$= {}^1/_4\,(A+A^\dagger)^4$. Пользуясь неравенством

$$\| A_1^\# \ldots A_n^\# \psi \| \leqslant c_n \| X^{n/2} \psi \| \tag{X.28}$$

(где каждый $A_i^\#$ равен либо A, либо $A^\dagger$), легко доказать, что $\| Y\psi \| \leqslant d \| X^2 \psi \| \leqslant dc^{-1} \| (X+Z)\psi \|$. Положив $c = 2d$, выведем с помощью теоремы Като—Реллиха самосопряженность в существенном $X+Y+Z$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Этим завершается второй шаг приема Конради. Наконец, давайте докажем, что для некоторой постоянной e

$$Z^2 \leqslant (X+Y+Z)^2 + e. \tag{X.29}$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned}(X+Y+Z)^2 &= (X+Y)^2 + Z^2 + Z(X+Y) + (X+Y)Z = \\ &= (X+Y)^2 + Z^2 + 2cX^3 + 2cXYZ + 2c[X, [X, Y]] \geqslant \\ &\geqslant Z^2 + 2cX^3 + 2c[X, [X, Y]],\end{aligned}$$

где надо воспользоваться неотрицательностью Y, равенством $[X, [X, Y]] = X^2Y + YX^2 - 2XYX$ и учесть, что все проделанные манипуляции законны в применении к векторам из $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Наконец, заметим, что $[X, [X, Y]]$ можно записать как сумму 16 мономов вида $A_1^\# A_2^\# A_3^\# A_4^\#$. Таким образом, применяя теорему X.18, неравенство (X.28) и симметричность $[X, [X, Y]]$, заключаем, что

$$-[X, [X, Y]] \leqslant fX^2 \leqslant X^3 + (f+1).$$

Это доказывает (X.29) и позволяет с помощью теоремы Вюста вывести самосопряженность в существенном оператора $X+Y = X+Y+Z-Z$ на D.

Еще раз прием Конради мы используем в примере 3 § X.9 (см. также задачу 22).

X.3. Положительность и самосопряженность I: квадратичные формы

Выше уже было доказано несколько утверждений о положительных или полуограниченных операторах; см., например, теоремы X.12 и X.17. В этом и следующем разделах мы воспользуемся двумя различными понятиями положительности для доказательства новых теорем о самосопряженности. В настоящем разделе применяется понятие положительного оператора и техника квадратичных форм. В следующем—тот факт, что при обычной в приложениях реализации гильбертова пространства в виде $L^2(M, d\mu)$ оно содержит выделенный конус неотрицательных почти всюду функций. Другие приложения условий положительности будут появляться и дальше в этой главе, например в теореме X.55, и в последующих главах, например в § XIII.11.

Из первого следствия теоремы X.1 вытекает, что полуограниченный симметрический оператор A обладает равными индексами дефекта, и потому в силу теоремы фон Неймана такой оператор всегда имеет самосопряженные расширения. Среди них существует выделенное расширение, называемое **расширением по Фридрихсу**, которое получается из квадратичной формы, порождаемой оператором A.

Теорема X.23 (расширение по Фридрихсу). **Пусть A — положительный симметрический оператор и $q(\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ для $\varphi, \psi \in D(A)$. Тогда q — замыкаемая квадратичная форма и ее замыкание $\hat{q}$ служит квадратичной формой единственного самосопряженного оператора $\hat{A}$. Оператор $\hat{A}$ является положительным расширением A, и нижняя граница его спектра есть нижняя грань формы q. Далее, $\hat{A}$ — единственное самосопряженное расширение A, область определения которого содержится в области определения формы $\hat{q}$.**

