзя рассматривать как «строгое доказательство», они содержат все основные моменты приведенного нами доказательства. Идея определения преобразования Фурье сначала на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, а затем его сужение на классические пространства предложена Л. Шварцем и описана в его монографии Théorie des Distributions, v. II, Hermann, Paris, 1954. Ясно написанная книга Шварца представляет собой основной источник для изучения преобразования Фурье на пространствах обобщенных функций и теории сверток обобщенных функций.

Разложение Эрмита, обсуждавшееся в дополнении к § V.3, можно применить к построению более коротких доказательств формулы обращения Фурье и теорем Планшереля, так как $\hat{\phi}_n(k)=(-i)^n\,\phi_n(k)$.

§ IX.2. Лемма Римана — Лебега была доказана первоначально Риманом только для узкого класса функций в работе: B. Riemann, Ueber der Darstellbarkeit einer Funktion durch einen trigonometrische Reihe, Math. Werke, Teubner, 1876, S. 213—253 (см. русский перевод: Б. Риман, Сочинения, Гостехтеориздат, М.— Л., 1948, стр. 225—261), а позже Лебегом уже для всего множества L^1: H. Lebesgue, Sur les Séries Trigonométriques, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 20 (1903), 453—485. Теорема Планшереля опубликована в работе: M. Plancherel, Contribution à l'étude de la représentation d'un fonction arbitraire par des intégrales définies, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 30 (1910), 289—335.

Теорема Хаусдорфа — Юнга была первоначально доказана в работе: W. Young, Sur la généralisation du théorème de Parseval, *C. R. Acad. Sci. Paris*, *Sér. A — B*, **155** (1912), 30—33, и обобщена в работе: F. Hausdorff, Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen, *Math. Z.*, **16** (1923), 163—169.

Бохнер опубликовал доказательство своей теоремы в книге: S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akademie-Verlag, Berlin, 1932 (см. русский перевод: С. Бохнер, Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, М., 1962). Для обобщенных функций она доказана в книге Шварца. Приведенное нами доказательство теоремы Бохнера опирается на теорему Стоуна. Обратно, теорему Стоуна можно вывести из теоремы Бохнера (см. E. Hopf, Ergodentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1937, или Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954).

В каком-то смысле наиболее «естественно» L^p-теория преобразования Фурье формулируется на произвольной локально компактной абелевой группе; см. главы XIV и XV.

§ *IX.3*. На тесную связь между свойствами носителя функции и свойствами аналитичности ее фурье-образа впервые указали Р. Пэли и Н. Винер в книге: R. Paley, N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Colloqium Publication, Providence, R. I., 1934 (см. русский перевод: Н. Винер и Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, «Наука», М., 1964). В их книге рассматривались функции из L^2 и граничные значения в смысле L^2 (см. ниже). Тем не менее всевозможные теоремы, связывающие свойства носителя со свойствами преобразования Фурье, обычно называют теоремами Пэли — Винера. Связь между аналитичностью и свойствами преобразования Фурье далее исследовалась Титчмаршем: Е. К. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.— Л., 1948.

Обобщение на случай распределений с компактным носителем впервые было дано Л. Шварцем в статье Transformation de Laplace des distributions, Comm. Sém. Math. Lund, tome suppl. dédié à M. Riesz (1952). Более подробно связь между носителем и аналитичностью для функций, сосредоточенных на компактных выпуклых уравновешенных множествах, устанавливается в задаче 22.

Дальнейшее рассмотрение понятия оболочки голоморфности см. в следующих книгах: С. Бохнер, У. Т. Мартин, Функции многих комплексных переменных, ИЛ, М., 1951; Р. Ганнинг, Х. Росси, Аналитические функции многих комплексных переменных, «Мир», М., 1969; L. Nachbin, Holomorphic Functions, Domains of Holomorphy and Local Properties, North Holland, 1970; Л. Хёрмандер, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, «Мир», М., 1968. По поводу приложений к квантовой теории поля см. указанные в Замечаниях к § IX.8 лекции Эпштейна и работу Вайтмана в *J. Indian Math. Soc.*

Теорема Бохнера о трубе содержится в работе: S. Bochner, A Theorem on analytic continuation of functions in several variables, *Ann. Math.*, **39** (1938), 14—19. Связь между теоремами о трубе и теоремой Пэли — Винера была отмечена И. Стейном и его сотрудниками, см. И. М. Стейн, Г. Вейс, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, «Мир», М., 1974. В частности, теорема для вырожденного случая была доказана на основе этих идей в статье: R. A. Kunze, E. M. Stein, Uniformly Bounded Representations, II, *Am. J. Math.*, **83** (1967), 723—786 (см. лемму 21). Независимо Мальгранж и Цернер доказали этот же результат, применяя более классические методы; см. лекции Эпштейна.

Идея рассматривать фурье-образы распределений более общего вида как граничные значения аналитических функций также восходит к Шварцу, который доказал, что если обобщенная функция $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет носитель в конусе Γ, то функция $F(\lambda - i\eta t) = \widehat{e^{-i\eta \cdot x} T}$ обладает полиномиальным ростом в смысле оценок (i) и (ii) при $t \longrightarrow \infty$ и $t \longrightarrow 0$. Для доказательства такого ослабленного варианта одной половины теоремы IX.16 нет нужды применять лемму Броса — Эпштейна — Глазера. Если $a \in \Gamma$, выбирается такая C^∞-функция φ, что $\operatorname{supp} \varphi \in \Gamma - a$ и $\varphi(x) = 1$ при $x \in \overline{\Gamma}$. Тогда функция $F(\lambda - it\eta) = \widehat{e^{-t\eta\cdot x}\varphi(x)T}$ аналитична в $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*$, удовлетворяет ограничениям на рост и имеет $\hat{T}$ в качестве граничного значения. Однако для получения оценки (IX.13), обеспечивающей полиномиальный рост около всей границы множества $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*$, уже необходима лемма Броса — Эпштейна — Глазера, доказанная в работе: J. Bros, H. Epstein, V. Glaser, On the connection between analyticity and Lorentz covariance of Wightman functions, *Comm. Math. Phys.*, **6** (1967), 77—100. Приведенное доказательство второй половины теоремы IX.16 принадлежит Л. Гордингу (не опубликовано). Его доказательство основано на идеях Кёте и Тильмана, которые поняли, что необходимым условием для того, чтобы аналитическая функция имела в качестве граничного значения на гладкой границе обобщенную функцию, является полиномиальный рост (см. G. Köthe, Die Randverteilungen Analytischer Funktionen, *Math. Z.*, **57** (1952), 13—33, и H.-G. Tillman, Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen, *Math. Z.*, **59** (1953), 61—83. Отметим, что теорема IX.16 сформулирована и доказана нами для симметричного относительно вращений конуса $\Gamma_{a,\theta}$, но то же доказательство можно провести для произвольного выпуклого конуса (задача 23). Тогда сопряженный конус Γ^* определяется формулой $\Gamma^* = \{\eta \mid \eta\cdot x \geqslant 0$ при всех $x \in \Gamma\}$.

