Таким образом, $-D^2+V$ и $-\tilde{D}^2+V$ формально унитарно эквивалентны и калибровочное преобразование $\mathbf{a} \mapsto \tilde{\mathbf{a}}$ не изменяет магнитного поля. Если λ не принадлежит C^∞, то $-\tilde{D}^2+V$ может иметь в качестве своей существенной области $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, тогда как для $-D^2+V$ это множество не является существенной областью (скорее уж таковым будет множество $e^{i\lambda}(C_0^\infty)$). Таким образом, интересуясь самосопряженностью в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, нужно быть готовым к переходу к удобной калибровке. Решая уравнение в частных производных $-\Delta\lambda = = \operatorname{div} \mathbf{a}$, всегда можно найти $\tilde{\mathbf{a}}$ с $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{a}} = 0$, так что $\mathbf{a}$ и $\tilde{\mathbf{a}}$ связаны калибровочным преобразованием.

Следующая теорема доказывается в одной работе, указанной в Замечаниях.

Теорема X.35. Пусть V удовлетворяет условиям теоремы X.29. Предположим, что $\tilde{\mathbf{a}} \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $q \geqslant 4$, $q > n$ и $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{a}} = 0$ (в смысле обобщенных функций). Тогда оператор

$$-\sum_{j=1}^{n} (\partial_j - ia_j)^2 + V$$

самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

X.5. Коммутаторная теорема

Многие факты о самосопряженности, обсуждавшиеся до сих пор, относились только к полуограниченным операторам и формам. Кроме того, и в теореме Като—Реллиха и КЛМН-теореме существенно, что возмущения положительных операторов, о которых в них идет речь, полуограничены. В этом разделе доказывается несколько теорем, полезных при доказательстве самосопряженности неполуограниченных операторов. В конце раздела с помощью этих теорем изучается гамильтониан, описывающий эффект Штарка, т. е. гамильтониан атома в постоянном электрическом поле.

Хотя оператор A, самосопряженность которого мы хотим установить, не будет полуограниченным, мы будем предполагать, что его можно различными способами оценить с помощью вспомогательного самосопряженного оператора N, который полуограничен. На протяжении всего этого раздела мы считаем, что $N \geqslant I$, и обозначаем через $\mathcal{H}_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, пополнение $D(N^{n/2})$ по норме

$$\|\psi\|_n = \|N^{n/2}\psi\|. \tag{X.50}$$

Таким образом, у нас возникает шкала пространств $\ldots \supset \mathcal{H}_n \supset \supset \mathcal{H}_{n+1} \ldots$, обсуждавшаяся в дополнении к § IX.4 и впервые введенная для $n=0, \pm 1$ в § VIII.6. Напомним, что если $n>0$, то $\mathcal{H}_n = D(N^{n/2})$, и что $\mathcal{H}_{-n}$ можно отождествить с $\mathcal{H}_n^*$.

Предположим, что $a(\cdot, \cdot)$ — квадратичная форма на $Q(a) = D(N^{n/2})$, удовлетворяющая неравенству

$$|a(\varphi, \psi)| \leqslant c \|\varphi\|_n \|\psi\|_n. \tag{X.51}$$

Тогда для каждого $\varphi \in \mathcal{H}_n$ существует такой $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}_{-n}$, что $a(\varphi, \psi) = \tilde{\varphi}(\psi)$ при всех $\psi \in \mathcal{H}_n$. Отображение $\varphi \overset{A}{\longmapsto} \tilde{\varphi}$ линейно и ограничено, так что $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{-n})$. Обратно, любой оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{-n})$ порождает квадратичную форму $a(\cdot, \cdot)$ на $Q(a) = D(N^{n/2})$, удовлетворяющую (X.51). Сопряженный с A оператор A^* ограничен и действует из $\mathcal{H}_{-n}^*$ в $\mathcal{H}_n^*$. Но, поскольку $\mathcal{H}_{-n}^*$ и $\mathcal{H}_n^*$ естественно изоморфны $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{H}_{-n}$, A^* можно естественным образом рассматривать как ограниченный оператор из $\mathcal{H}_n$ в $\mathcal{H}_{-n}$. Если $A = A^*$, мы говорим, что оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{-n})$ **симметричен.** Ясно, что это эквивалентно симметричности соответствующей формы $a(\cdot, \cdot)$.