Доказательство. Пусть $(\varphi, \psi)_{+1} = q(\varphi, \psi) + (\varphi, \psi)$. Тогда $(\cdot, \cdot)_{+1}$ — внутреннее произведение на $D(A)$, так что можно пополнить $D(A)$ по $(\cdot, \cdot)_{+1}$ и получить гильбертово пространство $\mathscr{H}_{+1}$. Ясно, что q продолжается до замкнутой формы $\hat{q}$ на $\mathscr{H}_{+1}$, но для доказательства замкнутости $\hat{q}$ на $\mathscr{H}$ необходимо показать, что $\mathscr{H}_{+1}$ — это подпространство в $\mathscr{H}$. Пусть $i\colon D(A) \to \mathscr{H}$ — тождественное отображение. Поскольку $\|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_{+1}$, i ограничено и в силу теоремы об ограниченном линейном отображении (теорема I.7) продолжается до ограниченного отображения $\hat{i}$: $\mathscr{H}_{+1} \to \mathscr{H}$ с нормой, меньшей или равной единице. Покажем, что $\hat{i}$ инъективно. Пусть $\hat{i}(\varphi) = 0$. Тогда существуют такие $\varphi_n \in D(A)$, что $\|\varphi - \varphi_n\|_{+1} \to 0$ и $\|\hat{i}(\varphi_n)\| = \|\varphi_n\| \to 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{+1} &= \lim_{n,\, m \to \infty} (\varphi_n, \varphi_m)_{+1} = \\ &= \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \{(\varphi_m, A\varphi_n) + (\varphi_m, \varphi_n)\} = 0, \end{aligned}$$

ибо $\varphi_n \in D(A)$ и $\|\varphi_m\| \to 0$. Таким образом, $\hat{i}$ инъективно и, значит, $\mathscr{H}_{+1} \subset \mathscr{H}$. Заметьте, что в доказательстве корректности определения $\hat{i}$ мы пользуемся только положительностью q, но при доказательстве его инъективности применяется предположение о том, что q порождается оператором.

Поскольку $\hat{q}$ замкнута и симметрична, теорема VIII.15 гарантирует существование единственного самосопряженного оператора $\hat{A}$, такого, что $D(\hat{A}) \subset Q(\hat{q})$ и $\hat{q}(\varphi, \psi) = (\varphi, \hat{A}\psi)$, если $\varphi \in Q(\hat{q})$ и $\psi \in D(\hat{A})$. Предположим теперь, что $\varphi \in D(A)$. Тогда благодаря непрерывности $\hat{q}$

$$(A\varphi, \psi) = \hat{q}(\varphi, \psi) = (\varphi, \hat{A}\psi).$$

Поскольку это справедливо для всех $\psi \in D(\hat{A})$, мы заключаем, что $\varphi \in D(\hat{A}^*) = D(\hat{A})$ и $\hat{A}^*\varphi = \hat{A}\varphi = A\varphi$. Следовательно, $\hat{A}$ есть расширение A. Аналогичное доказательство показывает, что если A_e — любое симметрическое расширение A, для которого $D(A_e) \subset Q(\hat{q})$, то $\hat{A}$ расширяет A_e. Таким образом, если A_e самосопряжен, то $\hat{A} = A_e$.

Легкое доказательство утверждения о спектре A мы оставляем читателю. ∎

В § VIII.6 мы доказали, что квадратичная форма $q(\varphi, \psi) = \varphi(0)\psi(0)$ на $C_0^\infty(\mathbb{R})$ незамыкаема. В терминологии предыдущего доказательства причина этого в том, что $\mathscr{H}_{+1}$ совпадает с $\{\langle\psi, a\rangle \mid \psi \in L^2(\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}\}$, где a — «значение» ψ в нуле, и потому отображение i: $\langle\psi, a\rangle \to \psi$ не взаимно однозначно.

Две привлекательные особенности расширений по Фридрихсу состоят в том, что сохраняется нижняя граница и область определения оператора $\hat{A}$ содержится в области определения формы $\hat{q}$. В некоторых случаях об области определения $\hat{A}$ можно сказать еще больше; см. Замечания и теорему X.32.

