в P. Тогда

$$\int x^n \, d\rho(x) = (1, \tilde{A}^n 1) = (1, x^n) = a_n. \blacksquare$$

В гл. XVI мы увидим, что теорему X.4 можно доказать другим способом, применяя теорему Хана — Банаха, а в § X.6 мы обсудим проблему Гамбургера с точки зрения единственности ее решения.

Дополнение к § X.1. Движение на полупрямой, метод Вейля[1])

Любой болван способен изрекать общие истины, но только глубокий ум различает те частности, к которым они относятся.

ДЖОРДЖ ЭЛИОТ (ДАНИЕЛЬ ДЕРОНДА)

В этом дополнении мы обсуждаем как классическое, так и квантовомеханическое движение частицы в потенциале на полупрямой. Сравнение этих двух случаев ясно проявляет аналогии и различия между классической и квантовой механикой и предоставляет возможность применить теоремы об индексах дефекта для построения теории Вейля обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, решение квантовомеханической задачи на полупрямой можно использовать при анализе многомерных сферически симметричных потенциалов (см. пример 4).

Начнем с классического случая. Пусть $x(t)$ и $v(t)$ — положение и скорость частицы, движущейся на полупрямой $(0, \infty)$ в потенциале $V(x)$, который мы будем считать непрерывно дифференцируемым с производной $V'(x)$, удовлетворяющей условию Липшица равномерно на каждом компактном подмножестве из $(0, \infty)$. Гамильтониан этой системы равен $H(x, v) = mv^2/2 + V(x)$, а уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}(t) = v(t), \qquad \dot{v}(t) = -V'(x(t))/m. \tag{X.10}$$

Для любых заданных $x_0 > 0$, v_0, $t_0 > 0$ стандартные соображения, основанные на теории сжимающих отображений (см. § V.6), доказывают существование единственной пары $\langle x(t), v(t)\rangle$, дающей для всех t, близких к t_0, решение уравнений (X.10), удовлетворяющее условиям $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$. Следующее предложение показывает, что единственный случай, когда локальное решение не продолжается до глобального, — это случай частицы, достигающей нуля или уходящей на бесконечность за конечное время.

---

[1]) В оригинале: limit point — limit circle methods. — *Прим. ред.*

Предложение 1. Предположим, что глобального решения уравнений (X.10), удовлетворяющего начальным условиям $x(t_0)=x_0>0$, $v(t_0)=v_0$, не существует, т. е. максимальный интервал времени, для которого решение с этими начальными данными существует, равен $[t_0, \tau)$, где $\tau<\infty$. Тогда

$$\text{либо } \lim_{t\uparrow\tau} x(t)=0, \qquad \text{либо } \lim_{t\uparrow\tau} x(t)=\infty.$$

Доказательство. В силу изложенного в § V.6 способа построения локального решения и предположений о свойствах $V(x)$, для любого компактного подмножества $K\subset(0,\infty)\times\mathbb{R}$ существует такое T_K, что (X.10) при $t\in(t_1-T_K, t_1+T_K)$ имеет единственное решение с заданными значениями $\langle x_1, v_1\rangle\in K$ при $t=t_1$. Отсюда ясно, что в случае, когда решение нельзя продолжить за момент времени $t=\tau$, оно не может лежать в K ни при каких $t>\tau-T_K$. Для завершения доказательства нам нужно усилить это утверждение, перейдя от утверждения о том, что точка $\langle x(t), v(t)\rangle$ со временем должна покинуть любое компактное подмножество фазового пространства $(0,\infty)\times\mathbb{R}$, к утверждению о том, что $x(t)$ в конце концов покидает любое компактное подмножество $C\subset(0,\infty)$. Именно здесь существенно применение закона сохранения энергии. Поскольку $H(x(t), v(t))=H(x_0, v_0)=E_0$, то в случае, когда $x(t)$ лежит в некотором компактном подмножестве C, пара $\langle x(t), v(t)\rangle$ принадлежит компактному множеству

$$C\times\left\{v(t)\,\middle|\,|v(t)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{m}}\,(E_0-\inf_{x\in C}V(x))^{1/2}\right\}.$$

Таким образом, для каждого n существует такое t_n, что $x(t)\notin(1/n, n)$ при всех $t>t_n$, а отсюда, в силу непрерывности $x(t)$, вытекает наше предложение. ∎

Приведенные рассуждения показывают, каким образом сохранение энергии входит в доказательство существования глобального решения для классической системы с одной степенью свободы. В § X.13 мы применим метод, основанный на законе сохранения энергии, для доказательства существования глобального решения в случае классической системы с бесконечным числом степеней свободы.

Определение. Будем говорить, что классическое движение, порождаемое потенциалом V, **полно** в 0 (соответственно в ∞) (или что сам потенциал V полон в 0 (соответственно в ∞)), если не существует точки $\langle x_0, v_0\rangle\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$, такой, что $x(t)$ достигает 0 (соответственно ∞) за конечное время.

Таким образом, если потенциал V полон и в 0 и в ∞, то глобальное решение существует для всех начальных условий $\langle x_0, v_0\rangle$. Следующая теорема решает вопрос о том, когда V полон.

Теорема X.5. Пусть $V(x)$ обладает непрерывной производной, удовлетворяющей условию Липшица равномерно на каждом компактном подмножестве в $(0, \infty)$. Классическое движение, порождаемое потенциалом $V(x)$,

(a) неполно в 0 тогда и только тогда, когда $V(x)$ ограничен сверху около нуля;

(b) неполно в ∞ тогда и только тогда, когда $V(x)$ ограничен сверху при $x \geqslant 1$ и

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{K-V(x)}} < \infty \text{ для некоторого } K > \sup_{x \geqslant 1} V(x).$$

Доказательство. Потенциал V не ограничен сверху около нуля тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $x_n \to 0$, что $V(x_n) \to \infty$. Предположим, что V не ограничен сверху около нуля. Благодаря сохранению энергии

$$mv(t)^2/2 + V(x(t)) = mv_0^2/2 + V(x_0),$$

так что $V(x(t)) \leqslant mv_0^2/2 + V(x_0)$. Таким образом, $x(t)$ никогда не может совпадать с x_n при достаточно большом n и, следовательно, $x(t)$ никогда не окажется около нуля. Поэтому V полон в нуле. Обратно, предположим, что $V(x) \leqslant M$ на $(0, 1)$. Пусть $x(0) = x_0 = 1$; выберем скорость v_0 отрицательной и такой, чтобы $mv_0^2/2 + V(1) = 1 + M$. Тогда $mv(t)^2/2 \geqslant 1$ при всех t и частица достигнет нуля за конечное время. Это доказывает (a).

