В силу первого следствия H самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3N+3})$.

С помощью развитых выше методов можно рассматривать электрическое и магнитное поля одновременно (см. задачу 38).

X.6. Аналитические векторы

Как утверждает теорема Стоуна, между самосопряженными операторами и непрерывными однопараметрическими группами существует взаимно однозначное соответствие. Это наводит на мысль, что в случае, когда симметрический оператор A однозначно «определяет» группу, он должен быть самосопряжен в существенном. Действительно, теорема VIII.10 показывает, что если $U(t)$ — непрерывная однопараметрическая унитарная группа, $U(t)\colon D(A) \to D(A)$ и $U'(t)\varphi = iAU(t)\varphi$ для $\varphi \in D(A)$, то A самосопряжен в существенном и порождает $U(t)$. Найдем условия на симметрический оператор, позволяющие построить такую группу. Наиболее естественный подход к построению $U(t)$ — попытаться придать смысл степенному ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$ на плотном множестве векторов. Отметим, что это наверняка можно сделать, если A самосопряжен. Действительно, пусть $\{E_\Omega\}$ — семейство спектральных проекторов оператора A. Тогда на каждом подпространстве $E_{[-M,M]}$ оператор A ограничен и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$ сходится по норме к $\exp[itA]$. В частности, для любого $\varphi \in \bigcup\limits_{M\geqslant 0} E_{[-M,M]}$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(itA)^n}{n!}\varphi \to \exp[itA]\varphi.$$

Поскольку $\bigcup\limits_{M\geqslant 0} E_{[-M,M]}$ плотно в $\mathcal{H}$, мы видим, что группа, порождаемая самосопряженным оператором A, полностью определяется действием ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$ на плотном множестве. Мы докажем обратное, а именно: если A — симметрический оператор, обладающий плотным множеством векторов, к которым можно применить ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$, то A самосопряжен в существенном. Сначала несколько определений.

Определение. Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Множество $C^\infty(A) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ называется **множеством**

C^∞-**векторов оператора** A. Вектор $\varphi \in C^\infty(A)$ называется **аналитическим вектором оператора** A, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\varphi\|}{n!} t^n < \infty$$

для некоторого $t > 0$.

Если A самосопряжен, то $C^\infty(A)$ плотно в $D(A)$. Однако в общем случае симметрический оператор может совсем не иметь C^∞-векторов, даже если A самосопряжен в существенном. Призываем читателя помнить, что аналитические векторы и векторы однозначности (вводимые ниже) должны быть C^∞-векторами оператора A. Вектор $\psi \in D(A)$ может быть аналитическим вектором расширения A, но не быть таковым для самого A, поскольку он может не лежать в $C^\infty(A)$.

Определение. Предположим, что A — симметрический оператор. Для каждого $\varphi \in C^\infty(A)$ определим множество

$$D_\varphi = \left\{ \sum_{n=0}^{N} \alpha_n A^n \varphi \mid N = 1, 2, \ldots, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_N \rangle \text{ произвольны} \right\}.$$

Пусть $\mathscr{H}_\varphi = \bar{D}_\varphi$; введем $A_\varphi \colon D_\varphi \to D_\varphi$ формулой $A_\varphi\left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n A^n\varphi\right) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n A^{n+1}\varphi$. Вектор φ называется **вектором однозначности**, если A_φ самосопряжен в существенном на D_φ (как оператор в $\mathscr{H}_\varphi$).

Наконец, подмножество S пространства $\mathscr{H}$ называется **тотальным**, если множество конечных линейных комбинаций его элементов плотно в $\mathscr{H}$.

Лемма (Нуссбаум). Пусть A — симметрический оператор и $D(A)$ содержит тотальное множество векторов однозначности. Тогда A самосопряжен в существенном.

