для определения $F_*(T)$! Итак, следует найти $WF(f\delta_F)$. Простое построение (задача 67) показывает, что $WF(\delta_F)=\{\langle x, k\rangle \mid x=F(t);\ k\cdot\operatorname{grad} F=0,\ k\neq 0\}$, т. е. это есть **ортогональный пучок** $N(F)$ к кривой F, и что $WF(f\delta_F)\subset \subset WF(\delta_F)$. Следовательно, в силу теоремы IX.46 справедлива такая

Теорема. Если распределение $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеет волновой фронт, не пересекающийся с ортогональным пучком $N(F)$, то $F_*(T)$ можно определить формулой (IX.67) и, кроме того,

$$WF(F_*(T))\subset F^*(WF(T))\equiv\{\langle t,\ \operatorname{grad} F\cdot k\rangle \mid \langle F(t),\ k\rangle\in WF(T)\}.$$

ЗАДАЧИ

1. Найдите фурье-образ функции $3x^2+1$.

†*2.* Восполните детали, касающиеся сходимости римановых сумм к интегралу, в конце доказательства теоремы IX.1.

3. (a) Пусть R — операция вращения и R^t — транспонированная операция. Пусть $f\in\mathscr{S}$. Докажите, что $\widehat{f\circ R}=\hat{f}\circ R^t$.

(b) Пусть D_λ — отображение $D_\lambda x=\lambda x$ на $\mathbb{R}^n$. Пусть $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что

$$\widehat{f\circ D_\lambda}=\lambda^{-n}\hat{f}\circ D_{\lambda^{-1}}.$$

(c) Пусть $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что

$$(\widehat{T\circ R})=\hat{T}\circ R^t,\qquad \widehat{T\circ D_\lambda}=\lambda^{-n}\hat{T}\circ D_{\lambda^{-1}}.$$

4. Вычислите с помощью уравнения (V.4) фурье-образ главного значения по Коши $\mathscr{P}(1/x)$.

5. Вычислите фурье-образ функции $f(x)=e^{-\alpha x^2/2}$, действуя следующим образом:

(a) Докажите, что $-\lambda\hat{f}(\lambda)=\alpha d\hat{f}(\lambda)/d\lambda$, и выведите отсюда, что $\hat{f}(\lambda)= = ce^{-\lambda^2/2\alpha}$.

(b) Докажите с помощью формулы Планшереля, что $c=1/\sqrt{\alpha}$.

(c) Проверьте явным образом в этом примере формулу обращения Фурье.

6. Пусть $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R},\ e^{-x^2}dx)$. Положим $\psi_n=x^n\in\mathscr{H}$ при $n=0,\ 1,\ \ldots$.

(a) Докажите, что $\sum\limits_{m=0}^{M}((ik)^m/m!)\,\psi_m \xrightarrow[M\to\infty]{} e^{ikx}$ на $\mathscr{H}$ в топологии нормы.

(b) Предположим, что $\eta\in\mathscr{H}$ и $(x^m,\ \eta)=0$ для всех m. Докажите, что $\eta=0$. [*Указание*: покажите, что $\widehat{\eta e^{-x^2}}=0$.]

(b′) Получите результат (b) без обращения к преобразованию Фурье. [*Указание*: используйте факт тотальности множества функций $(x\pm i)^{-n}$ в $C_\infty(\mathbb{R})$ и формулу $(x+i)^{-1}=i\int\limits_0^\infty e^{-s}e^{isx}\,ds$.]

(c) Пусть $\{H_n\}$ — ортонормированное множество, полученное из $\{\psi_n\}$ с помощью ортогонализации Грама—Шмидта. Докажите, что $\{H_n\}$ — базис в $\mathscr{H}$.

(d) Докажите, что $\{H_n(x)\,e^{-x^2/2}\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

(e) Докажите, что $H_n(x)\,e^{-x^2/2}$ совпадает с n-й функцией Эрмита (определенной в дополнении к § V.3).

7. Пусть $\{A_n(\lambda)\}$ — полиномы, определенные формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda)\frac{\alpha^n}{n!} = e^{-\alpha^2+2\alpha\lambda}.$$

Положим $\phi_n(\lambda) = (2^n n!)^{-1/2} A_n(\lambda)\, e^{-\lambda^2/2}$.

(a) Докажите, что

$$\phi_n(\lambda) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}}\, e^{\lambda^2/2}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n e^{-\lambda^2},$$

т. е. $\phi_n(\lambda)$ совпадают с функциями Эрмита из дополнения к § V.3.

(b) Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ и $(f, \phi_n) = 0$ для всех $n = 0, 1, \ldots$. Докажите, что для всех a

$$\int f(x)\, e^{-(x-a)^2/2}\, dx = 0.$$

(c) Покажите с помощью преобразования Фурье, что $f = 0$, если $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-(x-a)^2/2}\, dx = 0$ для всех a.

(d) Выведите отсюда, что $\{\phi_n\}$ — базис в $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

8. Цель этой задачи — доказать теорему Планшереля и формулу обращения с помощью функций Эрмита. Пусть

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right) \quad \text{и} \quad A^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right).$$

(a) Докажите, что $\widehat{A^{\dagger}f}(\lambda) = -i\,(A^{\dagger}\hat{f})(\lambda)$, если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(b) Докажите, что $\hat{\phi}_n = (-i)^n \phi_n$.

(c) Считая известным, что функции Эрмита образуют базис в $L^2(\mathbb{R})$, докажите теорему Планшереля и формулу обращения.

9. Предположим, что C — непрерывное отображение $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, коммутирующее со сдвигами. Докажите существование такого $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, что $C(\varphi) = T * \varphi$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. [*Указание*: если $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то $T(\varphi) = (T * \tilde{\varphi})(0)$.]