Имея $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{-n})$, можно определить $[N, A]$ как оператор из $\mathcal{H}_{n+2}$ в $\mathcal{H}_{-n-2}$, действующий по формуле

$$[N, A]\psi = N(A\psi) - A(N\psi), \quad \psi \in \mathcal{H}_{n+2}. \tag{X.52}$$

Коммутатор $[N, A]$ представляет собой ограниченный оператор из $\mathcal{H}_{n+2}$ в $\mathcal{H}_{-n-2}$, поскольку N — ограниченный оператор из $\mathcal{H}_{n+2}$ в $\mathcal{H}_n$ и из $\mathcal{H}_{-n}$ в $\mathcal{H}_{-n-2}$. Если $[N, A]\psi \in \mathcal{H}_{-n}$ для каждого $\psi \in \mathcal{H}_{n+2}$ и

$$\|[N, A]\psi\|_{-n} \leqslant c \|\psi\|_n, \tag{X.53}$$

то, согласно теореме I.7, $[N, A]$ продолжается до ограниченного оператора из $\mathcal{H}_n$ в $\mathcal{H}_{-n}$. В таком случае это продолжение мы по-прежнему обозначаем через $[N, A]$.

Наконец, имея на $D(N^{n/2})$ квадратичную форму $a(\cdot, \cdot)$ или, что то же самое, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{-n})$, определим на $\mathcal{H}$ ассоциированный оператор $\hat{A}$ соотношениями

$$D(\hat{A}) = \{\psi \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}_n \mid A\psi \in \mathcal{H}\},$$
$$\hat{A}\psi = A\psi, \quad \psi \in D(\hat{A}).$$

В общем случае область $D(\hat{A})$ не обязана быть плотной в $\mathcal{H}$, и в задаче 34 описан оператор $\hat{A}$, у которого $D(\hat{A})$ состоит только из нулевого вектора.

Теперь мы можем сформулировать главную теорему этого раздела. Далее (теорема X.37) мы докажем чисто «операторный» аналог этой теоремы.

Теорема X.36 (коммутаторная теорема). Пусть N — самосопряженный оператор и $N \geqslant I$. Предположим, что A — симметрический оператор, лежащий в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$, где $\mathscr{H}_n$ — пространство из шкалы, связанной с N. Предположим еще, что $[N, A] \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$. Тогда

(a) Ассоциированный оператор $\hat{A}$ плотно определен.

(b) $D(N) \subset D(\hat{A})$ и для всех $\psi \in D(N)$

$$\|\hat{A}\psi\| \leqslant c\|N\psi\|. \tag{X.54}$$

(c) Оператор $\hat{A}$ самосопряжен в существенном на любой существенной области оператора N.

Для ясности сформулируем теорему X.36 без ссылок на шкалу $\mathscr{H}_n$.

Теорема X.36′. Пусть N — самосопряженный оператор и $N \geqslant I$. Предположим, что $a(\cdot, \cdot)$ — квадратичная форма с областью определения $Q(a) = Q(N)$, так что

(i) $|a(\psi, \varphi)| \leqslant c_1 \|N^{1/2}\varphi\| \|N^{1/2}\psi\|$ для всех $\varphi, \psi \in D(N^{1/2})$.

(ii) $|a(N\psi, \varphi) - a(\psi, N\varphi)| \leqslant c_2 \|N^{1/2}\varphi\| \|N^{1/2}\psi\|$ для всех $\varphi, \psi \in D(N^{3/2})$.

Тогда

(a, b′) Для всех $\psi \in D(N)$ и всех $\varphi \in D(N^{1/2})$

$$|a(\varphi, \psi)| \leqslant c\|\varphi\|\|N\psi\|,$$

так что $\psi \in D(\hat{A})$, $a(\varphi, \psi) = (\varphi, \hat{A}\psi)$ при всех $\varphi \in D(N^{1/2})$ и $\hat{A}\psi$ удовлетворяет (X.54).