Существует другая формулировка теорем типа Пэли — Винера в терминах функций из L^2. Предположим, что $f \in L^2(0, \infty)$. Тогда функция $F(\lambda - i\eta) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty e^{-i\lambda x} e^{-\eta x} f(x)\,dx$ удовлетворяет таким условиям:

(i) F аналитична в открытой нижней полуплоскости,

(ii) $\sup\limits_{\eta > 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda - i\eta)|^2 d\lambda \right\} < \infty$

и

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda - i\eta) - \hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda \longrightarrow 0$ при $\eta \longrightarrow 0$

по теореме Лебега о мажорированной сходимости. Это означает, что $F(\lambda - i\eta)$ принимает граничное значение $\hat{f}(\lambda)$ в смысле L^2. Аналитические функции в открытой нижней полуплоскости, удовлетворяющие условиям (i), (ii), и (iii), называют функциями класса Харди — Лебега $\mathscr{H}^2(\mathbb{R})$. В цитированной выше книге Винера и Пэли доказано обратное утверждение, а именно, если $F(\lambda - i\eta)$ принадлежит классу Харди — Лебега, то существует такая функция $f \in L^2(0, \infty)$, что $F(\lambda - i\eta) = \widehat{e^{-\eta x} f}$ и $F(\lambda - i\eta) \xrightarrow{L^2} \hat{f}(\lambda)$ при $\eta \downarrow 0$. Другая теорема такого типа утверждает, что $\widehat{e^{-\eta x} f(x)}$ тогда и только тогда принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ при всех $\eta \in (\alpha, \beta)$, где (α, β) — открытый интервал, содержащий нуль, когда $\hat{f}(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение $\hat{f}(\lambda - i\eta)$ в полосу $\alpha < \eta < \beta$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda - i\eta)|^2 d\lambda < \infty$ для каждого $\eta \in (\alpha, \beta)$. Читатель без труда обобщит эти теоремы на случай многих переменных.

По теореме IX.13 фурье-образ функции f, убывающей быстрее любой экспоненты,— целая функция. О связях между типом аналитической функции и скоростью убывания см. L. Ehrenpreis, Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley (Interscience), New York, 1970.

§ IX.4. L^p-оценки вызывали интерес уже на ранней стадии развития функционального анализа. Неравенство Юнга было доказано в работе: W. Young, The determination of the summability of a function, *Proc. London Math. Soc.*, **12** (1913), 71—78. Неравенство Харди — Литтлвуда появилось в статье: G. Hardy, J. Littlewood, Some properties of fractional integrals, I, *Math. Z.*, **27** (1928), 565—608. Ранее подобное неравенство для пространств последовательностей было опубликовано в статье: G. Hardy, J. Littlewood, G. Pólya, The maximum of a certain bilinear form, *Proc. London Math. Soc.*, **25** (1926), 265—268. Их работа, в основном, является обобщением работы Гильберта по билинейным формам $\sum\limits_{m,n} a_n b_m/(n+m)$, см. H. Weyl, Singulare Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems, Inaugural Dissertation, Göttingen, 1908. С. Л. Соболев доказал сведением к случаю $n=1$ обобщение этого неравенства в статье: Об одной теореме функционального анализа, *Матем. сб.*, **4 (46)** (1938), 471—497. Сильное упрощение доказательства содержится в работе: N. du Plessis, Some theorems about the Riesz fractional integral, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80** (1955), 124—134.

Теорема Хаусдорфа — Юнга утверждает следующее: если $p^{-1}+q^{-1}=1$ и $1\leqslant p\leqslant 2$, то норма преобразования Фурье из L^p в L^q не превосходит $(2\pi)^{n(1/2-1/p)}$. Недавно Бекнер (см. W. Beckner, Inequalities in Fourier Analysis, *Ann. Math.*, **102** (1975), 159—182) доказал, что эта норма на самом деле равна

$$C(p, q)=\left[\left(\frac{p}{2\pi}\right)^{1/p}\Big/\left(\frac{q}{2\pi}\right)^{1/q}\right]^{n/2}.$$

То, что норма не может быть меньше этой величины, видно из равенства $\|\hat{f}\|_q=C(p, q)\|f\|_p$, где $f=e^{-x^2/2}$.

Теорема Рисса — Торина была первоначально доказана М. Риссом (M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires, *Acta Math.*, **49** (1926), 465—497). Идея применения методов комплексных переменных принадлежит К. Торину (С. Thorin, Convexity Theorems, *Comm. Sém. Math. Lund*, **9** (1948)). Идея распространения теоремы Рисса — Торина на аналитические семейства принадлежит И. Стейну (см. E. Stein, Interpolation of Linear Operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 482—492).

Прежде чем были формально определены слабые L^p-пространства, были доказаны неравенства, которые теперь мы могли бы описать, сказав, что некоторое отображение из L^p в слабое L^p ограничено. Понятие «слабое L^p-пространство» оказалось, таким образом, естественной абстракцией. Эти неравенства появились впервые в связи с L^1 в работе: G. Hardy, J. Littlewood, A maximal theorem with function theoretic applications, *Acta Math.*, **54** (1930), 81—116, а затем для L^p — в указанной ниже статье Марцинкевича.

Теорема Марцинкевича была анонсирована в статье: J. Marcinkiewicz, Sur l'interpolation d'opérateurs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **208** (1939), 1272—1273, а во всей полноте доказана А. Зигмундом (A. Zygmund, On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operators, *J. Math.*, **35** (1956), 223—248). Теорема Ханта появилась в работе: R. Hunt, An extension of the Marcinkiewicz theorem to $L(p, q)$ spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 803—807.

Пространства $L(p, q)$ — обобщение слабых L^p-пространств. Они были введены Г. Лоренцем в статье: G. Lorentz, On some new functional spaces, *Ann. Math.*, **51** (1950), 37—55. Предположим, что $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой.

Для каждой измеримой функции f на M можно определить измеримую функцию на $\mathbb{R}$ равенством

$$f^*(x) = \inf\{y > 0 \mid \lambda_f(y) \leqslant x\},$$

где $\lambda_f(y) = \mu\{x \mid |f(x)| > y\}$ — распределение функции f. Введем $L(p, q)$ как множество таких функций на M, что $\|f\|^*_{p,q} < \infty$. Здесь

$$\|f\|^*_{p,q} = \begin{cases} \left(\dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^q \dfrac{dt}{t}\right)^{1/q}, & 1 < p < \infty,\ 1 < q < \infty, \\ \sup\limits_{t>0}\{t^{1/p} f^*(t)\}, & 1 < p \leqslant \infty,\ q = \infty. \end{cases}$$

Итак, $L^p = L(p, p)$ и $L^p_w = L(p, \infty)$. На самом деле можно показать, что если $1 < q_1 \leqslant p \leqslant q_2 \leqslant \infty$, то

$$L(p, q_1) \subset L^p \subset L(p, q_2) \subset L^p_w.$$

Обсуждение этих пространств и связанных с ними интерполяционных теорем см. в статье: R. Hunt, On $L(p, q)$ spaces, *Enseignement Math.*, **12** (1966), 247—276. Вполне доступное обсуждение интерполяционных теорем (в частности, доказательство теоремы Марцинкевича) можно найти в книге И. М. Стейна и Г. Вейса, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, «Мир», М., 1974.

Абстрактная теория интерполяции, изложенная в дополнении к § IX.4, принадлежит Кальдерону: A. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math.*, **24** (1964), 113—190, и Лионсу: J. Lions, Théorèmes de traces et d'interpolation I, II, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **13** (1959), 389—403; **15** (1960), 317—331; III: *J. Math. Pures Appl.*, **42** (1963), 195—203. Существуют и другие методы абстрактной интерполяции. Описание этих и родственных вопросов см. в обзорной статье С. Г. Крейна и Ю. И. Петунина, Шкалы банаховых пространств, *УМН*, **21**, вып. 2 (1966), 89—168.