10. Докажите (без обращения к преобразованию Фурье), что при фиксированной $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ отображение $g \mapsto f * g$ есть непрерывное линейное преобразование из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

11. Пусть μ_1 и μ_2 — конечные борелевы меры на $\mathbb{R}^n$. Положим

$$(\mu_1 * \mu_2)(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_1(E-y)\, d\mu_2(y).$$

(a) Докажите, что $\mu_1 * \mu_2$ — конечная борелева мера на $\mathbb{R}^n$, $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$ и для любой $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(\mu_1 * \mu_2)(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y).$$

(b) Докажите, что $\mu_1 * \mu_2$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, если либо μ_1, либо μ_2 абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Приведите пример, когда $\mu_1 * \mu_2$ не абсолютно непрерывна.

12. Преобразования Фурье борелевых мер с единичной полной массой на $\mathbb{R}$ иногда называют «характеристическими функциями». Говорят, что характеристическая функция $E(\lambda)$ **бесконечно делима**, если для любого положительного целого n существует характеристическая функция $E_n(\lambda)$, такая, что $E(\lambda) = (E_n(\lambda))^n$.

(a) Пусть μ — борелева мера единичной массы на $\mathbb{R}$ и E — соответствующая характеристическая функция. Докажите, что E бесконечно делима тогда и только тогда, когда для всех n существует борелева мера μ_n единичной массы, такая, что

$$\mu = \underbrace{\mu_n * \mu_n * \ldots * \mu_n}_{n \text{ раз}}.$$

(b) Покажите, что

$$E(\lambda) = \exp(i\alpha\lambda - \beta\lambda^2/2) + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda x} - 1)\, d\rho$$

— бесконечно делимая характеристическая функция, если $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geqslant 0$ и ρ — борелева мера конечной массы на $\mathbb{R}$. Выведите формулу (свертки) для соответствующих мер в терминах α, β и ρ. Что за мера отвечает $\rho = 0$? Что за мера отвечает $\alpha = 0 = \beta$ и $\rho = \delta(x - x_0)$?

Замечание: существует описание фурье-образов всех бесконечно делимых обобщенных функций, известное как формула Леви — Хинчина. См., например, L. Breiman, Probability, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1968, pp. 193—195.

13. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и K — компактное подмножество в Ω. Докажите, что в $C_0^\infty(\Omega)$ существует функция, равная единице на K. [*Указание*: см. задачу 61 гл. V.]

14. Цель этого упражнения — доказать новым способом формулу обращения Фурье. Предположим, что $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(a) Докажите, что существует $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{\sin x}{x}\, dx$. Обозначим этот предел через d. Покажите, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{\sin Rx}{x}\, dx = d \text{ для любого } R > 0.$$

(b) Докажите, что

$$\int_0^\infty \left[\frac{f(y-u)+f(y+u)}{2} - f(y)\right]\frac{\sin Ru}{u}\,du \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

[Используйте лемму Римана — Лебега.]

(c) С помощью (b) выведите равенство

$$4df(y) = \lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-R}^{R} e^{i(y-x)\cdot k} f(k)\,dk\right)dx.$$

(d) Докажите, что $f(y) = (\sqrt{2\pi}/4d)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iky}\,\hat{f}(k)\,dk$.

(e) Полагая $f(x) = e^{-x^2/2}$, докажите, что $d = \pi/2$.

15. Цель этого упражнения — дать новое доказательство теоремы Планшереля.

(a) Дайте прямое доказательство равенства

$$\widehat{f*g} = (2\pi)^{n/2}\,\hat{f}\,\hat{g}$$

при $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Пусть $\tilde{f}(x) = f(-x)$; докажите, что

$$(f*\bar{\tilde{f}})(y) = \int |\hat{f}(k)|^2 e^{iky}\,dk.$$

(c) Положите $y = 0$ и докажите, что

$$\int |f(x)|^2\,dx = \int |\hat{f}(k)|^2\,dk.$$

**16.* Докажите, что отображение $L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\wedge} C_\infty(\mathbb{R}^n)$ не сюръективно, указав функцию из $C_\infty(\mathbb{R}^n)$, не входящую в область значений этого отображения.

17. Цель этой задачи — развить теорию преобразования Фурье на $L^1(\mathbb{R}^n)$ без обращения к $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(a) Докажите путем прямого вычисления, что при $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{f}(\lambda) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda x} f(x)\,dx$$

— ограниченная непрерывная функция. [*Указание*: примените теорему о мажорированной сходимости.]

(b) Докажите, что если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $\hat{f}(\lambda) \longrightarrow 0$ при $|\lambda| \longrightarrow \infty$. [*Указание*: докажите, что $2\hat{f}(\lambda) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\lambda}(f(x) - f(x - \pi\lambda/|\lambda|^2))\,dx$.]

(c) Докажите путем прямого вычисления, что $(2\pi)^{n/2}\hat{f}\hat{g} = \widehat{f*g}$.

18. Найдите функцию $f(x)$, обладающую всеми свойствами положительно определенной функции, кроме непрерывности. Какой положительно определенной функции она равна почти всюду?

19. Укажите положительно определенную обобщенную функцию, которая не является обычной функцией. Что представляет собой ее фурье-образ?

**20.* Докажите теорему Бохнера—Шварца (теорему IX.10). [*Указание*: подражайте нашему доказательству теоремы Бохнера, используя внутреннее произведение $(\varphi, \psi) = T(\bar{\tilde{\varphi}} * \psi)$ и формулу $T(\bar{\tilde{\varphi}} * \varphi_x) = (T * \bar{\varphi} * \tilde{\varphi})(x)$.]

21. Что говорит обобщение теоремы Пэли—Винера на распределения с компактным носителем о фурье-образах распределений с носителем в начале координат? Получите тот же результат с помощью прямого применения теоремы V.11.