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{Ran}(A \pm i)$ плотно в $\mathscr{H}$. В силу основного критерия самосопряженности отсюда будет следовать самосопряженность в существенном оператора A. Пусть заданы $\psi \in \mathscr{H}$ и $\varepsilon > 0$, и пусть S — множество векторов однозначности. Поскольку S тотально, можно найти такие $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_N \rangle$ и $\langle \psi_1, \ldots, \psi_N \rangle$ с $\psi_n \in S$, что $\left\| \psi - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n \right\| \leqslant \varepsilon/2$. Так как ψ_n — вектор однозначности, в D_{ψ_n} существует φ_n, для которого

$$\|\psi_n - (A+i)\varphi_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|\right)^{-1}.$$

Полагая $\varphi=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\varphi_n$, получим $\varphi\in D(A)$ и $\|\psi-(A+i)\varphi\|\leqslant\varepsilon$. В итоге $\operatorname{Ran}(A+i)$ плотно. Доказательство для $(A-i)$ аналогично. ▮

Теорема X.39 (теорема Нельсона об аналитических векторах). Пусть A — симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Если $D(A)$ содержит тотальное множество аналитических векторов, то A самосопряжен в существенном.

Доказательство. В силу леммы Нуссбаума, достаточно доказать, что каждый аналитический вектор ψ — это вектор однозначности. Сначала заметим, что, в силу теоремы X.3, A_ψ всегда допускает самосопряженные расширения, так как оператор

$$C\colon \sum_{n=0}^{N}\alpha_n A^n\psi\mapsto\sum_{n=0}^{N}\bar\alpha_n A^n\psi$$

продолжается до сопряжения на $\mathscr{H}_\psi$, коммутирующего с A_ψ. Пусть B — некоторое самосопряженное расширение A_ψ в $\mathscr{H}_\psi$ и μ — спектральная мера для B, ассоциированная с вектором ψ. Поскольку ψ — аналитический вектор для A, имеем $\sum_{n=0}^{\infty}(\|A^n\psi\|/n!)\,t^n<\infty$ для некоторого $t>0$. Пусть $0<s<t$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^n\,d\mu\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}\,d\mu\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\right)^{1/2}=$$

$$=\|\psi\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\|A^n\psi\|<\infty.$$

По теореме Фубини

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}|x|^n\,d\mu=\int_{-\infty}^{\infty}e^{s|x|}\,d\mu<\infty.$$

Следовательно, функция $(\psi,\exp[itB]\psi)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(itx)\,d\mu$ имеет аналитическое продолжение $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(izx)\,d\mu$ в область $|\operatorname{Im} z|<t$. Благодаря равенству

$$\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^k\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}\,d\mu\right]_{z=0}=\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^k\,d\mu=(\psi,\ (iA)^k\psi)$$

получаем

$$(\psi, e^{isB}\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(is)^n}{n!} (\psi, A^n\psi)$$

при $|s| < t$. Следовательно, при $|s| < t$ (и потому при всех s) функция $(\psi, \exp[isB]\psi)$ полностью определяется числами $(\psi, A^n\psi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Такое же доказательство показывает, что $(\psi_1, \exp[isB]\psi_2)$ определяется числами $(\psi_1, A^n\psi_2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, при любых $\psi_1, \psi_2 \in D_\psi$. Поскольку D_ψ плотна в $\mathscr{H}_\psi$, а группа $\exp[isB]$ унитарна, $\exp[isB]$ полностью определяется числами $(\psi_1, A^n\psi_2)$ при $\psi_1, \psi_2 \in D_\psi$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, все самосопряженные расширения оператора A_ψ порождают одну и ту же унитарную группу, и, следовательно, по теореме Стоуна A_ψ обладает не более чем одним самосопряженным расширением. Но, как уже было отмечено, A_ψ обладает по крайней мере одним самосопряженным расширением. Значит, A_ψ самосопряжен в существенном и ψ — вектор однозначности. ∎

Следствие 1. Замкнутый симметрический оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда $D(A)$ содержит плотное множество аналитических векторов.

Утверждение следствия 1 становится неверным, если «самосопряженность» заменить «самосопряженностью в существенном». Самосопряженный оператор A может быть самосопряжен в существенном на области $D \subset D(A)$, а D может даже не содержать ни одного C^∞-вектора. В задаче 39 от читателя требуется построить соответствующий пример.