Теорема Адамара о трех прямых — это не что иное, как одна из большой группы теорем, называемых теоремами Фрагмена — Линделёфа, которые по существу являются обобщениями принципа максимума на различные неограниченные области. Оригинальные работы таковы: E. Phragmén, Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions, *Acta Math.*, **28** (1904), 351—368, и E. Lindelöf, E. Phragmén, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulièr, *Acta Math.*, **31** (1908), 381—406. В ограниченном случае теорема о трех прямых была анонсирована в заметке Адамара: J. Hadamard, Sur les fonctions entières, *Bull. Soc. Math. France*, **24** (1896), 186—187.

Материал, обсуждаемый в примере 2 дополнения,— частный случай некоммутативной теории интегрирования. В общем случае желательно определить аналоги L^p-пространств для произвольной алгебры фон Неймана (в нашем случае эта алгебра есть $\mathscr{L}(\mathscr{H})$). Основная литература по этой теории: J. Dixmier, Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, *Bull. Soc. Math. France*, **81** (1953), 9—39; I. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, *Ann. Math.*, **57** (1953), 401—457, исправление: ibid. **58** (1953), 595—596, и R. Kunze, $\mathscr{L}_p$ Fourier transforms on locally compact unimodular groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **89** (1958), 519—540. Некоторые из приведенных нами доказательств следуют идеям и предложениям Э. Нельсона (E. Nelson, Notes on noncommutative integration, *J. Functional Analysis*, **15** (1974), 103—116).

§ IX.5. Теорема Мальгранжа — Эренпрейса была независимо доказана Б. Мальгранжем (B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des equations de convolution, *Ann. Inst. Fourier*

(Grenoble), **6** (1955—56), 271—355) и Л. Эренпрейсом (L. Ehrenpreis, Solution of some problems of division, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 883—903). Фундаментальные решения в течение долгого времени были стандартным техническим приемом в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных задач для эллиптических уравнений. В качестве введения в эти методы см. соответствующий раздел монографии Р. Куранта и Д. Гильберта, Методы математической физики, т. 1, Гостехтеориздат, М.—Л., 1951, стр. 297 и далее. Более современный подход читатель найдет, обратившись к четырем книгам: Стакгольда, Фридмана, Агмона и Хёрмандера, на которые мы ссылались в замечаниях к § V.4.

Теорема Мальгранжа—Эренпрейса показывает, что уравнение $P(D)f=\delta$ имеет решение в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Возникает естественный вопрос: существует ли решение, принадлежащее $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$? Утвердительный ответ на этот вопрос дал Л. Хёрмандер, доказавший более сильное утверждение: $P(D)[\mathscr{S}']=\mathscr{S}'$ (см. L. Hörmander, On the division of generalized functions by polynomials, *Ark. Mat.*, **3** (1958), 555—568). Общее рассмотрение областей значений дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, заданных на различных пространствах обобщенных функций, см. в работе М. С. Аграновича, Об уравнениях в частных производных с постоянными коэффициентами, *УМН*, **16**, вып. 2 (1961), 27—93.

§ IX.6. Лемма Вейля содержится в работе: H. Weyl, The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.*, **1** (1940), 414—444. Лемма и пространства Соболева введены в статье: С. Соболев, Об одной теореме функционального анализа, *Матем. сб.*, **4** (46) (1938), 471—497, и книге: С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, Л., 1950.

Лемма Вейля имеет много обобщений. Рассмотрим два из них. Пусть Ω — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть $C_{\alpha\beta}(x)$, $0\leqslant|\alpha|$, $|\beta|\leqslant m$,— набор m раз непрерывно дифференцируемых функций. Дифференциальный оператор $A=\sum\limits_{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}C_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}$ называется **сильно эллиптическим**, если

$$\operatorname{Re}\Big\{\sum_{|\alpha|,\,|\beta|=m}C_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha}\xi^{\beta}\Big\}\geqslant C_0|\xi|^{2m},\qquad C_0>0,$$

для всех $x\in\Omega$ и всех вещественных векторов $\xi\in\mathbb{R}^n$. Следующая теорема принадлежит К. О. Фридрихсу (K. O. Friedrichs, Differentiability of solutions of elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, **1** (1953), 55—72).

Теорема. Пусть φ—слабое решение уравнения $A\varphi=f$. Если $f\in W_k(\Omega)$, то $\varphi\in W_{k+2m}(\Omega)$.

Л. Хёрмандер ввел следующее определение (см. L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators, *Acta Math.*, 94 (1955), 161—248). Дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $P(D)=P(i^{-1}\partial/\partial x_1,\ldots$ $\ldots,i^{-1}\partial/\partial x_n)$ на Ω (открытом, но не обязательно ограниченном) называется **гипоэллиптическим**, если для всякой $f\in C^\infty(\Omega)$ каждое решение φ уравнения $P(D)\varphi=f$ в смысле обобщенных функций, локально принадлежащее L^2 в Ω, лежит в $C^\infty(\Omega)$. Далее, Хёрмандер доказал, что справедлива такая

Теорема. Оператор $P(D)$ гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда для каждой большой константы M_1 существует такая положительная константа M_2, что каждый нуль $\zeta=\xi+i\eta$ полинома $P(\zeta)$, удовлетворяющий неравенству $|\eta|\leqslant M_2$, удовлетворяет также и неравенству $|\zeta|\leqslant M_1$.

Читатель легко проверит, что оператор Δ гипоэллиптичен, а $\partial^2/\partial x^2-\partial^2/\partial t^2$— нет. Эта теорема допускает различные обобщения на операторы с переменными коэффициентами (см. L. Hörmander, On the interior regularity of the solutions of partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **9** (1958), 197—218; B. Malgrange, Sur une classe d'opérateurs différentielles hypoelliptiques, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 283—306; J. Peetre, A proof of the hypoellipticity of formally hypoelliptic differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1961), 737—747).

Лемма Соболева (а потому и вытекающая из нее теорема регулярности) может быть обобщена на различные L^p-пространства. Мы говорим, что функция f лежит в $L^p_k(\mathbb{R}^n)$, если все ее частные производные порядка меньшего или равного k принадлежат $L^p(\mathbb{R}^n)$. Лемму Соболева обобщает такая

Теорема. Предположим, что k — положительное целое и $q^{-1}=p^{-1}-k/n$.

(a) Если $q<\infty$ (т. е. $p<n/k$), то $L^p_k(\mathbb{R}^n)\subset L^q(\mathbb{R}^n)$ и естественное вложение непрерывно.

(b) Если $q=\infty$ (т. е. $p=n/k$), то сужение любой функции $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ на компактное подмножество $\mathbb{R}^n$ принадлежит $L^r(\mathbb{R}^n)$ при каждом $r<\infty$.

(c) Если $p>n/k$, то каждую функцию $f\in L^p_k(\mathbb{R}^n)$ можно так подправить на множестве нулевой меры, что полученная функция станет непрерывной.

Доказательство этой теоремы и другие родственные результаты можно найти в книге И. Стейна, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, «Мир», М., 1973.

Рассмотренные нами неравенства Соболева ограничивают L^q-норму функции ее L^p-нормой и L^p-нормами некоторых ее производных. В некоторых частных случаях L^q-норму функции можно ограничить только L^p-нормами производных, если функция мала на бесконечности. Например, в § X.13 мы докажем и будем применять оценку

$$\|f\|_6\leqslant C\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_2$$

для функций на $\mathbb{R}^3$.

