Теорема X.40 имеет два следствия, подобных следствиям теоремы X.39.

Пример 5 (самосопряженность в существенном оператора $H=(-d^2/dx^2+x^2)/2+x^4/4$; третье доказательство). В обозначениях примера 2, $H=A^\dagger A+(A^\dagger+A)^4$. Пусть ϕ_n есть n-я функция Эрмита. Выражение для H^k содержит 17^k членов, каждый из которых есть произведение не более чем $4k$ операторов $A^\dagger$ или A. Поэтому с помощью (X.61) получаем

$$\|H^k\phi_n\|\leqslant 17^k(n+1)^{1/2}\ldots(n+4k)^{1/2}\leqslant 17^k 2^{2k}(2k)^{2k}c_n.$$

Таким образом, функции Эрмита образуют тотальное множество полуаналитических векторов оператора H, рассматриваемого на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Следовательно, в силу теоремы X.40, H самосопряжен в существенном на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, ибо ясно, что он неотрицателен.

Пример 6. С помощью теоремы X.40, подобно тому как это сделано в примере 4, можно доказать, что проблема моментов Стильтьеса имеет единственное решение, когда $|a_n|\leqslant CD^n(2n)!$ при некоторых постоянных C и D (см. задачу 25).

X.7. Свободные квантованные поля

Квантование — это мистика, но вторичное квантование — это функтор.

Э. НЕЛЬСОН

В § IX.8 были описаны аксиомы Вайтмана для одного скалярного квантованного поля. В этом разделе мы продолжим обсуждение квантовой теории поля. Сначала мы введем абстрактное свободное поле и используем его для явного построения семейства примеров, в которых будут выполняться аксиомы Вайтмана; точнее говоря, для каждого $m>0$ мы построим свободное скалярное поле массы m. При разных m эти теории неэквивалентны в том смысле, что не существует унитарного отображения из гильбертова пространства одной теории в гильбертово пространство другой, полностью сохраняющего структуры полевой теории, т. е. вакуум, поля и т. д. Эти теории неэквивалентны и в более сильном смысле: поля при разных m, взятые в нулевой момент времени, реализуют различные представления канонических коммутационных соотношений (см. дополнение к этому разделу). Помимо доказательства того, что выполнены аксиомы, мы докажем еще и самосопряженность этих полей. Главным инструментом последнего доказательства будет теорема об аналитических векторах.

Как ясно уже из самого названия, теории свободных полей описывают невзаимодействующие частицы. Тем не менее они важны, поскольку демонстрируют непротиворечивость аксиом Вайтмана и поскольку они служат основой наиболее естественного способа построения теорий с взаимодействием — теории возмущений. Во второй части этого раздела мы начнем обсуждение простейшей теории с взаимодействием, а именно φ^4-самодействия в двумерном пространстве-времени. Мы введем пространственно обрезанный гамильтониан $H(g)$ и докажем его симметричность. Наконец, мы введем Q-пространство — новую реализацию пространства Фока, которое используем в § X.9, где докажем самосопряженность $H(g)$. Мы *не* доведем дело построения теорий взаимодействующих полей до того уровня, когда надо снимать пространственное обрезание и проверять аксиомы Вайтмана, хотя это уже сделано для целого ряда моделей; см. ссылки в Замечаниях.

Пусть $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $\mathscr{F}(\mathscr{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}^{(n)}$ (где $\mathscr{H}^{(n)} = \bigotimes^{n} \mathscr{H}$) — пространство Фока над $\mathscr{H}$, определенное в § II.4. Наша цель — определить абстрактное свободное поле на $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ — бозонном подпространстве $\mathscr{F}(\mathscr{H})$. Для этого нам нужно ввести ряд новых семейств операторов и договориться о новой терминологии. Пусть $f \in \mathscr{H}$ задан. Для векторов из $\mathscr{H}^{(n)}$ вида $\eta = \psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n$ определим отображение $b^-(f)\colon \mathscr{H}^{(n)} \to \mathscr{H}^{(n-1)}$ формулой

$$b^-(f)\,\eta = (f, \psi_1)\,(\psi_2 \otimes \ldots \otimes \psi_n).$$

По линейности $b^-(f)$ распространяется на конечные линейные комбинации таких η. Это расширение корректно определено и $\|b^-(f)\,\eta\| \leqslant \|f\|\,\|\eta\|$. Следовательно, $b^-(f)$ расширяется до ограниченного (с нормой, равной $\|f\|$) отображения из $\mathscr{H}^{(n)}$ в $\mathscr{H}^{(n-1)}$. Поскольку это справедливо для всех n (кроме $n=0$, для которого мы определяем $b^-(f)$ как отображение $\mathscr{H}^{(0)}$ в 0), $b^-(f)$ представляет собой ограниченный оператор из $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ в $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ с нормой, равной $\|f\|$. Легко проверить, что $b^+(f) \equiv (b^-(f))^*$ переводит каждое $\mathscr{H}^{(n)}$ в $\mathscr{H}^{(n+1)}$, действуя на векторы-произведения по правилу

$$b^+(f)\,(\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n) = f \otimes \psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n.$$

Отметим, что отображение $f \mapsto b^+(f)$ линейно, а $f \mapsto b^-(f)$ сопряженно-линейно.