Пример 1. Пусть $A = -d^2/dx^2$ на $C_0^\infty(0, 1)$. Тогда

$$\|\psi\|_{+1}^2 = \|d\psi/dx\|^2 + \|\psi\|^2.$$

Если $\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{+1}} \psi$, то ψ обладает производной из L^2. Отсюда следует, что

$$|\psi_n(a) - \psi(a)| \to 0$$

для каждого $a \in [0, 1]$. Таким образом, для всех $\varphi \in D(\hat{A})$ имеем $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$, т. е. расширение по Фридрихсу $\hat{A}$ оператора $-d^2/dx^2$ является самосопряженным расширением с граничными условиями $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$. Спектр этого расширения равен $\{(n\pi)^2 \mid n = 1, 2, \ldots\}$, тогда как $\{\sin(n\pi x)\}$ — соответствующие собственные функции. Поскольку $\hat{A}$ ограничен снизу числом π, это же должно быть верно и в отношении исходной формы, порождаемой оператором A. Таким образом, интегрируя по частям, мы выводим классическое неравенство

$$\int_0^1 |\varphi'(x)|^2\, dx \geqslant \pi^2 \int_0^1 |\varphi(x)|^2\, dx$$

для функций $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$. Заметим, что тот же результат можно получить с помощью прямого вычисления с использованием рядов Фурье. Далее подчеркнем, что другое самосопряженное расширение A может иметь меньшую нижнюю границу, чем $\hat{A}$. Например, нижняя граница самосопряженного расширения, отвечающего граничным условиям $\varphi'(0) = 0 = \varphi'(1)$, равна нулю. С другой стороны, самосопряженные расширения, отличные от расширения по Фридрихсу, могут иметь одинаковую с ним нижнюю границу. Например, собственные значения самосопряженного расширения $\tilde{A}$, отвечающего граничным условиям $\varphi(0) = -\varphi(1)$, $\varphi'(0) = -\varphi'(1)$, равны $(n\pi)^2$, $n = 1, 3, \ldots$, и двукратно вырождены.

Пусть A_0 — расширение A, отвечающее граничным условиям $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = -\varphi'(1)$. Читатель легко убедится, что индексы дефекта A_0 равны $\langle 1, 1 \rangle$. Ясно, что и $\hat{A}$, и $\tilde{A}$ расширяют A_0. Поэтому даже в случае индексов дефекта $\langle 1, 1 \rangle$ самосопряженное расширение, отличное от фридрихсова, может иметь одинаковую с ним нижнюю границу.

Пример 2 (слабые решения уравнений в частных производных). Пусть Ω — открытая область в $\mathbb{R}^n$, и пусть A — оператор $-\Delta + I$ с областью определения $C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Этот оператор симметричен и ограничен снизу единицей. Если $\hat{A}$ — расширение A по Фридрихсу, то $\hat{A} \geqslant I$ и $\operatorname{Ran}(\hat{A}) = L^2(\Omega)$. Таким образом, для любого $g \in L^2(\Omega)$ существует такое $f \in D(\hat{A})$, что $\hat{A}f = g$. Поэтому если $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, то

$$(\varphi, g) = (\varphi, \hat{A}f) = (\hat{A}\varphi, f) = ((-\Delta + I)\varphi, f),$$

т. е. для каждого $g \in L^2(\Omega)$ уравнение

$$(-\Delta + I) f = g$$

имеет слабое решение $f \in L^2(\Omega)$. Поскольку $\Delta f = (f - g) \in L^2(\Omega)$, можно воспользоваться леммой Соболева (§ IX.6) и показать, что f в определенном смысле регулярна. Если $g \in C_0^\infty(\Omega)$, то последовательное применение Δ к уравнению $\Delta f = f - g$ доказывает, что $f \in \bigcap_{m=1}^{\infty} W_m(\Omega)$, так что в этом случае из леммы Соболева вытекает бесконечная дифференцируемость f.

С другим применением расширения по Фридрихсу можно познакомиться в задаче 25, где читателю предлагается вывести условия разрешимости проблемы моментов Стильтьеса, представляющие собой аналог условий Гамбургера на полупрямой $[0, \infty)$ вместо $(-\infty, \infty)$. В этой задаче, как и в приведенном выше примере, существенно то, что нижняя граница фридрихсова расширения оператора A совпадает с нижней границей A. Это наводит на мысль исследовать нижние границы других самосопряженных расширений.