(c) Оператор $\hat{A}$ самосопряжен в существенном на любой существенной области оператора N.

Начнем доказательство с двух общих лемм о шкалах пространств. Обозначим норму в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_m)$ через $\|\cdot\|_{n,m}$.

Лемма 1. Если $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_m)$ и $[N, A] \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_m)$, то

$$A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{n+2}, \mathscr{H}_{m+2}).$$

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathscr{H}_{n+2}$. Вообще говоря, $NA\psi \in \mathscr{H}_{m-2}$, но, поскольку $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_m)$ и $[N, A] \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_m)$, имеем $AN\psi \in \mathscr{H}_m$ и $(NA\psi - AN\psi) \in \mathscr{H}_m$. В итоге $NA\psi \in \mathscr{H}_m$ и

$$\begin{aligned}\|A\psi\|_{m+2} = \|NA\psi\|_m &\leqslant \|[N, A]\psi\|_m + \|AN\psi\|_m \leqslant \\ &\leqslant \|[N, A]\|_{n,m}\|\psi\|_n + \|A\|_{n,m}\|N\psi\|_n \leqslant \\ &\leqslant (\|[N, A]\|_{n,m} + \|A\|_{n,m})\|\psi\|_{n+2},\end{aligned}$$

так что $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{n+2}, \mathscr{H}_{m+2})$ и

$$\|A\|_{n+2,\, m+2} \leqslant \|[N, A]\|_{n,\, m} + \|A\|_{n,m}. \ \blacksquare$$

Лемма 2. Если $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$ и $[N, A] \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$, то $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+2}, \mathscr{H})$, т. е. $D(\hat{A}) \supset D(N)$ и справедливо (X.54).

Доказательство. В силу леммы 1, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+3}, \mathscr{H}_{+1})$. Интерполируя $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+3}, \mathscr{H}_{+1})$ и $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$ (см. дополнение к § IX.4), заключаем, что $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+2}, \mathscr{H})$. $\blacksquare$

Доказательство теоремы X.36. В силу леммы 2 выполняются (a) и (b). Предположим, что доказана самосопряженность в существенном оператора $\hat{A}$ на $D(N)$. Пусть C — существенная область оператора N. В силу (X.54), $\overline{\hat{A} \upharpoonright C} \supset \hat{A} \upharpoonright D(N)$, так что $\hat{A}$ самосопряжен в существенном на C и пункт (c) тоже выполнен. Таким образом, нужно только доказать самосопряженность в существенном $\hat{A} \upharpoonright D(N)$. Обозначим $\hat{A} \upharpoonright D(N)$ через B и предположим, что $\psi \in D(B^*)$. Тогда $\varphi \equiv N^{-1}\psi \in D(N) \subset D(B)$. Вычисляем:

$$\begin{aligned}|\operatorname{Im}(\varphi, B^*\psi)| &= \frac{1}{2}|i(\varphi, B^*\psi) - i(B^*\psi, \varphi)| = \\ &= \frac{1}{2}|i(A\varphi, N\varphi) - i(N\varphi, A\varphi)| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|[N, A]\|_{+1,\,-1}\|\varphi\|_{+1}^2 \leqslant \\ &\leqslant \frac{c}{2}\|\varphi\|_{+1}^2 = \frac{c}{2}(\varphi, \psi),\end{aligned}$$

где $c \geqslant \|[N, A]\|_{+1,\,-1}$. Таким образом,

$$\operatorname{Im}(\varphi, (\pm B^* + ic)\psi) \geqslant \frac{c}{2}(\varphi, \psi),$$

поскольку (φ, ψ) вещественно и неотрицательно. Следовательно, если $(B^* \mp ic)\psi = 0$, то $(\varphi, \psi) = (\psi, N^{-1}\psi) \leqslant 0$. Поскольку N^{-1} положителен и его ядро тривиально, $\psi = 0$, т. е. $\operatorname{Ker}(B^* \pm ic) = \{0\}$, так что в силу основного критерия самосопряженности B самосопряжен в существенном. $\blacksquare$

Важное приложение теоремы X.36 будет описано в конце этого раздела, а здесь мы рассмотрим несколько примеров, показывающих, что некоторые из условий теоремы нельзя ослабить.