22. Пусть C—выпуклое компактное уравновешенное множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$C^\circ = \{k \mid k\cdot x \geqslant -1 \text{ для всех } x \in C\}$$

—его поляра. Пусть ρ—функционал Минковского на множестве C°, т. е.

$$\rho(\eta) = \sup_{x\in C} (\eta\cdot x) = \inf_{\lambda > 0} \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\eta \in C^\circ\}.$$

Докажите следующий вариант теоремы Пэли—Винера:

Носитель функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ лежит в C тогда и только тогда, когда $\hat{f}$ есть сужение на $\mathbb{R}^n$ целой функции $\hat{f}(z)$, для которой при любом n существует такая константа D_n что

$$|\hat{f}(z)| \leqslant D_n (1 + |z|^2)^{-n} e^{-\rho(\operatorname{Im} z)}.$$

23. Проведите обобщение теоремы IX.16 для случая, когда конус $\Gamma_{\alpha,\theta}$ заменен произвольным собственным открытым выпуклым конусом Γ и когда

$$\Gamma^* = \{\eta \mid \eta\cdot x \geqslant 0 \text{ для всех } x \in \Gamma\}.$$

24. (a) Пусть f—измеримая функция на пространстве с мерой $\langle M, \mu\rangle$. Пусть

$$m_f(t) = \mu\{x \mid |f(x)| > t\}.$$

Докажите, что если $f \in L^p(M, d\mu)$, то

$$\int_M |f|^p\, d\mu = -\int_0^\infty t^p\, dm_f(t) \qquad \text{(интеграл Стильтьеса)}.$$

(b) Докажите, что если $f \in L^p(M, d\mu)$, то

$$m_f(t) \leqslant \|f\|_p^p\, t^{-p}.$$

(c) Докажите, что $f \in L^p(M, d\mu)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty t^{p-1} m_f(t)\, dt < \infty,$$

и что в этом случае $\|f\|_p^p = p\int_0^\infty t^{p-1} m_f(t)\, dt$.

25. Докажите, что в случае, когда $r < p < s$ и $f \in L_w^r \cap L_w^s$, функция f лежит в L^p и

$$\|f\|_p^p \leqslant \left(\frac{1}{p-r} + \frac{1}{s-p}\right) [\|f\|_{r,\,w}^r]^{(s-p)/(s-r)} [\|f\|_{s,\,w}^s]^{(p-r)/(s-r)}.$$

26 (интерполяционная теорема Ханта).

(a) Пусть $1 \leqslant p_0 < p_1 < \infty$, $0 < t < 1$, $p^{-1} = tp_1^{-1} + (1-t)p_0^{-1}$. Покажите, что $f \in L_w^p$ тогда и только тогда, когда существует такое C, что для $\lambda > 0$ функцию f можно представить в виде $f = f_{0,\lambda} + f_{1,\lambda}$, где $f_{0,\lambda} \in L^{p_0}$, $f_{1,\lambda} \in L^{p_1}$ и

$$\|f_{0,\lambda}\|_{p_0} \leqslant C|\lambda|^{1-(p/p_0)}, \qquad \|f_{1,\lambda}\|_{p_1} \leqslant C|\lambda|^{1-(p/p_1)}.$$

[*Указание*: испробуйте $f_{0,\lambda}(x) = f(x)$, если $|f(x)| > \lambda$.]

(b) Докажите, что $\|f\|_{p,w} = C$, где C — наименьшая из констант, которые можно применять в части (a) этой задачи.

(c) С помощью (a) и (b) докажите интерполяционную теорему Ханта.

27. (a) Пусть $f \in L^p(M, d\mu)$. Докажите, что $t^p \mu\{x \mid |f(x)| > t\} \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow 0$ или ∞.

(b) Задайте метрику на $L_w^p(M, d\mu)$ соотношением $\rho(f, g) = \|f - g\|_{p,w}$. Докажите, что в этой метрике $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ не плотно в $L_w^p(\mathbb{R}^n, dx)$.

Замечание. В теореме Ханта T определяется в L_w^p не при помощи соображений плотности (которые, как явствует из предыдущего, не работают), а путем демонстрации возможности представления $f \in L_w^p$ при $p_0 < p < p_1$ в виде $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in L^{p_0}$ и $f_1 \in L^{p_1}$. Благодаря этому T можно определить равенством $Tf = Tf_0 + Tf_1$.

†*28.* Восполните детали вывода неравенства Соболева (пример 3 в § 4).

29. Докажите, что расширение преобразования Фурье на $L^p(\mathbb{R}^n)$, которое дает теорема Хаусдорфа — Юнга, совпадает с сужением на $L^p(\mathbb{R}^n)$ преобразования Фурье на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

30 (слабая теорема Хаусдорфа — Юнга). Докажите, что $\hat{f} \in L_w^q$, если $f \in L_w^p$, где $1 < p < 2$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

31. Докажите теорему Юнга в случае $1 \leqslant p$, $q \leqslant 2$, $r \geqslant 2$, применяя неравенство Гёльдера и теорему Хаусдорфа — Юнга.

32 (слабая теорема Юнга). Примените обобщенное неравенство Юнга для доказательства того, что $f * g \in L_w^r$, если $f \in L_w^p$, $g \in L_w^q$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$, $1 < p, q, r < \infty$.

**33.* Дайте доказательство предложения 1 из дополнения к § IX.4, не использующее интерполяции.

34. (a) Пусть $\|\cdot\|_0$ есть L^2-норма на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\|f\|_1 = \|f\|_0 + |f(0)|$. Покажите, что $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$ не согласованы. Тем не менее вычислите интерполирующие пространства X_t.

(b) Пусть $X = C[0, 1]$. Положим $\|f\|_0 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. Пусть $\|f\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f(r_n)|$, где $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторое упорядочение рациональных чисел. Покажите, что $\|f\|_+ = 0$ для всех $f \in X$.

†35. Восполните детали доказательства равенства $X_t = \mathscr{H}_{m_t}$ в примере 3 из дополнения к § IX.4.

36. Предположим, что $\alpha \in \mathbb{R}$, $p > 1$. Пусть H_α^p — пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме $\|\varphi\|_{\alpha, p} = \|(1+k^2)^{\alpha/2}\hat{\varphi}\|_p$.

(a) Покажите, что нормы $\|\cdot\|_{\alpha, p}$ согласованы.