Предложение. Пусть A — полуограниченный симметрический оператор с конечными индексами дефекта. Тогда любое самосопряженное расширение оператора A ограничено снизу (возможно, величиной, меньшей исходной нижней границы).

Доказательство. Пусть $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение A с соответствующей проекторнозначной мерой P_Ω. Предположим, что индексы дефекта A равны n. Тогда по теореме X.2 $D(\tilde{A}) = D(A) + S$, где S — некоторое n-мерное векторное пространство. Пусть K меньше нижней границы A, равной M. Тогда $\dim P_{(K,\,M)} \leqslant n$. Иначе в $D(A) \cap \operatorname{Ran} P_{(K,\,M)}$ можно было бы найти ненулевой вектор, что противоречит ограниченности снизу оператора A величиной M. Следовательно, $\dim P_{(-\infty,\,M)} \leqslant n$ и $\tilde{A}$ ограничено снизу. ∎

При бесконечных индексах дефекта полуограниченный симметрический оператор может иметь не ограниченные снизу самосопряженные расширения (задача 26). Но даже и в этом случае всегда существует множество ограниченных снизу самосопряженных расширений. На самом деле, если сам A не самосопряжен в существенном, то у него всегда есть отличные от фридрихсова ограниченные снизу расширения.

Теорема X.24. Пусть A — симметрический ограниченный снизу оператор. Если единственным ограниченным снизу самосопряженным расширением A является расширение по Фридрихсу $\hat{A}$, то A самосопряжен в существенном.

Доказательство. В соответствии с приведенным выше предложением нужно рассмотреть только случай бесконечных индексов дефекта. Предположим, что $\hat{A}$ — расширение A по Фридрихсу, и пусть $\tilde{A}$ — симметрическое расширение A, содержащееся в $\hat{A}$ и имеющее индексы дефекта, равные 1 (по поводу метода построения такого расширения см. теорему X.2). Тогда $\tilde{A}$ ограничен снизу и в силу предложения все его самосопряженные расширения также ограничены снизу. По этой причине A имеет более одного ограниченного снизу самосопряженного расширения, если только его индексы дефекта не равны нулю. ∎

Другое применение положительности и техники квадратичных форм можно найти в следующей теореме фон Неймана. Операторное доказательство этой теоремы, данное самим фон Нейманом, не использовало квадратичных форм.

Теорема X.25. Пусть A — *замкнутый* плотно определенный оператор, и пусть

$$D(A^*A)=\{\psi\in D(A)\mid A\psi\in D(A^*)\}.$$

Определим на $D(A^*A)$ оператор A^*A формулой $(A^*A)\psi=A^*(A\psi)$. Тогда A^*A самосопряжен.

Доказательство. Определим на $D(A)\times D(A)$ формулой $b(\varphi,\psi)=(A\varphi, A\psi)$ форму $b(\varphi,\psi)$. Она неотрицательна, и, поскольку оператор A замкнут, b замкнута как квадратичная форма. Пусть B — самосопряженный оператор, ассоциированный с b в соответствии с теоремой VIII.15. Покажем, что $B=A^*A$. При этом следует учитывать, что a priori не очевидно, что в $D(A^*A)$ есть хоть один вектор, отличный от нуля.

Пусть $\mathcal{H}_{+1}\subset\mathcal{H}\subset\mathcal{H}_{-1}$ — шкала пространств, определяемая с помощью b, как в доказательстве теоремы VIII.15. Определим $\hat{A}^*\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}_{-1}$ соотношением $(\hat{A}^*\varphi)(\psi)=(\varphi, A\psi)$. В силу определения сопряженного оператора $D(A^*)=\{\varphi\mid \hat{A}^*\varphi\in\mathcal{H}\}$ и $A^*=\hat{A}^*\restriction D(A^*)$. Пусть $\hat{B}\colon \mathcal{H}_{+1}\to\mathcal{H}_{-1}$ — естественное отображение, задаваемое равенством $(\hat{B}\varphi,\psi)=b(\varphi,\psi)$. Из доказательства теоремы VIII.15 следует, что $D(B)=\{\varphi\in\mathcal{H}_{+1}\mid \hat{B}\varphi\in\mathcal{H}\}$ и $B=\hat{B}\restriction D(B)$. Пусть теперь $\varphi,\ \psi\in\mathcal{H}_{+1}$. Тогда