Если $V(x)$ не ограничен сверху на $(1, \infty)$, то соображения, аналогичные уже изложенным, показывают, что V полон в ∞. Поэтому предположим, что $V(x) \leqslant M$ при всех $x \in [1, \infty)$ и что для некоторых начальных условий $\langle x_0, v_0\rangle$ и $\tau < \infty$, $\tau \in \mathbb{R}$, справедливо равенство $\lim_{t\to\tau} x(t) = \infty$. Пусть $K = \max\{M+1, mv_0^2/2 + V(x_0)\}$. Тогда для всех $t \in (0, \tau)$

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{K - V(x(t))}.$$

При этом для частицы, начавшей двигаться направо, $x(t)$ должно строго возрастать, ибо в противном случае сохранение энергии и единственность решения уравнений (X.10) повлекли бы за собой то, что частица никогда не достигла бы ∞. Следовательно, существует такое $t_1 < \tau$, что если $t \in (t_1, \tau)$, то $dx/dt > 0$ и $x(t) \geqslant 1$.

Отсюда

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{x(t_1)}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{K-V(x)}}\leqslant\int\limits_{x(t_1)}^{\infty}\frac{dt}{dx}\,dx=\tau-t_1<\infty.$$

Обратно, если

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{K-V(x)}}<\infty \text{ для некоторого } K>\sup_{x\geqslant 1}V(x),$$

то мы выбираем начальные условия $x_0=1$, $v_0>0$ так, чтобы $E=mv_0^2/2+V(x_0)=K$. Тогда $dx/dt>0$ при всех $t>0$ и

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{dt}{dx}\right)dx=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{K-V(x)}}<\infty,$$

в силу чего время достижения ∞ конечно. ∎

Обратимся теперь к квантовомеханическому случаю, где требуется предположить только непрерывность на $(0, \infty)$ вещественной функции $V(x)$. Квантовым аналогом классического гамильтониана $H(x, v)$ будет формальный оператор $-(2m)^{-1}d^2/dx^2+V(x)$. Обозначим через H оператор $-d^2/dx^2+V(x)$ на $L^2(0, \infty)$ с областью определения $D(H)=C_0^\infty(0, \infty)$, где $C_0^\infty(0, \infty)$ — множество функций класса C^∞ с носителями, отделенными от 0 и ∞ (мы опускаем несущественный множитель $1/2m$). Используя вещественность $V(x)$ и интегрируя по частям, видим, что H — симметрический оператор. Предположим, что $\psi\in D(H^*)$; тогда

$$\left(-\frac{d^2\varphi}{dx^2}+V\varphi,\ \psi\right)=(\varphi, H^*\psi),$$

или

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}\varphi,\ \psi\right)=(\varphi, H^*\psi)-(\varphi, V\psi)$$

для всех $\varphi\in C_0^\infty(0, \infty)$. Таким образом, вторая слабая производная ψ'' локально принадлежит L^2, ибо $V(x)\psi(x)\in L^2$ локально. В силу леммы Соболева, ψ' абсолютно непрерывна и $(-\psi''+V\psi)\in L^2(0, \infty)$ (хотя по отдельности каждый из членов около нуля или бесконечности может не принадлежать L^2). Следовательно, функции в $D(H^*)$ вполне хороши и H^* действует как раз так, как мы ожидали. Наконец, заметим, что H коммутирует с комплексным сопряжением и потому имеет равные индексы дефекта. Сведем все это в специальное

Предложение 2. Предположим, что $V(x)$ — вещественная непрерывная функция на $(0, \infty)$. Пусть H — оператор $-d^2/dx^2+V(x)$ с областью определения $C_0^\infty(0, \infty)$. Тогда

(a) H симметричен.

(b) Если $\psi \in D(H^*)$, то ψ непрерывно дифференцируема, ψ' абсолютно непрерывна, ψ'' локально принадлежит L^2, $-\psi''+$ $+V\psi \in L^2(0, \infty)$ и

$$H^*\psi = -\psi''+V\psi.$$

(c) H обладает равными индексами дефекта.

Важность предложения 2 состоит в том, что с его помощью вопросы об индексах дефекта оператора H сводятся к вопросам о решениях классического обыкновенного дифференциального уравнения $-\psi''+V\psi=\pm i\psi$. Мы завершим подготовку к общему анализу, доказав такое

Предложение 3. Пусть $Q(x)$ — непрерывная комплекснозначная функция на $(0, \infty)$. Тогда множество решений уравнения $\varphi''(x)=Q(x)\varphi(x)$ на $(0, \infty)$ является двумерным векторным пространством дважды непрерывно дифференцируемых функций. Для любых двух решений φ и ψ **вронскиан** $W(x)=\varphi'(x)\psi(x)-$ $-\varphi(x)\psi'(x)$ постоянен и равен нулю тогда и только тогда, когда φ и ψ — линейно зависимые функции.

Доказательство. Мы докажем существование глобального решения с произвольно фиксированными начальными данными $\langle\varphi(1), \varphi'(1)\rangle \in \mathbb{C}^2$ при $x=1$. Согласно обсуждению, проведенному в § V.6, локальное решение существует, и потому точно так же, как при доказательстве предложения 1, можно утверждать, что глобального решения нет только тогда, когда $\alpha(x)=\langle\varphi(x), \varphi'(x)\rangle$ достигает бесконечности при некотором конечном x_0, отличном от нуля. Покажем, что это не может случиться ни при каком $x_0>1$; доказательство для $x_0<1$ аналогично. Положим

$$q(x_0)=\sup\{|Q(x)|+1 \mid 1 \leqslant x \leqslant x_0\}.$$

С помощью дифференциального уравнения выводим, что при $1 \leqslant x \leqslant x_0$

$$\alpha'(x)=\langle\varphi'(x), Q(x)\varphi(x)\rangle,$$

так что $|\alpha'(x)| \leqslant q(x_0)|\alpha(x)|$ и

$$|\alpha(x)| \leqslant |\alpha(1)|+q(x_0)\int_1^x |\alpha(y)|\,dy. \qquad \text{(X.11)}$$

В итоге, итерируя (X.11), получаем

$$|\alpha(x)| \leqslant |\alpha(1)|\, e^{q(x_0)(x-1)}$$

для всех $1 \leqslant x \leqslant x_0$. Это доказывает существование по крайней мере двух независимых глобальных решений. Более того, в силу локальной единственности, их не более двух и, следовательно, ровно два.