(b) Пусть p_0, $p_1 > 1$ и α_0, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ фиксированы. Докажите, что пространства X_t, интерполирующие $H_{\alpha_0}^{p_0}$ и $H_{\alpha_1}^{p_1}$, равны $H_{\alpha_t}^{p_t}$ для каждого $0 \leqslant t \leqslant 1$, где $p_t = tp_1^{-1} + (1-t)p_0^{-1}$ и $\alpha_t = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_0$.

*37. Пусть X — комплексиое векторное пространство с согласованными нормами $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$. Цель этой задачи — дать набросок доказательства равенства $X_t = \tilde{X}_t$ из дополнения к § 4. Мы пользуемся введенными там обозначениями.

(a) Покажите, что если $x \in X_0 \cap X_1$, то в X существуют такие x_n, что $x_n \longrightarrow x$ по обеим нормам.

(b) С помощью (a) и неравенства

$$\|x\|_+ \leqslant \|x\|^{(t)} \leqslant \max\{\|x\|^{(0)}, \|x\|^{(1)}\}$$

докажите, что для вывода равенства $\tilde{X}_t = X_t$ достаточно доказать, что $X_0 \cap X_1$ плотно в $\tilde{X}_t$.

(c) Определим $\mathscr{F}_\infty$ как множество тех $f \in \mathscr{F}$, для которых

(i) $\|f(ia)\|^{(0)} \longrightarrow 0$ прн $a \longrightarrow \pm\infty$;

(ii) $\|f(1+ia)\|^{(1)} \longrightarrow 0$ при $a \longrightarrow \pm\infty$;

(iii) $\|f(z)\|_+ \longrightarrow 0$ при $\operatorname{Im} z \longrightarrow \pm\infty$ в полосе равиомерно по $\operatorname{Re} z$.

Докажите, что $\mathscr{F}_\infty/(\mathscr{F}_\infty \cap K_t) = \mathscr{F}(X)/K_t$.

(d) Предположим, что $h \in \mathscr{F}(X)$ и $h(z) = h(z+ia)$ для всех $z \in S$. Определим

$$y_n(t) = a^{-1}\int_0^a e^{-2\pi(t+is)n/a}\, h(t+is)\, ds.$$

Покажите, что $y_n(t) = y_n$ не зависит от t, $y_n \in X_0 \cap X_1$ и

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=-m}^{m} y_n e^{2\pi inz/a} \xrightarrow{\|\|\cdot\|\|} h(z),$$

где сходимость равномерна относительно y по норме $\|\cdot\|^{(1)}$ для $z = 1 + iy$ и по норме $\|\cdot\|^{(0)}$ для $z = iy$.

(e) Покажите, что множество функций из $\mathscr{F}_\infty$ вида $\exp(\beta z^2) \times \times \left(\sum_{n=1}^{N} x_n \exp(\alpha_n t)\right)$, где $x_n \in X_0 \cap X_1$, $\beta > 0$, α_n и N произвольны, плотно в $\mathscr{F}_\infty$. [*Указание*: поскольку $\exp(2\beta z^2) f \xrightarrow{\beta \to 0} f$, достаточно взять только функции вида $g = \exp(2\beta z^2) f$. Пусть $h = \exp(\beta z^2) f$. Покажите, что

$$h_n(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(t+inm)$$

— корректно определенный периодический элемент из $\mathcal{F}(X)$. Затем примените (d) и утверждение $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(\beta z^2)h_n=g$.]

(f) Заключите, что $X_t=\tilde{X}_t$.

38. (a) Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированное множество (не обязательно полное) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Покажите, что $\|C\varphi_n\|\to 0$ для любого компактного оператора C на $\mathcal{H}$.

(b) Пусть $F\in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$. Определим

$$(A\varphi)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(x-y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Докажите, что A не является компактным оператором, если только F — ненулевая функция.

39. (a) Пусть $f\in L^p_{\mathrm{w}}$, $g\in L^{p'}_{\mathrm{w}}$, где $p^{-1}+(p')^{-1}=1$. Предположим, что q удовлетворяет неравенству $q^{-1}+p^{-1}<1$. Докажите, что тогда для всех $h\in L^q$

$$\|f(g*h)\|_q\leqslant C_{p,\,q}\|f\|_{p,\,\mathrm{w}}\|g\|_{p',\,\mathrm{w}}\|h\|_q.$$

(b) Пусть $0<s<n/q$. Пусть $|p|$ — оператор $\sqrt{-\Delta}$ на $L^q(\mathbb{R}^n)$. Покажите, что $|x|^{-s}|p|^{-s}$ определяет ограниченное отображение $L^q(\mathbb{R}^n)$ в себя.

40. Пусть $N(h, f)$ — оператор $g\mapsto h(f*g)$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(a) Докажите, что $N(h, f)\in\mathcal{J}_2$, если $h, f\in L^2$, и $\|N(h, f)\|_{\mathcal{J}_2}\leqslant\|h\|_2\|f\|_2$.

(b) Докажите, что $\|N(h, f)\|_{\mathrm{op}}\leqslant\|h\|_p\|f\|_q$, если $p^{-1}+q^{-1}=1$ и $p\geqslant 2$.

(c) Докажите, что $N(h, f)$ — компактный оператор, если $h\in L^p$, $g\in L^q$, $2\leqslant p<\infty$.

(d) Докажите, что $N(h, f)\in\mathcal{J}_p$, если $f\in L^1\cap L^2$, $h\in L^p$, $2\leqslant p<\infty$. [*Указание*: используйте интерполирование.]

†*41.* В этой задаче дается набросок рассуждения с применением теории функций комплексного переменного, которое используется в доказательстве теоремы Мальгранжа — Эренпрейса.

(a) Пусть $f(z)$ — функция одного комплексного переменного, аналитическая в круге $|z|\leqslant 1$, и пусть $p(z)=a_mz^m+a_{m-1}z^{m-1}+\ldots+a_0$. Докажите, что

$$|a_0f(0)|\leqslant(2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})\,p(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

[*Указание*: пусть $q(z)=\left(\prod\limits_j(\bar{z}_jz-1)/(z-z_j)\right)p(z)$, где z_j — нули f, лежащие внутри единичного круга. Воспользуйтесь тем, что q аналитична в замкнутом круге и $|q(z)|=|p(z)|$ при $|z|=1$.]