Часть (a) предыдущей теоремы тесно связана с неравенством Соболева из § IX.4 (см. (IX.19)). Например, пусть $k=2$, $n\geqslant 3$, и пусть $\lambda=(n-2)$. Тогда для любой функции $h\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ при подходящей константе c_n выполняется равенство $c_n\int|x-y|^{-\lambda}(\Delta h(y))\,dy=h(x)$. Это следует из теоремы IX.29 и того факта, что $d_n|x|^{-\lambda}$ — фурье-образ функции k^{-2} (задача 50(a)). Итак, из (IX.19) следует, что $\|h\|_q\leqslant d(p,q,n)\|\Delta h\|_p$, где $(1-q^{-1})+p^{-1}+\lambda n^{-1}=2$, т. е. $q^{-1}=p^{-1}-2n^{-1}$.

§ *IX.7*. Большая часть этого раздела — общеизвестные факты. Теорема IX.31 принадлежит Долларду (J. Dollard, Asymptotic Convergence and the Coulomb Interaction, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 729—738).

§ *IX.8*. Аксиомы Гординга — Вайтмана были сформулированы Л. Гордингом и А. С. Вайтманом еще в начале пятидесятых годов, однако авторы считали преждевременной публикацию их без нетривиальных примеров. Тем не менее предварительные варианты этих аксиом появились в различных местах, и на их основе была развита теория рассеяния Хаага — Рюэля (см. § XII.15). Эта теория в свою очередь оказалась столь красивой и физически осмысленной, что вызвала публикацию самих аксиом в работе: A. S. Wightman, L. Gårding, Fields as operator-valued distributions, *Ark. Fys.*, **28** (1964), 129—189.

Эти аксиомы рассматриваются весьма подробно вместе с их многочисленными следствиями в следующих двух книгах: Р. Стритер, А. С. Вайтман, PCT, спин и статистика и все такое, «Наука», М., 1966, и Р. Йост, Общая теория квантованных полей, «Мир», М., 1967. Эти книги содержат также много ссылок на более ранние работы по этой проблеме.

Первый вопрос, естественно возникающий по поводу вайтмановых аксиом, — вопрос об их непротиворечивости. Этот вопрос не тривиален в силу большого количества затрагиваемых аксиомами математических структур. Действительно, если коммутатор в аксиоме локальной коммутативности заменить антикоммутатором, то аксиомы становятся противоречивыми (см. ниже теорему о связи спина и статистики). В § X.7 мы продемонстрируем непротиворечивость аксиом, показав, что им удовлетворяет свободное поле Клейна — Гордона массы m. До сих пор не доказано, что существует хотя бы одна действительно интересная теоретико-полевая модель в четырехмерном пространстве-времени, включающая описание взаимодействующих частиц, которая удовлетворяет аксиомам Вайтмана. Недавно были построены модели, удовлетворяющие аналогу вайтмановых аксиом в двух измерениях; см., например, сборник Constructive Quantum Field Theory (G. Velo, A. S. Wightman, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1973[1]), и указанную там литературу или монографию Б. Саймона, Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, «Мир», М., 1976.

Поскольку мы до сих пор не обладаем большими классами математических моделей, не говоря уже о полном описании явлений физики элементарных частиц, над аксиомами было проведено множество «экспериментов». Эти эксперименты состояли в небольшом изменении аксиом, поисках эквивалентных систем аксиом или формулировке систем аксиом, основанных на некоторых фундаментальных структурах, отличных от локальной полевой структуры, лежащей в основе теории Гординга—Вайтмана.

Если мы хотим слегка изменить аксиомы, то один из кандидатов на изменение — чисто техническая аксиома, квалифицирующая пространство основных функций как $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Действительно, «в фольклоре» существует теорема, уверяющая, что класс формальных моделей, называемых неренормируемыми лагранжевыми моделями, приведет к вайтмановым функциям, не являющимся полиномиально ограниченными в трубе. Это может иметь место только в том случае, если применяется пространство основных функций, отличное от $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Джаффе предложил и исследовал целый класс других пространств основных функций, все еще позволяющих сформулировать условие микроскопической причинности (см. A. Jaffe, High energy behavior in quantum field theory, strictly localizable fields, *Phys. Rev.*, 158 (1967), 1454—1461).

Существуют два типа эквивалентных переформулировок вайтмановых аксиом. Первый принадлежит Вайтману, который выписал набор постулатов для последовательности обобщенных функций умеренного роста $\{\mathcal{W}_n \mid \mathcal{W}_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n})\}$ и доказал, что эти постулаты гарантируют, что $\mathcal{W}_n$ оказываются вайтмановыми обобщенными функциями некоторой единственной полевой теории, удовлетворяющей аксиомам Гординга — Вайтмана, и, обратно, что эти постулаты справедливы в любой вайтмановой теории поля. Эта **теорема реконструкции** появилась в его статье: A. S. Wightman, Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, *Phys. Rev.*, **101** (1956), 860—866, и обсуждается ниже в гл. XVII. Статья Вайтмана не содержала «перевода» аксиомы единственности вакуума в свойства $\mathcal{W}_n$. Это было добавлено позже благодаря работам: K. Hepp, R. Jost, D. Ruelle, O. Steinmann, Necessary conditions on Wightman functions, *Helv. Phys. Acta*, 34 (1961), 542—544, и H. Borchers, On the structure of the algebra of field observables, *Nuovo Cimento*, 24 (1962), 214—236.

Другая переформулировка вайтмановых аксиом осуществляется в терминах **функций Швингера**, которые суть сужения вайтмановых функций на такие точки в симметризованной расширенной трубе будущего (т. е. в объединении расширенной трубы будущего и ее образов при перестановке координат в x-про-

[1]) Часть статей этого сборника переведена; см. Конструктивная теория поля, «Мир», М., 1977.

странстве), у которых пространственные координаты чисто вещественны, а временные — чисто мнимы. Этот способ связан с евклидовым подходом в теории поля, который мы обсуждаем ниже, так что мы временно отложим исторический обзор его развития. Аксиомы для швингеровых функций, эквивалентные аксиомам Вайтмана, можно найти в работе: K. Osterwalder, R. Schrader, Axioms for Euclidean Green's functions, I, *Comm. Math. Phys.*, **31** (1973), 83—112; II, ibid., **42** (1975), 281—305.

Наконец, имеются такие аксиоматические схемы, в которых основные структурные элементы отличаются от локальных полей. В одной из таких схем подчеркивается роль «асимптотических полей», благодаря чему устанавливается непосредственная связь с теорией рассеяния. Эта схема аксиом принадлежит Леману, Симанзику и Циммерману (H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmerman, Zur Formulierung Quantisierter Feldtheorien, *Nuovo Cimento*, **1** (1955), 205—225; On the formulation of quantum field theories, II, *Nuovo Cimento*, **6** (1957), 319—333). К. Хепп доказал, что из теории рассеяния Хаага — Рюэля (см. § XII.15) следует, что один из вариантов ЛСЦ-аксиом справедлив в любой вайтмановой теории, к которой добавлено соответствующее предположение о массовом спектре. См. K. Hepp, On the connection between the LSZ and Wightman quantum field theory, *Comm. Math. Phys.*, **1** (1965), 95—111, а также его статью в сборнике Axiomatic Field Theory (Brandeis Summer Institute, 1965), Gordon and Breach, New York, 1966.