Утверждения о $W(x)$ немедленно выводятся с помощью дифференцирования из того, что $W(x)$ есть детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} \psi & \varphi \\ \psi' & \varphi' \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Исследуем теперь индексы дефекта оператора H, изучая решения уравнения

$$-\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x). \qquad \text{(X.12)}$$

Теорема X.6. Пусть $V(x)$ — непрерывная вещественная функция на $(0, \infty)$.

(a) Если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то по крайней мере одно ненулевое решение (X.12) лежит в L^2 около нуля и по крайней мере одно решение лежит в L^2 около ∞.

(b) Если хотя бы для одного $\lambda \in \mathbb{C}$ оба решения (X.12) лежат в L^2 около бесконечности (соответственно около нуля), то и для *всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ оба решения (X.12) лежат в L^2 около бесконечности (соответственно около нуля).

Доказательство. Рассмотрим сначала оператор B на $L^2(1, 2)$, действующий на области определения $D(B) = \{u \in AC^2[1, 2] \mid u(1) = u(2) = u'(1) = u'(2) = 0\}$ по формуле $Bu = -u'' + Vu$. Подражая рассуждениям, использованным в примерах 1 и 2 § X.1, и применяя предложение 3, легко обнаружить, что индексы дефекта оператора B равны $\langle 2, 2 \rangle$. В частности, если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то $\operatorname{Ran}(B - \lambda)$ не плотно в $L^2(1, 2)$, т. е. можно найти $v \in C_0^\infty(1, 2)$ со свойством $v \notin \operatorname{Ran}(B - \lambda)$.

Пусть теперь $\tilde{H}$ — самосопряженное расширение оператора H в $L^2(0, \infty)$. Так как $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, можно найти функцию $u \in D(\tilde{H}) \subset D(H^*)$, удовлетворяющую равенству $(\tilde{H} - \lambda)u = v$. При этом u не может обращаться в нуль и на $(0, 1)$, и на $(2, \infty)$, ибо если это так, то ее сужение на $[1, 2]$ лежало бы в $D(B)$, что противоречит условию $v \notin \operatorname{Ran}(B - \lambda)$.

Предположим, что u не равна тождественно нулю на $(0, 1)$. Тогда ее сужение $\tilde{u}$ на $(0, 1)$ удовлетворяет (X.12) на $(0, 1)$ и квадратично интегрируемо около нуля. Рассмотрим $D(A) = \{f \in D(\tilde{H}) \mid f \equiv 0 \text{ в } [1, \infty)\}$ как (плотное) подмножество в $L^2(0, 1)$. Область значений оператора $A - \lambda \equiv (\tilde{H} - \lambda) \restriction D(A)$ не плотна, ибо комплексно сопряженная с $\tilde{u}$ функция $\bar{\tilde{u}}$ обладает свойствами $\bar{\bar{u}} \in D(A^*)$ и $(A^* - \bar{\lambda})\bar{\bar{u}} = 0$. В результате можно найти функцию $w \in C_0^\infty(0, 1)$, которая не принадлежит $\operatorname{Ran}(A - \lambda)$. В силу самосопряженности $\tilde{H}$ существует такая $f \in D(\tilde{H})$, что $(\tilde{H} - \lambda) f = w$. Так как $w \notin \operatorname{Ran}(A - \lambda)$, функция f не может обращаться в нуль тождественно на $[1, \infty)$, и потому мы получаем ненулевое решение уравнения (X.12), квадратично интегрируемое около ∞. Если u не обращается тождественно в нуль на $(2, \infty)$, можно воспользоваться аналогичным рассуждением. Это докажет (a).

Для доказательства (b) предположим, что φ_1 и φ_2 — два независимых решения уравнения (X.12) при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, что оба они лежат в L^2 около ∞ и нормированы условием $\varphi_1'(x)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2'(x) = 1$. Пусть u — решение того же уравнения при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_0$. Возьмем $c \in (0, \infty)$. Тогда прямое вычисление показывает, что

$$u(x) - (\lambda_1 - \lambda_0) \int_c^x (\varphi_1(x)\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)\varphi_2(x)) u(\xi)\, d\xi$$

удовлетворяет (X.12) при $\lambda = \lambda_0$, поэтому

$$u(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \\ + (\lambda_1 - \lambda_0) \int_c^x (\varphi_1(x)\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)\varphi_2(x)) u(\xi)\, d\xi$$

с некоторыми константами c_1 и c_2. Определим $\|f\|_{[c,x]}^2 = \int_c^x |f(x)|^2 dx$ и выберем M так, чтобы $\|\varphi_1\|_{[c,\infty]} < M$ и $\|\varphi_2\|_{[c,\infty]} < M$. Тогда в силу неравенства Шварца

$$|u(x)| \leqslant |c_1||\varphi_1(x)| + |c_2||\varphi_2(x)| + \\ + |\lambda_1 - \lambda_0| (|\varphi_1(x)| + |\varphi_2(x)|) M \|u\|_{[c,x]},$$

откуда

$$\|u\|_{[c,x]} \leqslant |c_1| M + |c_2| M + 2M^2 |\lambda_1 - \lambda_0| \|u\|_{[c,x]}.$$

Следовательно, если $|\lambda_1 - \lambda_0| \leqslant 1/4M^2$, то $\|u\|_{[c,x]}/2 \leqslant (|c_1| + |c_2|) M$ для всех x, и потому $u \in L^2$ около ∞. Поскольку путем выбора констант c достаточно большими можно сделать M как угодно малым, мы доказали (b) для случая, когда речь идет о ∞. Утверждение, относящееся к нулю, доказывается точно так же. ∎