Следствие 2. Пусть A — симметрический оператор и D — плотное линейное множество, содержащееся в $D(A)$. Тогда если D содержит плотное множество аналитических векторов и *инвариантно относительно действия* A, то A самосопряжен в существенном на D.

Доказательство. Поскольку D инвариантно относительно A, каждый аналитический вектор оператора A, лежащий в D, является аналитическим вектором сужения $A \restriction D$. Таким образом, по теореме X.39, $A \restriction D$ самосопряжен в существенном. ∎

Причина, по которой в следствии 2 требуется инвариантность, состоит в том, что вектор $\psi \in D$, чтобы быть аналитическим для $A \restriction D$, должен прежде всего быть C^∞-вектором для $A \restriction D$. Для этого требуется, чтобы $A^n\psi \in D$ при всех n. Ниже дан простой пример, показывающий, почему нужно быть очень внимательным к этому условию инвариантности.

Пример 1. Пусть $\mathscr{H}=l_2$ и A — самосопряженный оператор, для которого векторы $\delta_n=\langle 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\rangle$ суть собственные векторы, удовлетворяющие уравнению $A\delta_n=n\delta_n$. В силу предложения 1 § VIII.3, $D(A)=\{\{a_n\} \mid \{na_n\}\in l_2\}$. Пусть теперь $D=\left\{\sum\limits_{n=1}^{N}\alpha_n\delta_n \,\middle|\, \sum\limits_{n}\alpha_n=0,\ N \text{ произвольно, но конечно}\right\}$. Прежде всего ясно, что каждый вектор из D аналитический для A, ибо $\left\|A^k\sum\limits_{n=1}^{N}\alpha_n\delta_n\right\|^2\leqslant N^{2k}\sum\limits_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2$. Далее, D плотно в l_2. Действительно, предположим, что $\{a_n\}$ — последовательность из l_2, в которой все члены после M-го равны нулю. Тогда вектор

$$\varphi=\Big\langle a_1, \ldots, a_M, \underbrace{\Big(-\sum_{i=1}^{M}a_i\Big)\Big/k, \ldots, \Big(-\sum_{i=1}^{M}a_i\Big)\Big/k}_{k\ \text{раз}}, 0, \ldots\Big\rangle$$

лежит в D и

$$\|\{a_n\}-\varphi\|_{l_2}\leqslant\left|\sum_{i=1}^{M}a_i\right|k^{-1/2}.$$

Таким образом, $\{a_n\}$ можно приблизить элементами из D, а поскольку множество выбранных $\{a_n\}$ плотно в l_2, таково же и D.

Итак, D — плотное множество аналитических векторов оператора A, но $A\restriction D$ *не* самосопряжен в существенном. Действительно, пусть $\psi=\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $(A\varphi, \psi)=0$ для всех $\varphi\in D$. Поэтому $\psi\in D((A\restriction D)^*)$ и $(A\restriction D)^*\psi=0$. Это показывает, что $D((A\restriction D)^*)$ *строго* содержит $D(A)$, так что A не самосопряжен в существенном на D. Отметим, что A не переводит D в себя.

Следующие примеры иллюстрируют простые способы применения аналитических векторов. Некоторые применения аналитических векторов в квантовой теории поля описываются в следующем разделе.

Пример 2. Пусть A и $A^\dagger$ — отображения $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ в себя:

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{d}{dx}\right), \qquad A^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{d}{dx}\right).$$

Положим $N=A^\dagger A$. Пусть $\phi_0=\pi^{-1/4}\exp(-x^2/2)$ и $\phi_n=(n!)^{-1/2}(A^\dagger)^n\phi_0$. Функции ϕ_n — это функции Эрмита, образующие ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$ (см. задачи 6 и 7 гл. IX). Оператор N обладает свойством $N\phi_n=n\phi_n$, а A и $A^\dagger$ удовлетворяют коммутационному соотношению (на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$)

$$AA^\dagger-A^\dagger A=I.$$

Легко вывести, что $A^\dagger\phi_n=\sqrt{n+1}\,\phi_{n+1}$ и $A\phi_n=\sqrt{n}\,\phi_{n-1}$, если $n\geqslant 1$, и $A\phi_0=0$. Поэтому

$$\|\underbrace{A^\#\ldots A^\#}_{k\ \text{раз}}\phi_n\|\leqslant(n+1)^{1/2}\ldots(n+k)^{1/2}\leqslant[(n+k)!]^{1/2},\qquad (\text{X}.61)$$