Другой подход к локальной квантовой аксиоматике основан на применении банаховых алгебр. Еще фон Нейман предложил применять алгебры ограниченных операторов для аксиоматизации квантовой механики и разработал именно с этой целью большую часть теории W^*-алгебр («алгебр фон Неймана»). Его работы разъяснил и расширил И. Сигал (I. Segal, Postulates for general quantum mechanics, *Ann. Math.*, **48** (1947), 930—947). В пятидесятые годы Сигал отстаивал алгебраический подход к проблемам теории поля, а в 1964 г. Р. Хааг и Д. Кастлер сформулировали систему аксиом в статье: R. Haag, D. Kastler, An algebraic approach to quantum field theory, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 848—861 (см. также H. Araki, Local quantum theory, I, в сб. Local Quantum Theory (R. Jost, ed.), Academic Press, New York, 1969). Между аксиомами Хаага — Кастлера и аксиомами Вайтмана нет прямой связи. *Если* поля в вайтмановых аксиомах самосопряжены, то из их спектральных проекторов можно построить семейство алгебр, однако по техническим причинам не очевидно, что они удовлетворяют аксиомам Хаага — Кастлера. Например, из коммутативности полей в смысле Вайтмана не обязательно следует коммутативность спектральных проекторов (см. § VIII.5). С другой стороны, не ясно, как восстановить поля из локальных алгебр Хаага — Кастлера. Тем не менее эти две системы аксиом тесно связаны, и естественно ожидать, что в разумных моделях справедливы и те, и другие. Именно так обстоит дело в двумерных моделях, построенных до сих пор. Мы обсудим алгебраический подход в теории поля в гл. XIX.

Третий подход включает в себя аналитическое продолжение рассматриваемых величин в область мнимых времен, где группа Пуанкаре заменяется евклидовой группой. На уровне теории возмущений эта идея восходит к Дайсону (F. Dyson, The S-matrix in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.*, 75 (1949), 1736—1755), а на уровне функций Вайтмана — к статьям Вайтмана (1956 г.) и Холла — Вайтмана, которые обсуждаются ниже. Именно на этом уровне продолжения функций Вайтмана действуют аксиомы Остервальдера — Шрадера. Однако имеется подход, быть может, более специальный, так как он не следует из одних только вайтмановых аксиом, в котором разыскиваются евклидовы *поля*, т. е. операторы, вакуумные средние которых суть функции Швингера. Этот подход впервые пропагандировали Швингер (J. Schwinger, On the Euclidean structure of relativistic field theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 44 (1958), 956—965) и Накано (T. Nakano, Quantum field theory in terms of Euclidean parameters, *Progr. Theoret. Phys.*, **21** (1959), 241—259). Связь этой формулировки с вероятностными идеями, такими, как формула Фейнмана — Каца из § X.10, и с классической статистической механикой впервые подчеркнул Симанзик (K. Symanzik, Euclidean quantum fields, I, equations for a scalar model, *J. Math. Phys.*, 7 (1966), 510—525; Euclidean quantum field theory, в сб. Local Quantum Theory (R. Jost, ed.), Academic Press, New York, 1969). Впоследствии Э. Нельсон (E. Nelson, Construction of Quantum Fields from Markoff Fields, *J. Functional Analysis*, 12 (1973), 97—112) предложил систему аксиом, определяющую евклидову теорию поля, и показал, что из любой такой теории можно вывести квантовую теорию поля, удовлетворяющую аксиомам Вайтмана. Обратная задача: что нужно добавить к вайтмановым аксиомам, чтобы можно было построить евклидову теорию, удовлетворяющую всем аксиомам Нельсона,— не решена окончательно, однако частичное решение можно найти в статье: B. Simon, Positivity of the Hamiltonian semigroup and the construction of Euclidean region fields, *Helv. Phys. Acta*, **46** (1974), 686—696. В этой статье содержится пример, удовлетворяющий аналогу аксиом Вайтмана для одномерного пространства-времени, но *не* удовлетворяющий аксиомам Нельсона, что указывает на существование в евклидовых теориях поля некоторых дополнительных структур.

Теорема Баргмана — Холла—Вайтмана была опубликована в статье: D. Hall, A. Wightman, A theorem on invariant analytic functions with applications to relativistic quantum field theory, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.*, 31 (1957), 1—41. Имя Баргмана в названии теоремы связано с тем вкладом, который он сделал в ее доказательство.

«Предвестница» *PCT*-теоремы была доказана в работе: G. Lüders. On the equivalence of invariance under time reversal and under particle-antiparticle conjugation for relativistic field theories. *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, **28** (1954), 1—17. Сама *PCT*-теорема была доказана В. Паули (см. его статью: Принцип запрета, группа Лоренца, отражение пространства-времени и заряда, в сб. «Нильс Бор и развитие физики», под ред. В. Паули, ИЛ, М., 1958) и Йостом (R. Jost, Eine Bemerkung zum CTP Theorem, *Helv. Phys. Acta*, **30** (1957), 409—416). Обсуждение физической важности *PCT*-теоремы см. в книге С. Газиоровича, Физика элементарных частиц, «Наука», М., 1969, стр. 543—555.

Представление для двухточечной функции, полученное в теореме IX.34, называется представлением Челлена — Лемана потому, что впервые оно было открыто Умэдзавой и Камефучи (H. Umezawa, S. Kamefuchi, The vacuum in Quantum Electrodynamics, *Progr. Theoret. Phys.*, **6** (1951), 543—558). См. также работы Челлена (G. Källen, On the definition of the renormalization constants in quantum electrodynamics, *Helv. Phys. Acta*, 25 (1952), 417—434) и Лемана (H. Lehmann, Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder, *Nuovo Cimento*, 11 (1954), 342—357).

Из § IX.8 ясна важность проблемы вычисления оболочек голоморфности симметризованной трубы будущего для n-точечной функции. Случай трехточечной функции см. в работе: G. Källen, A. S. Wightman, The analytic properties of the vacuum expectation values of a product of three scalar local fields, *Math.-Fys. Skr. Danske Vid. Selsk.*, 1 (1958). Общее обсуждение вопросов аналитичности в квантовой теории поля см. в работе Вайтмана: A. S. Wightman, Quantum field theory and analytic functions of several complex variables, *J. Indian Math. Soc.*, **24** (1960), 625—677, или в работе А. Эпштейна, Амплитуды рассеяния в квантовой теории поля, в книге К. Хеппа, А. Эпштейна, Аналитические свойства амплитуд рассеяния в локальной квантовой теории поля, Атомиздат, М., 1971.

Опишем, наконец, кратко роль «спина» в теории поля и проистекающую из необходимости описания «спинорных полей» модификацию аксиом. Чтобы объяснить связанные с понятием спина тонкости, нам придется вернуться к обсуждению динамики в Замечаниях к § VIII.11. Там динамика сначала была описана не унитарными операторами U_t, удовлетворяющими условию

$U_{t+s}=U_tU_s$, а автоморфизмами состояний α_t, для которых $\alpha_{t+s}=\alpha_t\alpha_s$. Нетривиальный факт состоит в том, что любой такой автоморфизм, являющийся квадратом другого автоморфизма, индуцируется некоторым унитарным оператором U, определяемым однозначно с точностью до фазового множителя (т. е. $U\longmapsto e^{i\theta}U$). Следовательно, U_t можно выбрать так, что U_t индуцирует α_t, а тогда, в силу единственности с точностью до фазы, $U_{t+s}=\lambda(t, s)U_tU_s$, где $\lambda(t, s)$ — фазовый множитель. В случае динамики, для которой группой является $\mathbb{R}$, всегда можно найти такой фазовый множитель $\mu(t)$, что $\lambda(t, s)=$ $=\mu(t+s)\mu(t)^{-1}\mu(s)^{-1}$, и потому $V(t)=\mu(t)U(t)$ удовлетворяет условию $V(t+s)=V(t)V(s)$. Подобный анализ проходит и для группы Пуанкаре, но лишь до определенного момента. Здесь действительно получается сильно непрерывное отображение $\mathscr{L}_+^\uparrow$ в группу унитарных операторов, удовлетворяющее условию $U(AB)=\lambda(A, B)U(A)U(B)$, где $\lambda(A, B)$ — фазовый множитель. Но теперь уже, вообще говоря, нельзя получить представление с помощью замены $V(A)=\mu(A)U(A)$ для подходящего μ. Точнее, возникает следующая ситуация.