$$[\hat{A}^*(A\varphi)](\psi)=(A\varphi,\ A\psi)=(\hat{B}\varphi)(\psi),$$

так что $\hat{B}=\hat{A}^*A$. В итоге

$$\begin{aligned} D(B)&=\{\varphi\in\mathcal{H}_{+1}\mid \hat{B}\varphi\in\mathcal{H}\}=\\ &=\{\varphi\in\mathcal{H}_{+1}\mid A^*(A\varphi)\in\mathcal{H}\}=\\ &=\{\varphi\in\mathcal{H}_{+1}\mid A\varphi\in D(A^*)\}=D(A^*A)\end{aligned}$$

и $B=\hat{B}\restriction D(B)=A^*A$. ∎

Из проведенного доказательства вытекает такое

Следствие. Пусть A — замкнутый оператор. Тогда любая существенная область определения A является существенной областью определения формы оператора A^*A.

Следствие. Если оператор A симметрический и A^2 плотно определен, то A^*A — фридрихсово расширение A^2.

Пример 3. Пусть $A=i\,d/dx$ с областью определения

$$D(A)=\{\varphi\mid\varphi\in AC[0,1],\ \varphi(0)=\varphi(1)=0\}.$$

Мы уже видели, что

$$D(A^*) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0, 1]\}$$

и $A^*\varphi = i\,d\varphi/dx$. Из определений $D(AA^*)$ и $D(A^*A)$ и доказанной выше теоремы сразу следует, что A^*A — самосопряженное расширение $-d^2/dx^2$ с граничными условиями $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$, а AA^* — самосопряженное расширение $-d^2/dx^2$ с граничными условиями $\varphi'(0) = 0 = \varphi'(1)$.

Пример 4 (операторы Шредингера в присутствии магнитных полей). Методы квадратичных форм можно использовать для определения самосопряженных гамильтонианов вида (X.26) без явного описания операторных областей определения. Рассмотрим сначала случай $V = 0$. Пусть $\mathbf{A} \in L^2(\mathbb{R}^3)_{\text{loc}}$. Пусть T_j — замыкание симметрического оператора $i\,\partial/\partial x_j + eA_j/c$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Простое обобщение теоремы X.25 показывает, что $H = \sum_{j=1}^{3} T_j^* T_j$ можно определить как самосопряженный оператор на

$$\left\{\psi \in \bigcap_{j=1}^{3} D(T_j) \,\middle|\, T_j\psi \in D(T_j^*)\right\}.$$

Тот же метод работает, если $V \geqslant 0$ и $V \in L^1_{\text{loc}}$. В любом случае

$$Q(H) = \left(\bigcap_{j=1}^{3} D(T_j)\right) \cap Q(V).$$

В следующем разделе мы опишем $D(-\Delta + V)$, когда $V \geqslant 0$ и $V \in L^1_{\text{loc}}$.

В завершение этого раздела соберем в одном месте некоторые факты о строго положительных симметрических операторах, которые мы уже доказали. Разумеется, каждый полуограниченный симметрический оператор становится строго положительным после прибавления к нему подходящей постоянной.

Теорема X.26. Пусть A — строго положительный симметрический оператор, т. е. $(A\varphi, \varphi) \geqslant c(\varphi, \varphi)$ для всех $\varphi \in D(A)$ и некоторого $c > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) A самосопряжен в существенном;

(b) $\operatorname{Ran}(A)$ плотна;

(c) $\operatorname{Ker}(A^*) = \{0\}$;

(d) A обладает только одним полуограниченным самосопряженным расширением.