(b) Пусть f и p такие, как в (a). Докажите, что

$$|a_k f(0)| \leqslant \frac{m!}{k!\,(m-k)!}(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})\,p(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

(c) Пусть $F(\zeta)$ — целая функция n комплексных переменных и $p(\zeta)$ — полином степени n. Предположим, что $g(\zeta)$ — неотрицательная интегрируемая функция с компактным носителем, зависящая только от абсолютных значений $|\zeta_i|$, $i=1, \ldots, n$. Докажите, что

$$|F(0)\,D^\alpha p(0)| \int_{\mathbb{C}^n} |\zeta|^\alpha g(\zeta)\,d\zeta \leqslant C_0 \int_{\mathbb{C}^n} |F(\zeta)\,p(\zeta)|\,g(\zeta)\,d\zeta$$

($d\zeta$ — мера Лебега на $\mathbb{C}^n$, а C_0 — константа, зависящая от α и m).

(d) Пользуясь частью (c), докажите неравенство

$$|\tilde{q}(x)\,\hat{\varphi}(x)| \leqslant C_1 \int_{|\zeta| \leqslant \varepsilon} |\hat{\varphi}(x+\zeta)\,q(x+\zeta)|\,d\zeta,$$

нужное для доказательства теоремы Мальгранжа — Эренпрейса.

Ссылка: К. Иосида, Функциональный анализ, «Мир», М., 1967, стр. 257—259.

42. Найдите явное выражение для фундаментального решения дифференциального уравнения $u''=f$.

43. Что говорят о регулярности собственных функций гамильтониана атома теоремы регулярности из § 6?

Ссылки: T. Kato, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 151—171; § XIII.10 в томе 3 этой монографии.

44. (a) Определим оператор $\bar{\partial}$ на множестве бесконечно дифференцируемых функций из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ соотношением $\bar{\partial}f=\partial f/\partial x+i\partial f/\partial y$, где $z\in\mathbb{C}$ представлено в виде $z=x+iy$. Докажите, что условие $\bar{\partial}f=0$ является переформулировкой уравнений Коши — Римана.

(b) Пусть $T\in\mathcal{D}'_{\mathbb{R}^2}$, где $\mathbb{R}^2$ представляет комплексную плоскость $\mathbb{C}$, и пусть $\bar{\partial}=\partial/\partial x+i\partial/\partial y$. Докажите, что если $\bar{\partial}T=0$, то T — аналитическая функция. [*Указание*: докажите, что $\Delta T=0$, и воспользуйтесь теоремой об эллиптической регулярности.]

(c) Пусть $T\in\mathcal{D}_{\mathbb{R}^{2n}}$. Предположим, что $\bar{\partial}_j T=0$ для всех $j=1, 2, \ldots, n$. Докажите, что T — аналитическая функция.

45. (a) Докажите, что $Vu\in W_k(\Omega)$, если Ω — ограниченное открытое множество, $V\in C^m(\Omega)$, $u\in W_k(\Omega)$ и $k\leqslant m$.

(b) Докажите, что $u\in C^l(\Omega)$ при $l<m-(n/2)+2$, если u — слабое решение уравнения $-\Delta u+Vu=Eu$ и $V\in C^m(\Omega)$.

**46*. С помощью неравенства Соболева (IX.19) докажите теорему L^p-вложения Соболева, т. е. утверждение о том, что $g=((1+k^2)^{-\alpha}\hat{f})^{\check{}}\in L^q$, если $q^{-1}=p^{-1}-n\alpha^{-1}$ ($\alpha>0$, $1<p$, $q<\infty$) и $f\in L^p$.

47. Предположим, что $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $\partial f/\partial x_i \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2, 3$. Докажите, что $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ для всех $p < 6$. [*Указание*: используйте теорему Планшереля, функцию $(1+|k|^2)^d$ и теорему Хаусдорфа—Юнга.]

48. Пусть $\{f_\alpha\}_{|\alpha| \leqslant m}$ — семейство $C^{|\alpha|}$-функций на $\mathbb{R}^n$. Пусть T и S — дифференциальные операторы:

$$T\varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \bar{f}_\alpha D^\alpha \varphi, \qquad S\varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (f_\alpha \varphi).$$

Пусть $T_{\min}$ обозначает оператор T, определенный на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, а $T_{\max}$ — оператор T, определенный на $\{\varphi \mid \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n),\ T\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Аналогично определим $S_{\min}$ и $S_{\max}$.

(a) Докажите, что $S_{\min}^* = T_{\max}$, $T_{\min}^* = S_{\max}$.

(b) Докажите, что $T_{\min}$ в существенном самосопряжен тогда и только тогда, когда одновременно $T_{\min} = S_{\min}$ и $T_{\max}$ самосопряжен.

Замечание. В случае, когда $T_{\min} = S_{\min}$, говорят, что T *формально самосопряжен*. Однако может случиться, что T формально самосопряжен, но даже не самосопряжен в существенном; пример: $-\Delta - x^4$ на $\mathbb{R}^n$. Подробнее это обсуждается в дополнении к § X.1 и в § X.5.

49. Пусть $H_n(x; \varkappa) = \mathcal{F}^{-1}((\lambda^2 + \varkappa^2)^{-1})$, так что $G_0(x, y) = H_n(x - y; \varkappa)$ — свободная функция Грина на $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\varkappa > 0$.

(a) Докажите, что $H_n(x; \varkappa) = \varkappa^{n-2} H_n(x\varkappa; 1)$.