Имеется группа $SL(2, \mathbb{C})$ и двукратное отображение Λ этой группы на $\mathscr{L}_+^\uparrow$. С помощью $\mathbb{R}^4$ и $SL(2, \mathbb{C})$ строится группа $InSL(2, \mathbb{C})=SL(2, \mathbb{C})\times\mathbb{R}^4$ (умножение в теоретико-множественном смысле) с групповой операцией

$$\langle A, a\rangle\langle B, b\rangle=\langle AB, a+\Lambda(A)b\rangle.$$

Тогда $\tilde{\Lambda}$: $\langle A, a\rangle\longmapsto\langle\Lambda(A), a\rangle$ — двукратное отображение $InSL(2, \mathbb{C})$ на группу $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Основная теорема утверждает, что по заданному отображению $\tilde{U}$ из $InSL(2, \mathbb{C})$ во множество унитарных операторов, удовлетворяющему условию $\tilde{U}(\langle A, a\rangle\langle B, b\rangle)=\lambda(A, a, B, b)\tilde{U}(\langle A, a\rangle)\tilde{U}(\langle B, b\rangle)$, можно найти такой множитель $\mu(\cdot)$ на $InSL(2, \mathbb{C})$, что для $\tilde{V}(\langle A, a\rangle)=\mu(A, a)\tilde{U}(\langle A, a\rangle)$ будет выполняться равенство $\tilde{V}(\langle A, a\rangle\langle B, b\rangle)=\tilde{V}(\langle A, a\rangle)\tilde{V}(\langle B, b\rangle)$. Пусть задано U — представление с точностью до фазы группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Тогда можно определить $\tilde{U}$ на $InSL(2, \mathbb{C})$ формулой $\tilde{U}(A, a)=U(\tilde{\Lambda}\langle A, a\rangle)$ и таким образом сопоставить U представление группы $InSL(2, \mathbb{C})$. Эта редукция принадлежит Баргману и Вигнеру (см. статьи, указанные в пункте (4) нашего обсуждения динамики в Замечаниях к § VIII.11; см. также гл. XIV).

Пусть 1 и -1 — два элемента группы $SL(2, \mathbb{C})$, переходящие в единичный элемент из $\mathscr{L}_+^\uparrow$ под действием Λ (в самом деле, $SL(2, \mathbb{C})$ — группа всех комплексных 2×2-матриц с детерминантом 1, и матрицы 1 и -1 переходят в единицу $\mathscr{L}_+^\uparrow$, если положить $\Lambda(A)_{\mu\nu}=\operatorname{tr}(\sigma_\mu A\sigma_\nu A^{-1})$, где $\sigma_0=1$, а σ_i ($i=1, 2, 3$) — матрицы Паули). Тогда неприводимое представление V группы $InSL(2, \mathbb{C})$ всегда принадлежит одному из двух типов: либо $V(\langle -1, 0\rangle)=1$, либо $V(\langle -1, 0\rangle)=-1$. Эти типы обычно называют соответственно случаем с целым спином и случаем с полуцелым спином, поскольку собственные значения оператора J_z углового момента (т. е. инфинитезимального генератора подгруппы в $SL(2, \mathbb{C})$, описывающей повороты вокруг оси z) равны соответственно $0, \pm1, \pm2, \ldots$ или $\pm1/2, \pm3/2, \pm5/2, \ldots$. Заметим, что естественно продолжить анализ неприводимых представлений группы $InSL(2, \mathbb{C})$, с тем чтобы пополнить набор инвариантов, а именно, ввести массу и «спин» (см., например, статью Вигнера), но ниже нам потребуется лишь классификация по $V(\langle -1, 0\rangle)=\pm1$. Отметим также, что случаи целого спина — это именно те случаи, когда представление группы $InSL(2, \mathbb{C})$ является в точности представлением группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$, а не представлением лишь с точностью до множителя.

Определим теперь спинорные поля, отложив временно обсуждение их связи со спином. Пусть $S(\cdot)$ — *конечномерное* (заведомо неунитарное!) неприводимое представление группы $SL(2, \mathbf{C})$ на пространстве размерности d. **Спинорное поле** типа S — это объект, удовлетворяющий аксиомам, сформулированным для эрмитова скалярного поля, со следующими пятью изменениями:

(1) Одно поле $\varphi(\cdot)$ заменяется набором d полей: $\langle\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_d(\cdot)\rangle$.

(2) Не требуется, чтобы поля $\varphi_i(f)$ при вещественной f были симметрическими.

(3) Закон преобразования (свойство 6) заменяется таким:

$$U(\Lambda, a)\varphi_i(x)U(\Lambda, a)^{-1} = \sum_{j=1}^{d} S(A^{-1})_{ij}\varphi_j(\Lambda x + a),$$

где $\Lambda = \Lambda(A)$.

(4) От вакуума требуется лишь, чтобы он был цикличен относительно множества операторов

$$\{\varphi_1(f), \ldots, \varphi_d(f), \varphi_1^*(f), \ldots, \varphi_d^*(f) \mid f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)\}.$$

(5) Соотношение $\varphi(f)\varphi(g) - \varphi(g)\varphi(f) = 0$, если носители f и g пространственно-подобны, заменяется одним из следующих:

(a) (статистика Бозе)

$$\varphi_i(f)\varphi_j(g) - \varphi_j(g)\varphi_i(f) = 0,$$
$$\varphi_i^*(f)\varphi_j(g) - \varphi_j(g)\varphi_i^*(f) = 0;$$

(b) (статистика Ферми)

$$\varphi_i(f)\varphi_j(g) + \varphi_j(g)\varphi_i(f) = 0,$$
$$\varphi_i^*(f)\varphi_j(g) + \varphi_j(g)\varphi_i^*(f) = 0.$$

В зависимости от того, выполняется ли $S(-1) = 1$ или $S(-1) = -1$, мы говорим о спинорных полях целого или полуцелого спина. Тогда справедлива следующая замечательная

Теорема (о связи спина и статистики). Пусть $\{\varphi\}$ — поле типа S. Тогда если поле $\{\varphi\}$ подчиняется статистике Бозе, то оно является спинорным полем целого спина, а если статистике Ферми, — то полуцелого спина.