Будем говорить, что $V(x)$ отвечает случаю **предельной окружности** на бесконечности (соответственно в нуле), если для некоторого и, следовательно, для всех λ *все* решения уравнения

$$-\varphi''(x)+V(x)\varphi(x)=\lambda\varphi(x)$$

квадратично интегрируемы на бесконечности (соответственно в нуле). Если $V(x)$ не отвечает случаю предельной окружности на бесконечности (соответственно в нуле), то будем говорить, что $V(x)$ отвечает случаю **предельной точки.** О происхождении этой терминологии см. Замечания. Теперь докажем, что справедлива

Теорема X.7 (критерий Вейля). Пусть $V(x)$ — непрерывная вещественная функция на $(0, \infty)$. Оператор $H=-d^2/dx^2+V(x)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $V(x)$ отвечает случаю предельной точки и в нуле, и на бесконечности.

Доказательство. Если $V(x)$ отвечает случаю предельной окружности и в нуле, и на бесконечности, то индексы дефекта H суть $\langle 2, 2\rangle$. Если $V(x)$ отвечает предельной окружности на одном конце и предельной точке на другом, то H обладает индексами дефекта $\langle 1, 1\rangle$. Поэтому если $V(x)$ не отвечает случаю предельной точки на обоих концах, то H не самосопряжен в существенном.

Теперь предположим, что $V(x)$ отвечает предельной точке на обоих концах. Положим $W_x(f, g)=\overline{f(x)}g'(x)-\overline{f'(x)}g(x)$ для $f, g\in D(H^*)$. Функция W_x непрерывна, и для нее справедливо соотношение

$$W_b(f, g)-W_a(f, g)=\int_a^b[\overline{(H^*f)(x)}g(x)-\overline{f(x)}(H^*g)(x)]\,dx,$$

которое доказывается интегрированием по частям. Поскольку подынтегральное выражение в правой части принадлежит $L^1(0, \infty)$, существуют пределы $W_\infty(f, g)=\lim_{b\to\infty}W_b(f, g)$, $W_0(f, g)=\lim_{a\to 0}W_a(f, g)$ и

$$W_\infty(f, g)-W_0(f, g)=(H^*f, g)-(f, H^*g).$$

Если мы сможем показать, что левая часть равна нулю, то докажем симметричность H^* и, следовательно, самосопряженность в существенном H.

Выберем $c\in(0, \infty)$. Пусть B — сужение H на $C_0^\infty(0, c)\subset L^2(0, c)$ и $A=-d^2/dx^2+V(x)$ на

$$D(A)=\{\varphi\mid\varphi\in C^\infty(0, c),\ \varphi=0 \text{ около нуля},\ \varphi(c)=0\}.$$

Поскольку $B \subset A$, имеем $\bar{B} \subset \bar{A}$. Но в $D(\bar{A})$ существуют функции, для которых $\varphi'(c) \neq 0$, а в $D(\bar{B})$ таких функций нет, поэтому $\bar{A}$ — *нетривиальное* замкнутое и симметрическое расширение $\bar{B}$. Так как оба решения уравнения $-\varphi''+V\varphi=\pm i\varphi$ лежат в L^2 около c и только одно из них лежит в L^2 около нуля, индексы дефекта оператора B равны $\langle 1, 1\rangle$. Поэтому индексы дефекта $\bar{A}$ суть $\langle 0, 0\rangle$, и оператор $\bar{A}$ самосопряжен.

Пусть теперь $f, g \in D(H^*)$. Выберем $f_1, g_1 \in C_0^\infty(0, \infty)$ так, чтобы $f(c)+f_1(c)=0$, $g(c)+g_1(c)=0$. Положим $f_2=f+f_1$, $g_2=g+g_1$. Тогда

$$-W_0(f, g)=W_c(f_2, g_2)-W_0(f_2, g_2)=$$
$$=(\bar{A}f_2, g_2)-(f_2, \bar{A}g_2)=0,$$

поскольку f_2, $g_2 \in D(A^*)=D(\bar{A})$. Следовательно, $W_0(f, g)=0$; аналогичное рассуждение доказывает, что $W_\infty(f, g)=0$. ∎

Теперь мы хотим изучить вопрос о том, когда $V(x)$ отвечает случаю предельной точки на обоих концах. Обсуждение, проведенное в примерах 1, 2 из § 1, наталкивает на мысль о том, что H самосопряжен в существенном тогда и только тогда, когда при классическом движении, порождаемом $V(x)$, частица не достигает 0 или ∞, и потому нет нужды задавать граничные условия в нуле или бесконечности (сейчас мы увидим, в какой мере справедлива эта классическая аналогия).

Определение. Назовем потенциал $V(x)$ **квантовомеханически полным**, если $H=-d^2/dx^2+V(x)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(0, \infty)$. Будем говорить, что $V(x)$ **полон на** ∞ (соответственно **в нуле**), если по крайней мере одно решение уравнения $\varphi''(x)=V(x)\varphi(x)$ не лежит в L^2 около ∞ (соответственно около нуля).

В примере 2 § 1 было показано, что потенциал $V(x)\equiv 0$ не полон. Это не удивительно, поскольку свободная классическая частица, начав движение налево, достигнет нуля за конечное время.

Обсудим сначала случай, относящийся к ∞. Стандартное достаточное условие таково:

Теорема X.8. Пусть $V(x)$ — непрерывная вещественная функция на $(0, \infty)$. Предположим, что существует положительная дифференцируемая функция $M(x)$, обладающая свойствами

(i) $V(x) \geqslant -M(x)$,

(ii) $\int\limits_1^\infty (M(x))^{-1/2}\,dx = \infty$,

(iii) $M'(x)/(M(x))^{3/2}$ ограничено около ∞.

Тогда $V(x)$ отвечает случаю предельной точки (полон) на ∞.