Пример 1. Пусть $N = p^2 + q^2$ на $L^2(\mathbb{R}, dx)$, где $p = i^{-1}d/dx$, и пусть $A = p^2 + q^2 - q^4$. Применяя методы дополнения к § X.1, можно убедиться, что A не самосопряжен в существенном на множестве $C_0^\infty(\mathbb{R})$, представляющем собой существенную область оператора N. Но A и $[N, A]$ принадлежат $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+2}, \mathscr{H}_{-2})$. Таким образом, индекс 1 в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$ существен для теоремы X.36.

Действительно, если взять $N=(p^2+q^2)^k$, то $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_{+1},\mathcal{H}_{-1})$ при $k\geqslant 2$, тогда как $[N, A]\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{H}_{-\alpha})$ с $\alpha=1+k^{-1}$ (при нецелых α надо обратиться к естественному обобщению $\mathcal{H}_\alpha$). Таким образом, ± 1 в условиях, налагаемых на $[N, A]$, нельзя изменить даже чуть-чуть.

Пример 2. Пусть $H=p^2+q^2+q^4$. Определим $q(t)=\exp[itH]q\exp[-itH]$. Поскольку q самосопряжен в существенном на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $q^2\leqslant cH^2$, имеем $D(q)\supset D(H)\supset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и q самосопряжен в существенном на $D(H)$. Далее, $\exp[itH]\colon D(H)\to D(H)$, и потому $q(t)$ также самосопряжен в существенном на $D(H)$. Но что можно сказать о $q(t_1)+q(t_2)$? С помощью методов, изложенных до теоремы X.36, на этот вопрос ответить нелегко. Но $\pm q\leqslant H+1$, так что q и $q(t_1)+q(t_2)$ лежат в $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{+1},\mathcal{H}_{-1})$, если выбрать $N=H$. Более того, $\pm i[H, q]=\pm 2p\leqslant 2H+2$, так что и $[H, q(t_1)+q(t_2)]$ лежит там же. В итоге теорема X.36 гарантирует самосопряженность в существенном $q(t_1)+q(t_2)$ на любой существенной области оператора H.

Пример 3. Пусть $h(\varphi,\psi)=(\varphi,(p^2+q^2+\delta(q))\psi)$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R})\times\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Поскольку $\delta(q)$ в смысле форм p^2-ограничена, КЛМН-теорема гарантирует самосопряженность оператора H, отвечающего форме h. Пусть $p(t)=\exp[itH]p\exp[-itH]$. Так как $[p, H]$ ведет себя неважно, мы не можем исследовать $p(t_1)+p(t_2)$ методом примера 2. Однако определим для каждой вещественно-значной функции $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ форму

$$a_f(\varphi,\psi)=\int f(t)(\varphi, p(t)\psi)\,dt,\qquad \varphi,\psi\in Q(H).$$

Форма a_f симметрическая и

$$\begin{aligned}|a_f(\varphi,\varphi)|&\leqslant\int|f(t)||(e^{-itH}\varphi,\ pe^{-itH}\varphi)|\,dt\leqslant\\&\leqslant\int|f(t)||(e^{-itH}\varphi,\ cHe^{-itH}\varphi)|\,dt\leqslant\\&\leqslant ch(\varphi,\varphi)\int|f(t)|\,dt=c\|H^{1/2}\varphi\|^2\|f\|_1\end{aligned}$$

для всех $\varphi\in Q(H)$. Далее, для $\varphi\in D(H^2)$

$$\begin{aligned}a_f(H\varphi,\varphi)-a_f(\varphi,H\varphi)&=\int f(t)\{(H\varphi, p(t)\varphi)-(\varphi, p(t)H\varphi)\}\,dt=\\&=\int f(t)\frac{d}{dt}(\varphi, p(t)\varphi)\,dt=\\&=-\int f'(t)(\varphi, p(t)\varphi)\,dt.\end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned}|a_f(H\varphi,\varphi)-a_f(\varphi,H\varphi)|&\leqslant ch(\varphi,\varphi)\|f'\|_1\leqslant\\&\leqslant c\|H^{1/2}\varphi\|^2\|f'\|_1.\end{aligned}$$