Теорема о связи спина и статистики для свободных полей появилась в работах Фирца и Паули (M. Fierz, Über die relativistische Theorie kräftfreirer Teilchen mit beliebigem Spin, *Helv. Phys. Acta*, **12** (1939), 3—37; W. Pauli, On the connection between spin and statistics, *Phys. Rev.*, **58** (1940), 716—722). Общий случай рассмотрен в следующих статьях: G. Lüders, B. Zumino, Connection between spin and statistics, *Phys. Rev.*, **110** (1958), 1450—1453; N. Burgoyne, On the connection of spin with statistics, *Nuovo Cimento*, 8 (1958), 607—609. В случае когда имеется теория с несколькими различными полями, связь спина с соотношениями коммутации несколько усложняется. См. книгу Стритера и Вайтмана и работу: G. F. Dell'antonio, On the connection of spin with statistics, *Ann. Phys.*, **16** (1961), 153—157.

Для спинорных полей также существует PCT-теорема. PCT-оператор Θ действует на поля по правилу

$$\Theta\varphi_i(x)\Theta^{-1} = \sum_{j=1}^{d} A_{ij}\varphi_j^*(-x),$$

где A — некоторая известная матрица, зависящая только от S. Обсуждение этого вопроса см. в указанных выше статьях о PCT или в книге Стритера и Вайтмана.

Проводилось также рассмотрение «полей с бесконечным спином», когда $S(A)$ заменяется некоторым *бесконечномерным* представлением группы $SL(2, \mathbb{C})$. Одна из трудностей, связанных с этими полями, состоит в том, что для них могут не выполняться теоремы Баргмана — Холла — Вайтмана и *PCT*; см. A. Oksak, I. Todorov, Invalidity of the TCP-theorem for infinite-component fields, *Comm. Math. Phys.*, **11** (1968), 125—130.

Скажем, наконец, несколько слов о связи между спинорными полями и спином частиц. «Частицы» входят в теорию поля как собственные состояния оператора «массы» $M=\sqrt{H^2-\mathbf{P}^2}\equiv(\tilde{P}\cdot P)^{1/2}$. Подпространства $\mathcal{H}_m=\{\psi \mid M\psi=m\}$ инвариантны относительно $InSL(2, \mathbb{C})$, и представление $InSL(2, \mathbb{C})$ на $\mathcal{H}_m$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений. Если в этой сумме лишь одно слагаемое, то говорят, что имеется только одна частица массы m, а ее спин — инвариант, ассоциированный с представлением. В общем случае существует лишь довольно слабое соответствие между «спином», задаваемым представлением S, и спином частиц теории. Однако одна важная связь остается. Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — поля (не обязательно из одного и того же набора и не обязательно различные), то вектор $\varphi_1(f_1) \ldots \ldots \varphi_n(f_n)\psi_0$ может иметь ненулевые проекции на одночастичные состояния полуцелого спина (соответственно целого спина) только тогда, когда полуцелым спином обладает нечетное (соответственно четное) число полей φ_i. Это позволяет связать физический спин частицы с ее статистикой. Помимо этой одной связи, почти ничего добавить нельзя, так как может оказаться, что частиц больше, чем полей, или полей больше, чем частиц, или имеются частицы, спины которых не связаны со спинами полей. (Все эти явления происходят, например, с должным образом модифицированными свободными полями, основанными на простой модели из § X.7.)

§ *IX.9.* Идеи и доказательства этого раздела восходят к работам: E. Gagliardo, Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabli, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **27** (1957), 284—305; N. Aronszajn, K. Smith, Theory of Bessel Potentials, I, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **11** (1961), 385—475. Более детальное исследование проблемы сужения см. в книге И. Стейна, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, «Мир», М., 1973, гл. VI.

Результаты о сужениях, которые мы рассматриваем, справедливы как для плоских, так и для искривленных подмногообразий. Гораздо более тонкими являются результаты, справедливые лишь для искривленных подмногообразий. Например, если $f\in L^p(\mathbb{R}^2)$ и $p<4/3$, то $\hat{f}$ можно сузить до L^2-функции на единичном круге, но при $p>1$ может оказаться, что сужение на отрезки координатных осей невозможно. Этот результат и его обобщения появились в работе: C. Fefferman, Inequalities for Strongly Singular Convolution Operators, *Acta Math.*, **124** (1970), 9—36.

Геометрическая мера, на которую мы ссылались непосредственно перед теоремой IX.39, представляет собой обобщение длины кривой. Интуитивно ее можно описать следующим образом. В любой точке $x\in M$ выберем ортонормированный набор векторов, касательных к M в этой точке, и возьмем меру Лебега на касательном пространстве относительно этих координат. Тогда мера очень малого множества около x приближенно равна мере Лебега его ортогональной проекции на касательное пространство. На обычном языке дифференциальной геометрии это есть мера на M, ассоциированная с метрикой на M, индуцированной естественной метрикой на $\mathbb{R}^n$.

§ *IX.10.* Аппарат волновых фронтов и осцилляторных интегралов был развит с целью изучения дифференциальных операторов в частных производных, а не только для решения скромной проблемы определения произведений обобщенных функций. Наше обсуждение служит введением в этот аппарат. При этом мы близко следуем некоторым частям работы Хёрмандера: L. Hörmander, Fourier integral operators, I, *Acta Math.*, **127** (1971), 79—183. В этой статье введено понятие волнового фронта, причем первоначальное определение его дается через псевдодифференциальные операторы (см. ниже). Эквивалентность определения Хёрмандера и нашего доказана в его статье. Понятия, аналогичные понятию волнового фронта, можно найти в работе: M. Sato, Hyper-functions and partial differential equations, Conference on Functional Analysis and Related Topics, Swets and Zeitlinger, Tokyo, 1969, pp. 91—94. Тщательно разобранные приложения аппарата волновых фронтов и осцилляторных интегралов к дифференциальным уравнениям в частных производных можно найти в статье: J. Duistermaat, L. Hörmander, Fourier integral operators, II, *Acta Math.*, **128** (1972), 183—269.

Интегральные операторы Фурье—естественный продукт нескольких направлений исследования. Псевдодифференциальные операторы естественно возникают как обобщение дифференциальных операторов в частных производных с переменными коэффициентами. Пусть $a_i \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть p_i—однородный полином степени i. Тогда для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x)\, p_i(-iD)\,\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\left(p_i(\theta)\,\widehat{\varphi}(\theta)\right)^{\vee} =$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\theta} \left(\sum_{i=1}^{N} a_i(x)\, p_i(\theta)\right) \widehat{\varphi}(\theta)\, d\theta.$$

Так как p_i—полином степени i, то $\sum_{i=1}^{N} a_i(x)\, p_i(\theta)$ — символ порядка N. Если эту сумму заменить произвольным символом порядка N, то соответствующий оператор

$$(A\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\theta}\, a(x, \theta)\, \widehat{\varphi}(\theta)\, d\theta$$

называется псевдодифференциальным оператором порядка N. Систематический анализ таких операторов был проведен Коном и Ниренбергом: J. Kohn, L. Nirenberg, On the algebra of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 (1965), 269—305.

Псевдодифференциальные операторы нулевого порядка называются **сингулярными интегральными операторами**. Такие операторы возникают в классической процедуре сведения граничной задачи в области Ω для эллиптических операторов к интегральному уравнению на $\partial\Omega$ (см. пример в § VI. 5). Обсуждение этой процедуры см., например, в работе: L. Hörmander, Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary value problems, *Ann. Math.*, 83 (1966), 129—209 (русский перевод в сб. «Псевдодифференциальные операторы», «Мир», М., 1967, стр. 166—296); см. также статью: R. Seeley, Elliptic singular integral equations, in Singular Integrals, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1967, pp. 308—315, где дан подробный исторический обзор.