Доказательство. Покажем, что оба решения уравнения $-\varphi''(x)+V(x)\varphi(x)=0$ не могут лежать в L^2 около ∞. Если $0<c_1<c<\infty$ и u — вещественное решение, принадлежащее L^2 около ∞, то

$$-K_1 \equiv -\int\limits_{c_1}^{\infty} u^2(x)\,dx \leqslant -\int\limits_{c_1}^{c} u^2(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{c_1}^{c} \frac{V(x)}{M(x)} u^2(x)\,dx = \int\limits_{c_1}^{c} \frac{u''(x)\,u(x)}{M(x)}\,dx.$$

Интегрирование по частям показывает, что u удовлетворяет неравенству

$$-\frac{u'(x)\,u(x)}{M(x)}\Big]_{c_1}^{c} + \int\limits_{c_1}^{c} \frac{(u'(x))^2}{M(x)}\,dx - \int\limits_{c_1}^{c} \frac{u'(x)\,u(x)\,M'(x)}{(M(x))^2}\,dx \leqslant K_1 \qquad (X.13)$$

для всех c. С помощью (iii) найдем такое K_2, что

$$\int\limits_{c_1}^{c} \frac{u''(x)\,u(x)\,M'(x)}{(M(x))^2}\,dx \leqslant K_2\left(\int\limits_{c_1}^{c} \frac{(u'(x))^2}{M(x)}\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{c_1}^{c} (u(x))^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Предположим, что $\int\limits_{c_1}^{\infty} ((u'(x)^2/M(x))\,dx = \infty$. Тогда в силу последнего неравенства, предположения относительно u и неравенства (X.13) произведение $u'(x)\,u(x)$ положительно около ∞. Но это означает, что $u'(x)$ и $u(x)$ всегда имеют одинаковые знаки, чего не может быть, поскольку u принадлежит L^2 около бесконечности. Следовательно, $\int\limits_{c_1}^{\infty} ((u'(x)^2/M(x))\,dx < \infty$.

Теперь предположим, что φ и ψ — независимые решения уравнения $-\varphi''+V\varphi=0$, лежащие в L^2 около ∞. Можно считать, что φ и ψ вещественнозначны и нормированы условием $\varphi(x)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi(x)=1$. Тогда

$$\left(\frac{1}{M(x)}\right)^{1/2} = \frac{\varphi(x)\,\psi'(x)}{(M(x))^{1/2}} - \frac{\varphi'(x)\,\psi(x)}{(M(x))^{1/2}}$$

должно лежать в L^1 около ∞, что противоречит (ii). ∎

Следствие. Пусть потенциал $V(x)$ дифференцируем на $(0, \infty)$ и ограничен сверху константой K на $[1, \infty)$. Предположим, что

(i) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{K-V(x)}} = \infty$,

(ii) $V'(x)|V(x)|^{-3/2}$ ограничено около бесконечности.

Тогда $V(x)$ отвечает случаю предельной точки около ∞.

Таким образом, если $V(x)$ классически полон около ∞ (условие (i)) и, сверх того, удовлетворяет условию (ii), то $V(x)$ квантовомеханически полон. По существу, условие (ii) говорит о том, что производная V' не должна быть слишком велика по сравнению с V. Следующие примеры показывают, что как с физической, так и с математической точек зрения классический и квантовый случаи не эквивалентны, если производная V' достаточно велика.

Пример 1 (потенциал V, полный на ∞ квантовомеханически, но не полный там классически). Потенциал $V(x)$ представляет собой серию ступенек, связанных между собой гладкими кривыми, сосредоточенными на очень коротких интервалах (α_i, β_i) (рис. X.2). Ясно, что $\int\limits_0^\infty (1/\sqrt{-V(x)})\,dx < \infty$, и потому классическое движение неполно на ∞. Покажем, что если ступеньки достаточно круты, то квантовое движение полно на ∞. Физи-

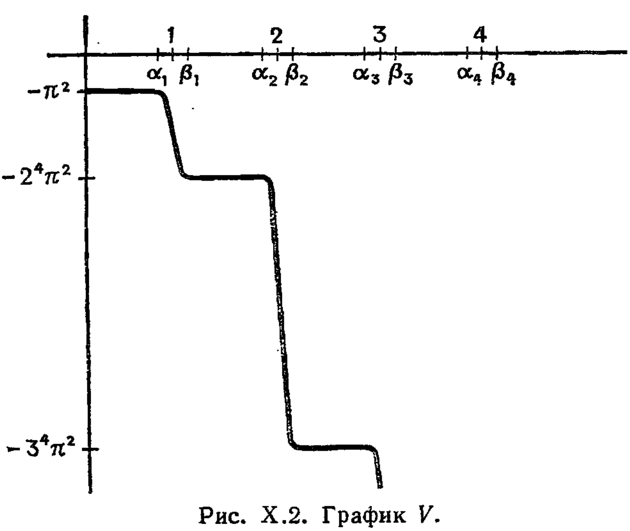

Рис. X.2. График V.

ческая причина этого в том, что часть квантовомеханической волны отражается от каждой крутой ступеньки, совокупность которых устроена так, чтобы отраженные волны были когерентными. Для того чтобы понять идею доказательства, рассмотрим случай бесконечно крутых ступенек, когда $\alpha_k = k = \beta_k$. Пусть $\varphi(x) = -\cos(n^2\pi x - n(n-1)\pi/2)$ для $n-1 \leqslant x \leqslant n$. Тогда $\varphi \in D(H^*)$, $\varphi'' = V\varphi$ и $\varphi \notin L^2$ около ∞. Покажем теперь, что эти бесконечно крутые ступеньки можно сгладить так, чтобы одно из решений уравнения

$$\varphi''(x) = V(x)\,\varphi(x) \tag{X.14}$$

оставалось вне $L^2(0, \infty)$.