По теореме X.36′ существует оператор A_f, отвечающий форме a_f, который самосопряжен на любой существенной области для H. *Формально* $A_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,p(t)\,dt$. Конечно, сам по себе рассмотренный оператор не очень важен. Главное, что мы проиллюстрировали,— это возможность доказательства для вещественных $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ самосопряженности в существенном оператора

$$B_f = \int f(t)\, e^{itH} B e^{-itH}\, dt$$

при условии, что $\pm B \leqslant cH$. Именно такое положение возникает в квантовой теории поля (литературные ссылки см. в Замечаниях).

Пример 4. Существует связь между теоремой X.36 и одним методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Проиллюстрируем этот метод на примере, который легко поддается и другим подходам. Предположим, что мы хотим решить уравнение

$$\ddot{q}(t) = F(q(t)) \tag{X.55}$$

для вещественнозначной функции $q(t)$, где F удовлетворяет условию Липшица и неравенству

$$|F(x)| \leqslant |x|. \tag{X.56}$$

При заданных начальных условиях легко доказать локальную разрешимость (X.55) (см. § V.6). Для доказательства глобальной разрешимости положим $p = \dot{q}$, так что (X.55) перепишется в виде

$$\dot{q}(t) = p(t), \tag{X.57a}$$

$$\dot{p}(t) = F(q(t)). \tag{X.57b}$$

Пусть $N(p, q) = p^2 + q^2$ и $N(t) = N(p(t), q(t))$. Предположим, что для любого решения на $[0, t_0)$ мы умеем доказывать ограниченность $N(t)$ при $t \to t_0$. Тогда с помощью рассуждения о максимальном интервале, подобного применявшемуся при доказательстве предложения 1 в дополнении к § X.1, можно продолжить решение до момента $t_0 + \varepsilon$ и таким образом доказать существование глобального решения. Для доказательства ограниченности $N(t)$ покажем, что

$$\dot{N}(t) \leqslant 2N(t). \tag{X.58}$$

Действительно, в силу (X.57) и (X.56) имеем

$$\dot{N}(t) = 2pF(q) + 2pq \leqslant 4|pq| \leqslant 2N(t).$$

Интегрируя (X.58), получаем

$$N(t) \leqslant N(0)\, e^{2t}.$$

Дадим теперь формальное доказательство той части теоремы X.36, которая основана на этих классических идеях. Предположим, что A, N удовлетворяют условиям теоремы, и пусть $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение A, если такое существует. Пусть $\psi \in Q(N)$ и

$$N(t) = (\psi,\ e^{it\tilde{A}} N e^{-it\tilde{A}}\psi).$$

Тогда *формально*

$$\dot{N}(t) = (e^{-it\tilde{A}}\psi,\ i[A, N]\, e^{-it\tilde{A}}\psi) \leqslant cN(t)$$

в силу ограниченности $i[A, N]$. Это означает, что $\exp[-it\tilde{A}]$ оставляет область $Q(N)$ инвариантной, а этот факт является отправной точкой доказательства самосопряженности в теореме VIII.10. Изложенные формальные соображения можно превратить в доказательство несколько ослабленной формы теоремы X.36 (см. ссылки в Замечаниях).

При обсуждении эффекта Штарка нам понадобится новый вариант теоремы X.36. В старом варианте нам нужны были сведения о $D(N^{3/2})$ или $D(N^k)$ при $k \geqslant 3/2$. Если N — непростой оператор, то даже задача нахождения какой-нибудь существенной области оператора N^k при $k > 1$ может оказаться очень трудной. В таком случае полезна следующая теорема, условия которой выражены на операторном языке.