Для неэллиптических уравнений довольно естественно заменить $x\cdot\theta$ более сложной фазовой функцией, и по такому пути шли многие авторы до появления систематизированного подхода Хёрмандера: P. D. Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, *Duke J. Math.*, **24** (1957), 627—646; D. Ludwig, Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 473—508; В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические мётоды, Изд-во МГУ, М., 1965; Г. И. Эскин, Задача Коши для гиперболических уравнений в свертках, *Матем. сб.*, **74 (116)** (1967), 262—297; Ю. В. Егоров, О канонических преобразованиях псевдодифференциальных операторов, *УМН*, **24**, вып. 5 (149) (1969), 235—236; L. Nirenberg, F. Trèves, On local solvability of linear partial differential equations, Parts I, II, *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970), 1—38; 459—510. Книга В. П. Маслова, в частности, содержит идеи, оказавшиеся решающими в дальнейшем развитии этой теории.

Волновые фронты особенно полезны при исследовании свойств регулярности (и нерегулярности) решений дифференциальных уравнений в частных производных. Имеется, например, следующее обобщение теоремы об эллиптической регулярности (см., в частности, указанную выше статью Дейстермата и Хёрмандера).

Теорема. Пусть $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_\alpha(x) D^\alpha$ — дифференциальный оператор в частных производных с коэффициентами из C^∞, и пусть f — некоторая C^∞-функция. Если $T \in \mathscr{D}'_{\mathbb{R}^n}$ есть решение уравнения $P(x, D)T = f$, то

$$WF(T) \subset \left\{ \langle x, k \rangle \,\middle|\, \tilde{P}(x, k) \equiv \sum_{|\alpha| = n} a_\alpha(x) k^\alpha = 0 \right\}. \qquad \text{(IX.66)}$$

Существует и еще большее уточнение этой теоремы, утверждающее, что если точка (x_0, k_0) из правой части (IX.66) лежит в $WF(T)$, то автоматически в $WF(T)$ целиком лежит и ассоциированное множество (бихарактеристическая полоса с начальной точкой (x_0, k_0)). Эта уточненная теория известна под названием «распространение сингулярностей», и корни ее лежат в геометрической оптике.

Пример 1 указал нам О. Э. Ланфорд III.

Теорема IX.44(f) допускает естественную переформулировку, если рассматриваются распределения на многообразии M. Она утверждает, что $WF(T)$ — подмножество кокасательного к M пучка.

Теорема IX.46 имеет приложение к проблеме сужения обобщенной функции на вложенное подмногообразие, т. е. к проблеме, которую мы обсуждали с другой точки зрения в § IX.9. Рассмотрим случай кривой, вложенной в $\mathbb{R}^n$ (общий случай см. в работе Хёрмандера: Fourier integral operators, I, теорема 2.5.11). Пусть F: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — инъективная C^∞-функция, удовлетворяющая условиям: (i) $\operatorname{grad} F(t) \neq 0$ при любом t; (ii) $\lim_{t \to \pm\infty} |F(t)| = \infty$ (такая F называется регулярно вложенной собственной простой гладкой кривой). Любая функция $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет «сужение» на кривую F, а именно $F_*(g)(t) = g(F(t))$. Пусть теперь $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Можно ли придать разумный смысл символу $F_*(T)$ хотя бы для некоторого множества распределений $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$? Чтобы сделать это, перефразируем определение $F_*(g)$. Для заданной функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ пусть $f\delta_F$ — распределение из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, задаваемое равенством

$$(f\delta_F)(g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(F(t))\, dt.$$

Если $F_*(g)$ рассматривать как распределение, то

$$F_*(g)(f) = (f\delta_F)(g).$$

Уместнее сказать, что если выбрана функция $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, тождественно равная единице в окрестности множества $\{F(t) \mid t \in \operatorname{supp} f\}$, то

$$F_*(g)(f) = [g(f\delta_F)](\chi), \qquad \text{(IX.67)}$$

где $g(f\delta_F)$ — произведение функции g и обобщенной функции $f\delta_F$. Если множество $WF(T) \oplus WF(f\delta_F)$ отделено от $\{\langle x, 0 \rangle\}$, то можно применить (IX.67) для определения $F_*(T)$! Итак, следует найти $WF(f\delta_F)$. Простое построение (задача 67) показывает, что $WF(\delta_F)=\{\langle x, k\rangle \mid x=F(t);\ k\cdot\mathrm{grad}\,F=0,\ k\neq 0\}$, т. е. это есть ортогональный пучок $N(F)$ к кривой F, и что $WF(f\delta_F)\subset \subset WF(\delta_F)$. Следовательно, в силу теоремы IX.46 справедлива такая

Теорема. Если распределение $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеет волновой фронт, не пересекающийся с ортогональным пучком $N(F)$, то $F_*(T)$ можно определить формулой (IX.67) и, кроме того,

$$WF(F_*(T))\subset F^*(WF(T))\equiv\{\langle t,\ \mathrm{grad}\,F\cdot k\rangle \mid \langle F(t),\ k\rangle\in WF(T)\}.$$

ЗАДАЧИ

1. Найдите фурье-образ функции $3x^2+1$.

† *2.* Восполните детали, касающиеся сходимости римановых сумм к интегралу, в конце доказательства теоремы IX.1.

3. (a) Пусть R — операция вращения и R^{t} — транспонированная операция. Пусть $f\in\mathscr{S}$. Докажите, что $\widehat{f\circ R}=\hat{f}\circ R^{\mathrm{t}}$.

(b) Пусть D_λ — отображение $D_\lambda x=\lambda x$ на $\mathbb{R}^n$. Пусть $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что

$$\widehat{f\circ D_\lambda}=\lambda^{-n}\hat{f}\circ D_{\lambda^{-1}}.$$

(c) Пусть $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что

$$(\widehat{T\circ R})=\hat{T}\circ R^{\mathrm{t}},\qquad \widehat{T\circ D_\lambda}=\lambda^{-n}\hat{T}\circ D_{\lambda^{-1}}.$$

4. Вычислите с помощью уравнения (V.4) фурье-образ главного значения по Коши $\mathscr{P}(1/x)$.

5. Вычислите фурье-образ функции $f(x)=e^{-\alpha x^2/2}$, действуя следующим образом:

(a) Докажите, что $-\lambda\hat{f}(\lambda)=\alpha d\hat{f}(\lambda)/d\lambda$, и выведите отсюда, что $\hat{f}(\lambda)= = ce^{-\lambda^2/2\alpha}$.

(b) Докажите с помощью формулы Планшереля, что $c=1/\sqrt{\alpha}$.

(c) Проверьте явным образом в этом примере формулу обращения Фурье.

6. Пусть $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx)$. Положим $\psi_n=x^n\in\mathscr{H}$ при $n=0, 1, \ldots$.

(a) Докажите, что $\sum\limits_{m=0}^{M}((ik)^m/m!)\,\psi_m \xrightarrow[M\to\infty]{} e^{ikx}$ на $\mathscr{H}$ в топологии нормы.

(b) Предположим, что $\eta\in\mathscr{H}$ и $(x^m,\ \eta)=0$ для всех m. Докажите, что $\eta=0$. [*Указание*: покажите, что $\widehat{\eta e^{-x^2}}=0$.]

(b′) Получите результат (b) без обращения к преобразованию Фурье. [*Указание*: используйте факт тотальности множества функций $(x\pm i)^{-n}$ в $C_\infty(\mathbb{R})$ и формулу $(x+i)^{-1}=i\int\limits_0^\infty e^{-s}e^{isx}\,ds$.]