Для этого на коротких интервалах (α_k, β_k) сделаем потенциал V монотонно убывающим, причем так, чтобы он стал дважды непрерывно дифференцируемым. Возьмем $\alpha_1 = 1$ и положим $\varphi(x) = -\cos(\pi x)$ на $(0, 1]$. При $x = 1$ имеем $\varphi(1) = 1$ и $\varphi'(1) = 0$. Мы хотим выбрать β_1 так, чтобы решение не слишком убывало около β_1. Поскольку $V(x) < 0$, решение будет выпуклым вниз до следующего нуля функции $\varphi(x)$, который мы обозначим через r_1. На интервале $I_1 = (1, \min\{r_1, \alpha_2\})$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) - 1 = \int_1^x \left(\int_1^s V(t)\,\varphi(t)\,dt \right) ds, \tag{X.15}$$

откуда вытекает, что

$$|\varphi(x) - 1| \leqslant \frac{1}{2}(x-1)^2 (\sup_{I_1} |V(t)|)(\sup_{I_1} |\varphi(t)|) \leqslant \frac{1}{2}(x-1)^2 (2^4\pi^2).$$

Выберем β_1 таким, чтобы $|\varphi(\beta_1) - 1| \leqslant 1/4$. Теперь можно задать потенциал на интервале (α_1, β_1), причем какой бы способ сглаживания мы ни выбрали, предыдущая оценка гарантирует неравенство $\varphi(\beta_1) \geqslant 1 - 1/4$. На (β_1, α_2) функция $\varphi_2(x)$ имеет вид $A_2 \cos(2^2\pi x - \gamma_2)$, где $|A_2| \geqslant 1 - 1/4$. Теперь возьмем в качестве α_2 ближайшую к $x = 2$ точку, где φ_2 достигает максимума. Выберем β_2 (используя ту же идею, что и выше) так, чтобы $\varphi(\beta_2) \geqslant 1 - 1/4 - 1/8$. Таким способом мы построим решение $\varphi(x)$ вида

$$A_n \cos(n^2\pi x - \gamma_n)$$

на (β_{n-1}, α_n) с $|A_n| \geqslant 1/2$. В итоге $\varphi \notin L^2(0, \infty)$ и, в силу теоремы X.6, потенциал V отвечает случаю предельной точки на ∞.

Пример 2 (потенциал V, полный на ∞ классически и не полный там квантовомеханически). Наш потенциал будет иметь вид

$$V(x) = \frac{1}{x^2} - x^4 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x),$$

где σ_k — очень узкие гладкие пики возрастающей высоты, так что $V(k)=k$ (рис. X.3). Поскольку V не ограничен сверху на ∞, движение классически полно. Из теоремы X.9 (см. ниже) следует, что потенциал $V_1(x)=x^{-2}-x^4$ квантовомеханически не полон на ∞, т. е. соответствующий гамильтониан H_1 не самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(0, \infty)$. Далее для доказательства несамосопряженности $H=H_1+\sum\sigma_k(x)$ на $C_0^\infty(0, \infty)$ в случае, когда пики σ_k достаточно узки, мы применим метод § X.2. Поскольку в силу теоремы X.10 (см. ниже) потенциал $V=$ $=V_1+\sum\sigma_k$ отвечает предельной точке в нуле, он должен отвечать предельной окружности на бесконечности. Физическая причина такого поведения в том, что при достаточно узких пиках квантовая частица может благодаря туннельному эффекту проходить сквозь них, тогда как классическая частица поворачивает обратно.

Для доказательства несамосопряженности в существенном H покажем, что на языке § X.2 сумма $\sum\sigma_k$ $(-d^2/dx^2+V_1)$-ограничена на $C_0^\infty(0, \infty)$ с относительной гранью, меньшей единицы. Это означает, что для некоторого $a<1$

$$\|(\sum\sigma_k)\varphi\|^2\leqslant a^2\|-\varphi''+V_1\varphi\|^2+b^2\|\varphi\|^2 \tag{X.16}$$

для всех $\varphi\in C_0^\infty(0, \infty)$. В силу симметричной формы теоремы Като — Реллиха (теорема X.13) это влечет за собой одновременную самосопряженность или несамосопряженность в существенном на $C_0^\infty(0, \infty)$ операторов $-d^2/dx^2+V_1$ и $-d^2/dx^2+V_1+\sum\sigma_k$.

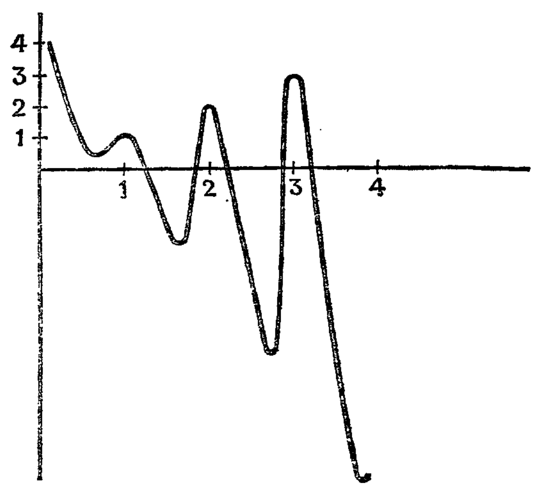

Рис. X.3. График V.

Чтобы доказать (X.16), используем следующую оценку типа оценки Соболева, которую в задаче 10 мы предлагаем доказать читателю. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $I_4^y = \{x \mid |x-y| \leqslant 1/4\}$ и $I_2^y = \{x \mid |x-y| \leqslant 1/2\}$. Тогда существует не зависящая от φ и y постоянная C, такая, что

$$\sup_{x \in I_4^y} |\varphi|^2 \leqslant C\left(\|\varphi''\|^2_{L^2(I_2^y)} + \|\varphi\|^2_{L^2(I_2^y)}\right). \tag{X.17}$$

Пусть $\sigma_k(x) \in C_0^2(I_4^k)$ таковы, что $V_1(x) + \sigma_k(x)$ достигает своего максимума на отрезке I_4^k в точке k и величина этого максимума равна k. Пусть $\varepsilon(k)$ — диаметр носителя $\sigma_k(x)$. Тогда для $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\|\sigma_k\varphi\|^2 \leqslant 4\varepsilon(k) k^8 \sup_{I_4^k} |\varphi|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4\varepsilon(k) k^8 \left(\|\varphi''\|^2_{L^2(I_2^k)} + \|\varphi\|^2_{L^2(I_2^k)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 8\varepsilon(k) k^8 \left[\|-\varphi'' + V_1\varphi\|^2_{L^2(I_2^k)} + \|V_1\varphi\|^2_{L^2(I_2^k)} + \|\varphi\|^2_{L^2(I_2^k)}\right],$$

поскольку $\|\psi_1\|^2 \leqslant \|\psi_1\|^2 + \|\psi_1 + 2\psi_2\|^2 = 2\|\psi_1 + \psi_2\|^2 + 2\|\psi_2\|^2$. Выберем теперь $\varepsilon(k)$ таким малым, чтобы $8\varepsilon(k) k^8 \leqslant 1/2$ и $\sup_{x \in I_2^k} |16\varepsilon(k) k^8 V_1(x)| \leqslant 1$. Тогда

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty \sigma_k\varphi\right\|^2 = \sum_{k=1}^\infty \|\sigma_k\varphi\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\|-\varphi'' + V_1\varphi\|^2_{L^2(I_2^k)} + 2\|\varphi\|^2_{L^2(I_2^k)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|-\varphi_1'' + V_1\varphi\|^2 + 2\|\varphi\|^2.$$

Это завершает доказательство неравенства (X.16).