(b) Докажите, что

$$H_n(x; 1) = (4\pi)^{-n/2} \int_0^\infty e^{-\delta} e^{-|x|^2/4\delta} \frac{d\delta}{\delta^{n/2}}. \qquad \text{(IX.68)}$$

[*Указание*: воспользуйтесь явным видом свободного пропагатора и соотношением

$$(H_0 + 1)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t} e^{-tH_0}\, dt.]$$

(c) Докажите, что $H_n(x; 1)$ монотонно убывает по x, положительна и при $n \geqslant 3$

$$H_n(x; 1) \leqslant |x|^{2-n}.$$

(d) Докажите, что при $n \geqslant 3$

$$\lim_{|x| \to 0} |x|^{n-2} H_n(x; 1) = (4\pi)^{-n/2} \int_0^\infty e^{-1/4y} \frac{dy}{y^{n/2}}.$$

[*Указание к* (c) *и* (d): положите $y = \delta/|x|^2$.]

(e) Докажите, что $\lim\limits_{|x| \to \infty} e^{|x|} |x|^{n/2 - 1/2} H_n(x; 1)$ существует и отличен от нуля. [*Указание*: положите $y = 2\delta/|x|$.]

50. (a) Пусть $T_\alpha = |x|^{-\alpha} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$. Докажите, что $\hat{T}_\alpha$ — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, причем $\hat{T} \circ R = \hat{T}$

для любого вращения R и $\hat{T} \circ D_\lambda = \lambda^{-n+\alpha}\hat{T}$ для D_λ, определенного в задаче 3. Выведите отсюда, что

$$\widehat{|x|^{-\alpha}}(k) = C_{\alpha, n} |k|^{-n+\alpha}.$$

(b) Пусть $T_{\alpha, \lambda} = (|k|^2 + \lambda^{-2})^{-\alpha/2}$, $0 < \alpha < n$, на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что $\hat{T}_{\alpha, \lambda} \longrightarrow \hat{T}_{\alpha, 0}$ при $\lambda \longrightarrow 0$ равномерно на компактных множествах из $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Докажите, что $\hat{T}_{\alpha, \lambda} = \lambda^{-n+\alpha}\hat{T}_{\alpha, 1} \circ D_{\lambda^{-1}}$, и выведите отсюда, что $|k|^{n-\alpha}\hat{T}_{\alpha, 1}(k)$ ограничена в единичном шаре.

(c) Докажите, что $\hat{T}_{\alpha, 1}(k)$ экспоненциально убывает и $\hat{T}_{\alpha, 1}(k) \in L_w^{n/(n-\alpha)}$.

51. Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha > 0$. Докажите, что существует такая константа $C_{\alpha, \varphi}$, что

$$\sup_{|x| \leqslant 1} \left| \left(\frac{x}{t}\right)^\alpha (e^{-itH_0}\varphi)(x) \right| \leqslant C_{\alpha, \varphi}\, t^{-n/2} \text{ при } t > 1.$$

Ссылка: J. Kupsch and W. Sandas, Møller Operators for Scattering on Singular Potentials, *Comm. Math. Phys.*, 2 (1966), 147—154.

52. Пусть $H_0 = -\Delta$ на $\mathbb{R}^n$.

(a) Докажите, что $-\Delta$ при $n \geqslant 4$ в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

(b) Предположим, что $n \leqslant 3$ и $A = -\Delta \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Пусть $\varphi = \widehat{(\lambda^2 - i)^{-1}}$. Докажите, что $\varphi \in D(A^*)$ и $A^*\varphi = i\varphi$. Заключите отсюда, что $-\Delta$ при $n \leqslant 3$ не самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

53. Докажите с помощью представления Челена—Лемана, что квантованное поле $\varphi(x)$ не может быть корректно определенной операторнозначной *функцией* на $\mathbb{R}^4$. [*Указание:* докажите, что в таком случае среднее $(\psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\psi_0)$ было бы ограниченной функцией, что в итоге давало бы равенство $\varphi(f)\psi_0 = 0$ для всех $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, нарушающее цикличность ψ_0.]

54. Пусть $f_n \longrightarrow f$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Пусть $\psi \in D$. Используя свойства 3 и 4 из § IX.8, докажите, что отображение $\langle f, g \rangle \longmapsto \langle \psi, \varphi(f)\varphi(g)\psi \rangle$ непрерывно по совокупности переменных. Выведите отсюда, что $\varphi(f_n)\psi \longrightarrow \varphi(f)\psi$.

55. (a) Пусть $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 = 0$ для всех $\langle x_2, \ldots, x_n \rangle \in \mathbb{R}^{n-1}$. Докажите, что $g = \partial h / \partial x_1$ для некоторой функции $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Пусть $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, причем $T(x_1 + a, x_2, \ldots, x_n) = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для всех a в том смысле, что $T(U_a f) = T(f)$ для всех $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, где $(U_a f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1 - a, \ldots, x_n)$. Докажите, что существует такая $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$, что

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S(x_2, \ldots, x_n)$$

в том смысле, что $T(f) = S(I_1(f))$ для всех $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, где $(I_1(f))(x_2, \ldots, x_n) = \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1$. [*Указание:* возьмите

$F \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ со свойством $\int F(t)\,dt = 1$. Вспомните задачу 47 гл. V, откуда следует, что $\partial T/\partial x_1 = 0$. Наконец, воспользуйтесь частью (a) для доказательства равенства

$$g = f - F(x_1)\,I_1(f) = \partial h/\partial x_1.]$$

(c) Пусть T и S — такие же, как в (b). Докажите, что S — обобщенная функция умеренного роста, если такова T.

56. Цель этой задачи — доказательство того, что любую обобщенную функцию умеренного роста T с носителем в $\overline{V}_+ \cup (-\overline{V}_+)$ можно записать в виде $T = R + A$, где $\operatorname{supp} R \subset \overline{V}_+$ и $\operatorname{supp} A \subset -\overline{V}_+$.

(a) Пусть f — функция класса C^∞ на единичной сфере S в $\mathbb{R}^4$, равная 1 на $\overline{V}_+ \cap S$ и 0 на $-\overline{V}_+ \cap S$. Пусть $\chi(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}/|\mathrm{x}|)$. Покажите, что $(x^2)^n \chi(\mathrm{x})$ — функция класса C^{2n-1}.