где $A^\#$ обозначает либо A, либо $A^\dagger$. Поскольку $x^k=2^{-k/2}(A+A^\dagger)^k$, из (X.61) видно, что

$$\|x^k\phi_n\|\leqslant 2^{k/2}[(n+k)!]^{1/2}$$

и, следовательно, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|x^k\phi_n\|}{k!}t^k\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k/2}[(n+k)!]^{1/2}}{k!}t^k<\infty$$

для всех t, так что каждая функция ϕ_n — это аналитический вектор оператора x. Поскольку конечные линейные комбинации функций Эрмита образуют плотное множество, инвариантное относительно x, заключаем, что x самосопряжен в существенном на любом линейном подпространстве в $L^2(\mathbb{R})$, содержащемся в $\{\varphi\,|\,\|x\varphi\|_2<\infty\}$ и содержащем функции Эрмита. Аналогичное утверждение справедливо и для $i\,d/dx$.

Пример 3. Пусть A_n — самосопряженный оператор на $\mathcal{H}_n$, $n=1, 2, \ldots, N$. Предположим, что $P(x_1, \ldots, x_N)$ — полином с вещественными коэффициентами максимальной степени n_k по каждой переменной x_k. Пусть D_k^e — область самосопряженности в существенном оператора A_k. При таких условиях в теореме VIII.33 было доказано, что оператор $P(A_1, \ldots, A_N)$ в $\mathcal{H}_1\otimes\ldots\otimes\mathcal{H}_N$ самосопряжен в существенном на

$$D^e=\bigotimes_{n=1}^{N}D_n^e.$$

Доказательство, данное в теореме VIII.33, основывалось на спектральной теореме. Дадим здесь другое доказательство, использующее аналитические векторы. Ясно, что $P(A_1, \ldots, A_N)$ симметричен на $D^e=\bigotimes_{n=1}^{N}D_n^e$. Далее, так как $\overline{A_n\restriction D_n^e}=A_n$, замыкание $P(A_1, \ldots, A_N)$ на D^e совпадает с замыканием $P(A_1, \ldots, A_N)$ на $D=\bigotimes_{n=1}^{N}D(A_n)$. Следовательно, достаточно доказать, что $P(A_1, \ldots, A_N)$ самосопряжен в существенном на D. Пусть E_Ω^n — проекторнозначная мера для A_n, и пусть M_n (при $n=1, \ldots, N$) — неотрицательные числа. Пусть $\varphi_n\in E^n_{[-M_n, M_n]}\mathcal{H}_n$; тогда $\|A_n\varphi_n\|\leqslant\leqslant M_n\|\varphi_n\|$, и если $\varphi=\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_N$, то после короткого вычисления получим

$$\|[P(A_1, \ldots, A_N)]^k \varphi\| \leqslant (\tilde{P}(M_1, \ldots, M_N))^k \|\varphi\|,$$

где $\tilde{P}$—тот же полином, что и P, но с коэффициентами, замененными их абсолютными значениями. Это дает

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|P(A_1, \ldots, A_N)^k \varphi\|}{k!} t^k < \infty$$

для всех t, так что φ—аналитический вектор для $P(A_1, \ldots, A_N)$. Множество конечных линейных комбинаций таких векторов инвариантно относительно $P(A_1, \ldots, A_N)$ и плотно в D. По теореме Нельсона $P(A_1, \ldots, A_N)$ самосопряжен в существенном на D, а потому и на D^e (как уже отмечалось выше).