Следующая теорема показывает, что если производные от V не слишком велики по сравнению с V, потенциал V классически полон на ∞ тогда и только тогда, когда он полон на ∞ квантовомеханически (доказательство см. в работах, указанных в Замечаниях).

Теорема X.9. Пусть V — дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция на $(0, \infty)$. Предположим, что $V(x) \to -\infty$ при $x \to \infty$ и что

$$\int_0^\infty \left(\frac{[(-V)^{1/2}]'}{(-V)^{3/2}}\right)' (-V)^{-1/4}\, dx < \infty$$

с некоторым c. Потенциал V отвечает случаю предельной точки на ∞ тогда и только тогда, когда $\int\limits_c^\infty (-V(x))^{-1/2}\,dx=\infty$, т. е. тогда и только тогда, когда потенциал V классически полон на ∞.

Пример 3. Пусть $c>0$. Из приведенной теоремы легко заключить, что $-d^2/dx^2-cx^\alpha$ отвечает случаю предельной точки на ∞ тогда и только тогда, когда $\alpha\leqslant 2$. Дальнейшее обсуждение этого примера см. в § X.5.

Обратимся теперь к вопросу полноты в нуле. Существует широкое разнообразие теорем, гарантирующих реализацию в нуле случая предельной точки либо предельной окружности. Для положительных потенциалов соответствующие условия дает следующая

Теорема X.10. Пусть V непрерывен и *положителен* около нуля. Если $V(x)\geqslant 3/4x^2$ около нуля, то $-d^2/dx^2+V(x)$ отвечает случаю предельной точки в нуле. Если около нуля $V(x)\leqslant \leqslant(3/4-\varepsilon)x^{-2}$ при некотором $\varepsilon>0$, то $-d^2/x^2+V(x)$ отвечает случаю предельной окружности.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $V(x)=c/x^2$, $c>0$. Два независимых решения уравнения $-\varphi''(x)+ +(c/x^2)\varphi(x)=0$ суть x^{α_1} и x^{α_2}, где $\alpha_1=(1+\sqrt{1+4c})/2$ и $\alpha_2= =(1-\sqrt{1+4c})/2$. Функция x^{α_1} всегда лежит в L^2 около нуля, но x^{α_2} лежит в L^2 около нуля тогда и только тогда, когда $\alpha_2>-1/2$, т. е. тогда и только тогда, когда $c<3/4$. Таким образом, уравнение $-\varphi''(x)+(c/x^2)\varphi(x)=0$ обладает двумя независимыми решениями, входящими в L^2 около нуля тогда и только тогда, когда $c<3/4$.

Теперь мы докажем теорему, используя идею сравнения. Предположим, что V и $\tilde{V}$ оба положительны на интервале $(0, b)$ и $V(x)\geqslant\tilde{V}(x)$. Предположим, что $A>0$; пусть u_A — решение уравнения $u''(x)=V(x)u(x)$, удовлетворяющее условиям $u(b/2)=2$, $u'(b/2)=-A$, и пусть $\tilde{u}_A$ — решение уравнения $\tilde{u}''(x)=\tilde{V}(x)\tilde{u}(x)$, удовлетворяющее условиям $\tilde{u}(b/2)=1$, $\tilde{u}'(b/2)= =-A/2$. Несложное рассуждение показывает, что $u_A(x)>\tilde{u}_A(x)$ для всех $x\in(0, b/2)$. Выбирая в качестве A два различных положительных числа, мы получим два независимых решения двух соответствующих уравнений. Это означает, что, если уравнение $\tilde{u}''(x)=\tilde{V}(x)\tilde{u}(x)$ имеет решение, не лежащее в L^2 около нуля, то же верно для уравнения $u''(x)=V(x)u(x)$. Таким образом, если $\tilde{V}$ отвечает случаю предельной точки около нуля, то же справедливо и для V, а если V отвечает случаю предельной окружности, то же справедливо и для $\tilde{V}$. В сочетании с результатами, относящимися к случаю $V(x)=cx^{-2}$, это доказывает теорему. ∎

Другое полезное условие того, что V отвечает случаю предельной окружности в нуле, дает требование убывания $V(x)$ при стремлении x к нулю. Доказательство намечено в задаче 7. Точно так же, как и в случае ∞ (пример 2), можно построить потенциал V, который не полон в нуле классически, но полон там квантовомеханически.

Следующий пример показывает, что сведения, почерпнутые из задач на полупрямой, можно применять в некоторых многомерных задачах.