(b) Предположим, что $|T(g)| \leqslant \sum\limits_{|\alpha| \leqslant N,\, |\beta| \leqslant M} \|x^\alpha D^\beta g\|_\infty$. Докажите, что $(x^2)^{M+1} T$ можно записать в виде $S_+ + S_-$, где $\operatorname{supp} S_+ \subset \overline{V}_+$, $\operatorname{supp} S_- \subset -\overline{V}_+$. [*Указание:* положите $S_+(f) = T[(x^2)^{M+1}\chi f]$.]

(c) Выберем фиксированную h из $C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ так, чтобы $h \equiv 1$ вблизи $x = 0$. Пусть

$$Hf = (x^2)^{-M-1}\left[f - \sum_{|\beta| \leqslant 2M+1} \frac{(D^\beta f)(0)}{\beta!}\,x^\beta h\right].$$

Докажите, что $T(f) = (x^2)^{M+1}\,T(Hf) + T_0$, где T_0 имеет носитель, сосредоточенный в нуле.

†*57*. Докажите теорему IX.38 в случае коразмерности, большей единицы.

†*58*. Восполните детали доказательства теоремы IX.40.

59. Приведите пример такой обобщенной функции умеренного роста T, задаваемой полиномиально ограниченной C^∞-функцией F, чтобы семейство сдвигов $\{T_x\}$ было ограничено как семейство обобщенных функций, но F *не была* ограниченной функцией. [*Указание:* видоизмените пример 1 в § IX.10.]

†*60*. Закончите доказательство теоремы IX.43.

61. Пусть T, $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ таковы, что существуют произведения TS, $T'S$ и TS'. Докажите, что $(TS)' = T'S + TS'$.

62. Пусть C — выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Пусть $\mathscr{A}$ — семейство функций, аналитических в $\mathbb{R}^n + iC$, полиномиально ограниченных на бесконечности и при $\operatorname{Im} z \downarrow 0$. Пусть $BV(F)$ для $F \in \mathscr{A}$ обозначает граничное значение F в смысле обобщенных функций. Докажите, что произведение $BV(F)\,BV(G)$ существует и

$$BV(F)\,BV(G) = BV(FG),$$

если F, $G \in \mathscr{A}$.

63. Докажите, что $WF(D^\alpha T) = WF(T)$ для любого $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и любого $\alpha \in I_+^n$.

64. (a) Докажите, что

$$WF(fT) \subset \{\langle x, k\rangle \mid x \in \operatorname{supp} f;\ \langle x, k\rangle \in WF(T)\}$$

и что

$$WF(fT) \supset \{\langle x, k\rangle \mid f(x) \neq 0;\ \langle x, k\rangle \in WF(T)\}$$

для любых $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Приведите пример f, T, таких, как в части (a), для которых

$$WF(fT) \neq \{\langle x, k\rangle \mid x \in \operatorname{supp} f;\ \langle x, k\rangle \in WF(T)\}.$$

***65.** (a) Определим асимптотический конический носитель $ACS(T)$ обобщеииой фуикции T как дополиеиие к миожеству тех $k \neq 0$, для которых существуют окрестиость N и число Λ_0, такие, что $\operatorname{supp} T \cap \lambda N = \varnothing$ при $\lambda > \Lambda_0$. Докажите, что $ACS(T)$ — замкиутый конус.

(b) Докажите, что $WF_x(T) \subset ACS(\hat{T})$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и любого $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(c) Не пользуясь техникой осцилляторных иитегралов, получите сведеиия о $WF(\Delta_+)$, достаточные для доказательства существоваиия произведения $\theta\Delta_+$.

66.†(a) Докажите теорему IX.46.

(b) Усовершенствуйте теорему IX.46, иайдя условия иа асимптотический символ F порядка k, необходимые и достаточные для того, чтобы $\operatorname{sing supp}(\hat{F}) = \varnothing$.

67. Определим $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m, \rho, \delta)$ так, как был определен $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$, ио с замеиой (IX.63) условием

$$\left|\left(D_x^\alpha D_\theta^\beta a\right)(x, \theta)\right| \leqslant d\,(1 + |\theta|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}.$$

Распространите теорему IX.49 на случай $\delta < 1$, $\rho > 0$.

†*68.* Докажите, что

$$a(x, \theta; m) = (m^2 + |\theta|^2)^{-1/2} \exp\left(-ix_0\left[(m^2 + |\theta|^2)^{1/2} - |\theta|\right]\right)$$

есть асимптотический символ порядка -1.

†*69.* Докажите леммы 1 и 2 в доказательстве теоремы IX.47.

†*70.* Докажите, что преобразоваиие V, использованное в доказательстве теоремы IX.47, отображает $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$ непрерывио на $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m-1)$.

†*71.* Докажите, что $\langle a, f\rangle \longmapsto af$ — иепрерывиое билииейиое отображеиие $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m) \times C_0^\infty(\Omega)$ в $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$.

†*72.* Завершите доказательство пункта (c) теоремы IX.48. [*Указание:* покажите, что

$$t^n \exp(it\omega(k)) = \left[\frac{\omega(k)}{i|k|^2}(\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{k}})\right]^n e^{it\omega(k)},$$

где $\omega(k) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$.]

†*73.* В ситуации, описанной в Замечаниях к § IX.10, докажите, что $WF(f\delta_F) \subset N(F)$ и что $WF(\delta_F) = N(F)$.

†74. Найдите два таких распределения T, S с компактным носителем, что TS существует, но $\int \hat{T}(l)\,\hat{S}(k-l)\,dl$ абсолютно расходится для всех k.

†*75. Цель этой задачи—доказать формулу замены переменных в пункте (f) теоремы IX.44.

(a) Проверьте формулу, когда M—линейное преобразование.

(b) Покажите, что достаточно доказать равенство

$$WF_{x=0}(T \circ M) = WF_{x=0}(T)$$

для любого диффеоморфизма M со свойствами $M(0)=0$ и $dM_{x=0} =$ = тождественное отображение и любого распределения T с компактным носителем.