Теорема X.37. Пусть N — самосопряженный оператор и $N \geqslant I$. Пусть A — симметрический *оператор* с областью определения D, служащей существенной областью оператора N. Предположим, что

(i) Для некоторой постоянной c и всех $\varphi \in D$

$$\|A\varphi\| \leqslant c\|N\varphi\|. \tag{X.59}$$

(ii) Для некоторой постоянной d и всех $\varphi \in D$

$$|(A\varphi, N\varphi) - (N\varphi, A\varphi)| \leqslant d\|N^{1/2}\varphi\|^2. \tag{X.60}$$

Тогда A самосопряжен в существенном на D и его замыкание самосопряжено в существенном на любой другой существенной области N.

Доказательство. В силу (i) область определения замыкания A содержит $D(N)$ и условие (ii) распространяется на все $\varphi \in D(N)$. Повторяя доказательство теоремы X.36, легко показать, что $\operatorname{Ker}(A^* \pm id) = \{0\}$, и таким образом доказать самосопряженность в существенном оператора A. ∎

Укажем на один досадный недостаток теоремы X.37. Дело в том, что нам пришлось предположить операторную N-ограниченность A, а не его N-ограниченность в смысле форм, как это было в теореме X.36. На первый взгляд это замечание удивляет, так как кажется, что в силу леммы 2 из условия (ii) теоремы X.37 и более слабого условия

(i′) Для некоторой постоянной c и всех $\varphi \in D$

$$|(\varphi, A\varphi)| \leqslant c(\varphi, N\varphi)$$

должно следовать (i). Ошибка здесь в том, что (ii) несколько отличается от условия (ii) теоремы X.36′. Для того чтобы выполнялось последнее условие, нужно было бы требовать справедливости (X.60) на множестве φ, включающем существенную область для $N^{3/2}$. Но a priori пересечение D и $D(N^{3/2})$ может быть нулевым. Обидно еще то, что (i) позволяет распространить (ii) на все φ из $D(N)$ и, следовательно, из $D(N^{3/2})$, но (i′) такой возможности не дает, так что использовать одновременно (i′) и (ii) нельзя. В любом случае при доказательстве следующей теоремы нам потребуются специальные соображения в пользу справедливости (X.59).

Теорема X.38 (Фари—Лавин). Пусть V и W—вещественнозначные измеримые функции на $\mathbb{R}^n$, причем

$$V(x) \geqslant -cx^2 - d,$$

$V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что

(i) Существует плотная область $D \subset D(-\Delta) \cap D(V) \cap D(W)$, левоинвариантная относительно действия x_j и $-i\,\partial/\partial x_j$, так что $-\Delta + V + W + 2cx^2$ самосопряжен в существенном на D.

(ii) Оператор $-a\Delta + W$ при некотором $a < 1$ ограничен снизу на D.

Тогда $-\Delta + V + W$ самосопряжен в существенном на D.

Доказательство. В силу (ii) и условий, наложенных на V, можно выбрать такое b, что

$$N = -\Delta + V + W + 2cx^2 + b \geqslant 1.$$

Пусть $A = -\Delta + V + W$. Проверим (X.59) и (X.60) на D. В смысле квадратичных форм имеем на D

$$\begin{aligned} N^2 &= (A + b + 2cx^2)^2 = (A + b)^2 + 4c^2x^4 + 2c(Ax^2 + x^2A) + 4bcx^2 = \\ &= (A + b)^2 + 4c^2x^4 + 4c\sum_{j=1}^{n} x_j(A + b)\,x_j + 2c\sum_j [x_j, [x_j, A]] = \\ &= (A + b)^2 + 4c\sum_{j=1}^{n} x_j(A + b + cx^2)\,x_j - 4cn. \end{aligned}$$

Меняя, если нужно, b, можно добиться, чтобы $A+b+cx^2$ было $\geqslant 0$, так чтобы

$$\|(A+b)\psi\|^2 \leqslant \|N\psi\|^2 + 4cn\|\psi\|^2,$$

откуда следует (X.59).