Пример 4 (сферически симметричные потенциалы). Потенциал на $\mathbb{R}^n$, зависящий только от расстояния $r=\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ от начала координат, называется сферически симметричным. Пусть $D=C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ — множество функций класса C^∞ с компактными носителями, отделенными от нуля. Изучим $-\Delta+V(r)$ на D. Мы можем рассматривать каждый элемент $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ как функцию от r и $n-1$ переменных ξ на сфере S^{n-1}. В этих переменных

$$\|f\|_2^2=\int_0^\infty\left(\int_{S^{n-1}}|f(r,\ \xi)|^2\,d\Omega\right)r^{n-1}\,dr,$$

где $d\Omega$ — обычная мера на сфере. Пусть $\tilde{D}$ — множество функций из D, являющихся конечными линейными комбинациями произведений $f(r)\,g(\xi)$. Множество $\tilde{D}$ в силу теоремы II.10 тоже плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$, поскольку $L^2(\mathbb{R}^n)=L^2(\mathbb{R}^+,\ r^{n-1}dr)\otimes L^2(S^{n-1},\ d\Omega)$. На функции вида $f(r)\,g(\xi)$ оператор $-\Delta+V(r)$ действует следующим образом:

$$(-\Delta+V(r))\,f(r)\,g(\xi)=$$
$$=\left(-\frac{d^2}{dr^2}+V(r)-\frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}\right)f(r)g(\xi)-\frac{1}{r^2}f(r)\,Bg(\xi),$$

где B — оператор Лапласа — Бельтрами на $L^2(S^{n-1})$. Оказывается (см. Замечания), что B в существенном самосопряжен и отрицателен на $C^\infty(S^{n-1})$, обладает только точечным спектром конечной кратности и все его собственные функции бесконечно дифференцируемы. Обозначим через K_l собственное подпространство, отвечающее l-му собственному значению $\varkappa_l$ (мы располагаем собственные значения в убывающем порядке, начиная с $\varkappa_0=0$). Тогда

$$L^2(\mathbb{R}^+, r^{n-1}dr)\otimes L^2(S^{n-1}, d\Omega)=\bigoplus_{l=0}^{\infty} L_l,$$

где

$$L_l=L^2(\mathbb{R}^+, r^{n-1}dr)\otimes K_l.$$

Положим $D_l=\tilde{D}\cap L_l$; тогда

$$(-\Delta+V(r))\upharpoonright D_l=\left(-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}+V(r)-\frac{\varkappa_l}{r^2}\right)\otimes I.$$

Для того чтобы на основе теоремы VIII.33 и задачи 1а вывести самосопряженность в существенном на $\tilde{D}$ и, следовательно, на D оператора $-\Delta+V(r)$, нужно только доказать, что для каждого l

$$-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{(n-1)}{r}\frac{d}{dr}+V(r)-\frac{\varkappa_l}{r^2}$$

самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)\subset L^2(\mathbb{R}^+, r^{n-1}dr)$.

Пусть U: $L^2(\mathbb{R}^+, r^{n-1}dr)\to L^2(\mathbb{R}^+, dr)$—унитарный оператор, действующий по формуле $\varphi(r)\mapsto r^{(n-1)/2}\varphi(r)$. Этот оператор переводит $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ в себя и

$$U\left(-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}+V(r)-\frac{\varkappa_l}{r^2}\right)U^{-1}=$$
$$=-\frac{d^2}{dr^2}+V(r)+\left(\frac{(n-1)(n-3)}{4}-\varkappa_l\right)\frac{1}{r^2}. \qquad \text{(X.18a)}$$

Каждое $\varkappa_l$ меньше или равно нулю, поэтому в силу теоремы X.10 каждый из этих операторов самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, если

$$V(r)+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\geqslant\frac{3}{4r^2}. \qquad \text{(X.18b)}$$

С другой стороны, если

$$0\leqslant V(r)+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\leqslant\frac{c}{r^2}, \qquad c<\frac{3}{4}, \qquad \text{(X.18c)}$$

то один или более из операторов в (X.18a) не самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. В итоге доказана следующая

Теорема X.11. Пусть $V(r)$—непрерывный сферически симметричный потенциал на $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Если $V(r)$ удовлетворяет (X.18b), то $-\Delta+V(r)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Если $V(r)$ удовлетворяет (X.18c), то $-\Delta+V(r)$ не самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.

Отметим, что эта теорема, в частности, показывает, что $-\Delta$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ тогда и только тогда, когда $n \geqslant 4$. При $n=4$ это довольно тонкий факт, но при $n \geqslant 5$ он доказывается не очень сложно (задача 9). Первая часть теоремы X.11 обобщается на нецентральные потенциалы (см. § X.4).

X.2. Возмущения самосопряженных операторов

В этом разделе доказывается несколько теорем, утверждающих самосопряженность $A+B$ при условии, что A самосопряжен, а B не слишком велик по сравнению с A. Эти теоремы находят важные применения в квантовой механике. Сначала определим, что подразумевается под «малым» возмущением.

Определение. Пусть A и B — плотно определенные линейные операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Предположим, что

(i) $D(B) \supset D(A)$;

(ii) для некоторых a и b из $\mathbb{R}$ и всех $\varphi \in D(A)$

$$\|B\varphi\| \leqslant a\|A\varphi\| + b\|\varphi\|. \tag{X.19a}$$

В таком случае говорят, что оператор B **ограничен относительно** A или просто A**-ограничен**. Точная нижняя грань всех таких a называется **относительной гранью оператора** B **по отношению к** A или просто A**-гранью**. Если относительная грань равна нулю, то говорят, что B **бесконечно мал** по отношению к A, и пишут $B \ll A$. Отметим, что обычно константу b нужно выбирать побольше, а константу a поменьше.

Иногда удобно заменить требование (ii) другим требованием:

(iii) для некоторых $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ и для всех $\varphi \in D(A)$

$$\|B\varphi\|^2 \leqslant \tilde{a}^2\|A\varphi\|^2 + \tilde{b}^2\|\varphi\|^2. \tag{X.19b}$$

Если выполняется (iii), то (ii) выполняется тоже, причем $a=\tilde{a}$, $b=\tilde{b}$. Если же справедливо (ii), то можно установить справедливость (iii) с $\tilde{a}^2=(1+\varepsilon)a^2$, $\tilde{b}^2=(1+\varepsilon^{-1})b^2$ при каждом $\varepsilon > 0$. Таким образом, точная нижняя грань всех a в (ii) равна точной нижней грани всех $\tilde{a}$ в (iii). Отметим, что для проверки неравенства (ii) или (iii) его достаточно доказать на существенной области оператора A.

Основной результат о возмущениях дает следующая

Теорема X.12 (Като — Реллих). Предположим, что оператор A самосопряжен, B симметричен и A-ограничен с A-гранью $a < 1$. Тогда $A+B$ самосопряжен на $D(A)$ и самосопряжен в существенном на любой существенной области оператора A. Более того, если A ограничен снизу числом M, то $A+B$ ограничен