(c) Докажите, что если $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$\widehat{g(T \circ M)}(l) = (2\pi)^{-n} \iint g(x)\,\hat{T}(k) \exp[i(k\cdot M(x) - l\cdot x)]\,dx\,dk$$

в том смысле, что эта интегральная формула правильна, если функция $(1+k^2)^{n+1/2}\,\hat{T}(k)$ ограничена и для фиксированного l отображение

$$T \longmapsto \text{интеграл}$$

непрерывно по норме $\|T\|_m = \sup\limits_k \|(1+k^2)^{-m}\,\hat{T}(k)\|$ для каждого $m>0$. [*Указание:* примените интегрирование по частям, основанное на равенстве $|(dM_x^*)^{-1}\,\mathrm{grad}_x(k\cdot M(x))| = |k|$.]

(d) Предположим, что k_0—единичный вектор, не принадлежащий $WF_{x=0}(T)$. Покажите, что при условиях части (b) можно так выбрать открытые конусы C_0 и C_1 вокруг k_0 и окрестность N точки $x=0$, что (i) при каждом m

$$\sup_{k\in C_1} (1+k^2)^m\,|\widehat{gT}(k)| < \infty$$

для любого g с $\mathrm{supp}\, g \subset N$;

(ii) $\sup\{l\cdot[dM_x^*(k)] \mid l \in C_0,\ k \notin C_1,\ x \in N;\ |l| = |k| = 1\} = \alpha < 1.$

(e) Докажите, что при любом m верхняя грань

$$\sup_l \left| (1+l^2)^m \int_{k\in C_1} g(x)\,\hat{T}(k) \exp[i(k\cdot M(x) - l\cdot x)]\,dx\,dk \right|$$

конечна. [*Указание:* воспользуйтесь неравенством (i) части (d) и интегрированием по частям, основанным на равенстве $l^2 \exp(-il\cdot x) = -\Delta_x[\exp(-il\cdot x)]$.]

(f) Пусть

$$F(k, l) = \int g(x) \exp[i(k\cdot M(x) - l\cdot x)]\,dx.$$

Докажите, что при любом $m > 0$

$$\sup\{(1+\lambda^2)^m F(\lambda k_0, \lambda l_0) \mid k_0 \notin C_1,\ l_0 \in C_0,\ |k_0 + l_0| = 1\} < \infty.$$

[*Указание:* воспользуйтесь неравенством (ii) части (d) и интегрированием по частям, основанным на равенстве

$$|dM_x^*(k) - l|^{-2}\,\{(dM_x^*(k) - l)\cdot \mathrm{grad}_x[k\cdot M(x) - l\cdot x]\} = 1.]$$

(g) Докажите, что $\sup\limits_{k \notin C_1,\, l \in C_0} (1+|k|+|l|)^m F(k, l) < \infty$ для всех m, и заключите отсюда, что $k \notin WF_{x=0}(T \circ M)$.

(h) Используя симметрию и только что доказанное включение $WF_{x=0}(T) \supset WF_{x=0}(T \circ M)$, завершите доказательство.

†76. Цель этой задачи — дать набросок доказательств теорем IX.13 и IX.14.

(a) Докажите, что $\exp(b|x|) f \in L^2$ для всех $b < a$ тогда и только тогда, когда $\exp(\eta \cdot x) f \in L^2$ для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$ с $|\eta| < a$.

(b) Докажите, что $\hat{f}(\cdot)$ аналитически продолжается в область $\{z \mid |\operatorname{Im} z| < a\}$ и $\hat{f}(\cdot + i\eta) = (\exp(\eta \cdot x) f)^{\frown}$, если $\exp(b|x|) f \in L^2$ при всех $b < a$. Докажите оценку, указанную в теореме IX.13.

(c) Предположим, что $\hat{f}$ аналитически продолжается в трубу $\{z \mid |\operatorname{Im} z| < a\}$ и ограничена заданным образом. С помощью интегральной формулы Коши докажите, что для любых $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$ с $|\eta| < a$

$$\int \overline{g(x)} f(x)\, dx = \int \overline{\hat{g}(k - i\eta)}\, \hat{f}(k + i\eta)\, dk.$$

(d) Докажите, что если f удовлетворяет условиям части (c) и $h_\eta = \hat{f}(\cdot + i\eta)$, то $\check{h}_\eta(x) = e^{\eta \cdot x} f$ почти всюду, и таким образом завершите доказательство теоремы IX.13.

(e) Подражая изложенным рассуждениям, докажите теорему IX.14.

77. (a) С помощью интерполяционной теоремы Ханта докажите, что при $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$, где p и q меньше ∞, а $r > 1$, $fg \in L^r_w(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q_w(\mathbb{R}^n)$.

(b) Покажите, что если бы интерполяционная теорема Марцинкевича выполнялась без ограничения $p_i \leqslant q_i$, то из $f \in L^4(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^4_w(\mathbb{R}^n)$ следовало бы, что $fg \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(c) Найдите конкретные функции $f \in L^4(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^4_w(\mathbb{R}^n)$, для которых $fg \notin L^2(\mathbb{R}^n)$.

78. (соотношение неопределенностей). Пусть $P = -i\hbar(d/dx)$ и $Q = x$ — операторы в $L^2(\mathbb{R})$. Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ и $\|\varphi\| = 1$. Положим

$$m_p = (P\varphi, \varphi), \qquad m_q = (Q\varphi, \varphi),$$
$$\sigma_p^2 = \|(P - m_p)\varphi\|^2, \qquad \sigma_q^2 = \|(Q - m_q)\varphi\|^2.$$

(a) С помощью коммутационного соотношения $PQ - QP = -i\hbar$ докажите, что $\sigma_p \sigma_q \geqslant \hbar/2$.

(b) Переформулируйте результат части (a) в терминах μ_q и μ_p — спектральных мер операторов Q и P, ассоциированных с φ, и объясните, что он означает с точки зрения измерений координаты и импульса в квантовой механике (см. § VIII.11).

(c) Переформулируйте результат части (a) как утверждение о преобразовании Фурье.