Аналогично, в смысле (X.60), имеем

$$\pm i[A, N] = \pm i[A-N, N] = \pm i[-2cx^2, \Delta] =$$
$$= \mp i4c(\mathbf{x}\cdot\nabla + \nabla\cdot\mathbf{x}) \leqslant 4c(-\Delta + x^2) \leqslant dN,$$

где мы воспользовались неравенствами

$$-\Delta + x^2 \mp i(\mathbf{x}\cdot\nabla + \nabla\cdot\mathbf{x}) = (i\nabla \mp \mathbf{x})^2 \geqslant 0$$

и

$$N = (-a\Delta + W) + (V + cx^2) + (1-a)(-\Delta) + cx^2 \geqslant$$
$$\geqslant e(-\Delta + x^2) - f.$$

Итак, в силу теоремы X.37, A самосопряжен в существенном на D. ∎

Следствие. Пусть заданы вещественнозначные измеримые функции V_1 и V_2, удовлетворяющие условиям

(i) $V_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, где $p \geqslant 2$ при $n \leqslant 3$, $p > 2$ при $n = 4$ и $p \geqslant n/2$ при $n \geqslant 5$.

(ii) $V_1 \geqslant -cx^2 - d$ для некоторых c и d; $V_1 \in L^2_{\text{loc}}$.

Тогда $-\Delta + V_1 + V_2$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $V = -cx^2 - d$. и $W = V_1 + V_2 + cx^2 + d$. Тогда в силу теоремы X.29 оператор $-\Delta + W + V + 2cx^2$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ибо V_2 ограничен относительно $-\Delta$, а $V_1 + 2cx^2 + d$ положителен. Далее, $-a\Delta + W$ ограничен снизу для любого $a > 0$. Следовательно, по теореме X.38, $-\Delta + W + V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. ∎

Аналогично, объединяя теоремы X.30 и X.38 с леммой о принципе неопределенности, получаем такое

Следствие. Если $V(\mathbf{r}) \geqslant n(4-n)r^{-2}/4 - cr^2 - d$, то $-\Delta + V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Пример 5 (эффект Штарка). Гамильтониан атома в постоянном электрическом поле $\mathbb{E}_0$ имеет вид

$$H = -\sum_{n=1}^{N} (2m)^{-1}\Delta_n - (2M)^{-1}\Delta_0 - \sum_{n=1}^{N} \frac{Ne^2}{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{n \neq m} \frac{e^2}{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m|} + e\mathbb{E}_0 \cdot \left(\mathbf{x}_0 - \sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n\right).$$

В силу первого следствия H самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3N+3})$.

С помощью развитых выше методов можно рассматривать электрическое и магнитное поля одновременно (см. задачу 38).

X.6. Аналитические векторы

Как утверждает теорема Стоуна, между самосопряженными операторами и непрерывными однопараметрическими группами существует взаимно однозначное соответствие. Это наводит на мысль, что в случае, когда симметрический оператор A однозначно «определяет» группу, он должен быть самосопряжен в существенном. Действительно, теорема VIII.10 показывает, что если $U(t)$ — непрерывная однопараметрическая унитарная группа, $U(t)\colon D(A)\to D(A)$ и $U'(t)\varphi = iAU(t)\varphi$ для $\varphi\in D(A)$, то A самосопряжен в существенном и порождает $U(t)$. Найдем условия на симметрический оператор, позволяющие построить такую группу. Наиболее естественный подход к построению $U(t)$ — попытаться придать смысл степенному ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$ на плотном множестве векторов. Отметим, что это наверняка можно сделать, если A самосопряжен. Действительно, пусть $\{E_\Omega\}$ — семейство спектральных проекторов оператора A. Тогда на каждом подпространстве $E_{[-M,M]}$ оператор A ограничен и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$ сходится по норме к $\exp[itA]$. В частности, для любого $\varphi\in\bigcup\limits_{M\geqslant 0}E_{[-M,M]}$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(itA)^n}{n!}\varphi\longrightarrow\exp[itA]\varphi.$$

Поскольку $\bigcup\limits_{M\geqslant 0}E_{[-M,M]}$ плотно в $\mathcal{H}$, мы видим, что группа, порождаемая самосопряженным оператором A, полностью определяется действием ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$ на плотном множестве. Мы докажем обратное, а именно: если A — симметрический оператор, обладающий плотным множеством векторов, к которым можно применить ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$, то A самосопряжен в существенном. Сначала несколько определений.

Определение. Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Множество $C^\infty(A)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D(A^n)$ называется **множеством**