Пример 4 (проблема моментов Гамбургера—единственность). В примере 3 из § X.1 была доказана теорема, дающая необходимое и достаточное условие, при котором последовательность вещественных чисел a_n является набором моментов (т. е. $a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\rho(x)$) некоторой положительной меры ρ. Предположим, в обозначениях этого примера, что существуют такие постоянные C и D, что $|a_n| \leqslant CD^n n!$ для всех n. Поскольку $\hat{A}$: $P/Q \to P/Q$, каждый вектор в P/Q—это C^∞-вектор для $\hat{A}$. Оценки на $\{a_n\}$ позволяют немедленно заключить, что P/Q—плотное множество аналитических векторов для $\hat{A}$. В силу теоремы X.39, $\hat{A}$ самосопряжен в существенном на P/Q, и потому $\hat{A} = \tilde{A}$.

Следовательно, $\hat{A}$, а значит, и мера ρ однозначно определяются последовательностью $\{a_n\}$. Итак, мы доказали, что в случае, когда $|a_n| \leqslant CD^n n!$, проблема моментов Гамбургера имеет единственное решение.

Различные обобщения теоремы Нельсона обсуждаются в Замечаниях. В случае полуограниченных операторов читатель, применяя аналогичные методы, может получить (задача 42) следующее обобщение.

Определение. Пусть A—оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Вектор $\varphi \in C^\infty(A)$ называется **полуаналитическим вектором** оператора A, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n \varphi\|}{(2n)!} t^n < \infty$$

для некоторого $t > 0$.

Теорема X.40. Пусть A—*полуограниченный* симметрический оператор. Если $D(A)$ содержит тотальное множество полуаналитических векторов, то A самосопряжен в существенном.

Теорема X.40 имеет два следствия, подобных следствиям теоремы X.39.

Пример 5 (самосопряженность в существенном оператора $H=(-d^2/dx^2+x^2)/2+x^4/4$; третье доказательство). В обозначениях примера 2, $H=A^\dagger A+(A^\dagger+A)^4$. Пусть ϕ_n есть n-я функция Эрмита. Выражение для H^k содержит 17^k членов, каждый из которых есть произведение не более чем $4k$ операторов $A^\dagger$ или A. Поэтому с помощью (X.61) получаем

$$\|H^k\phi_n\|\leqslant 17^k(n+1)^{1/2}\ldots(n+4k)^{1/2}\leqslant 17^k 2^{2k}(2k)^{2k}c_n.$$

Таким образом, функции Эрмита образуют тотальное множество полуаналитических векторов оператора H, рассматриваемого на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Следовательно, в силу теоремы X.40, H самосопряжен в существенном на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, ибо ясно, что он неотрицателен.

Пример 6. С помощью теоремы X.40, подобно тому как это сделано в примере 4, можно доказать, что проблема моментов Стильтьеса имеет единственное решение, когда $|a_n|\leqslant CD^n(2n)!$ при некоторых постоянных C и D (см. задачу 25).

X.7. Свободные квантованные поля

Квантование — это мистика, но вторичное квантование — это функтор.

Э. НЕЛЬСОН

В § IX.8 были описаны аксиомы Вайтмана для одного скалярного квантованного поля. В этом разделе мы продолжим обсуждение квантовой теории поля. Сначала мы введем абстрактное свободное поле и используем его для явного построения семейства примеров, в которых будут выполняться аксиомы Вайтмана; точнее говоря, для каждого $m>0$ мы построим свободное скалярное поле массы m. При разных m эти теории неэквивалентны в том смысле, что не существует унитарного отображения из гильбертова пространства одной теории в гильбертово пространство другой, полностью сохраняющего структуры полевой теории, т. е. вакуум, поля и т. д. Эти теории неэквивалентны и в более сильном смысле: поля при разных m, взятые в нулевой момент времени, реализуют различные представления канонических коммутационных соотношений (см. дополнение к этому разделу). Помимо доказательства того, что выполнены аксиомы, мы докажем еще и самосопряженность этих полей. Главным инструментом последнего доказательства будет теорема об аналитических векторах.

Как ясно уже из самого названия, теории свободных полей