Пусть S_n — операторы симметризации, введенные в § II.4. Тогда $S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n$ — проектор на симметричное пространство Фока $\mathscr{F}_s(\mathscr{H}) \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n \mathscr{H}^{(n)}$. Введем обозначение $S_n \mathscr{H}^{(n)} \equiv \mathscr{H}_s^{(n)}$ и будем называть $\mathscr{H}_s^{(n)}$ **n-частичным подпространством** пространства $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$.

Отметим, что $b^-(f)$ переводит $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ в себя, а $b^+(f)$ — нет. Вектор $\psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, у которого $\psi^{(n)} = 0$ для всех, кроме конечного числа n, называется **конечночастичным вектором**. Множество всех таких векторов обозначим через F_0. Вектор $\Omega_0 = \langle 1, 0, 0, \ldots \rangle$ играет специальную роль и называется **вакуумным вектором** (или просто **вакуумом**).

Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ и D — область, где этот оператор самосопряжен в существенном. Пусть $D_A = \{\psi \in F_0 \mid \psi^{(n)} \in \overset{n}{\otimes} D$ для каждого $n\}$. Определим $d\Gamma(A)$ на $D_A \cap \mathcal{H}_s^{(n)}$ выражением

$$A \otimes I \otimes \ldots \otimes I + I \otimes A \otimes \ldots \otimes I + \ldots + I \otimes \ldots \otimes I \otimes A.$$

В § VIII.10 было доказано, что $d\Gamma(A)$ самосопряжен в существенном на D_A; оператор $d\Gamma(A)$ называется **вторичным квантованием** оператора A. Например, пусть $A = I$. Тогда его вторичное квантование $N = d\Gamma(I)$ самосопряжено в существенном на F_0 и $N\psi = n\psi$ для любого $\psi \in \mathcal{H}_s^{(n)}$. Оператор N называется **оператором числа частиц**. Если U — унитарный оператор на $\mathcal{H}$, определим $\Gamma(U)$ как унитарный оператор на $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, равный $\overset{n}{\otimes} U$ при сужении на $\mathcal{H}_s^{(n)}$ для $n > 0$ и единице на $\mathcal{H}_s^{(0)}$. Если $\exp(itA)$ — непрерывная унитарная группа на $\mathcal{H}$, то $\Gamma(\exp(itA))$ — группа, порождаемая оператором $d\Gamma(A)$, т. е. $\Gamma(\exp(itA)) = \exp(it\, d\Gamma(A))$.

Теперь определим на F_0 **оператор уничтожения**

$$a^-(f) = \sqrt{N+1}\, b^-(f). \tag{X.62}$$

Этот оператор называется так по той причине, что он переводит каждое $(n+1)$-частичное подпространство в n-частичное подпространство. Для любых ψ и η из F_0

$$(\sqrt{N+1}\, b^-(f)\psi, \eta) = (\psi, Sb^+(f)\sqrt{N+1}\,\eta).$$

Отсюда следует, что

$$(a^-(f))^* \restriction F_0 = Sb^+(f)\sqrt{N+1}. \tag{X.63}$$

Оператор $(a^-(f))^*$ называется **оператором рождения**. Оба оператора, и $a^-(f)$, и $(a^-(f))^* \restriction F_0$, замыкаемы; мы будем обозначать их замыкания по-прежнему через $a^-(f)$ и $a^-(f)^*$.

Пример 1. Если $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$, то, как мы уже видели в § II.4,

$$\overset{n}{\otimes} L^2(M, d\mu) = L^2(M \times M \times \ldots \times M, d\mu \otimes \ldots \otimes d\mu)$$

и

$$S\left(\overset{n}{\otimes} L^2(M, d\mu)\right) = L_s^2(M \times \ldots \times M, d\mu \otimes \ldots \otimes d\mu),$$

где L_s^2 — множество функций из L^2, инвариантных относительно перестановок аргументов. Операторы $a^-(f)$ и $a^-(f)^*$ действуют следующим образом:

$$(a^-(f)\psi)^{(n)}(m_1, \ldots, m_n) = \\ = \sqrt{n+1}\int\limits_M \bar{f}(m)\,\psi^{(n+1)}(m, m_1, \ldots, m_n)\,d\mu(m),$$

$$(a^-(f)^*\psi)^{(n)}(m_1, \ldots, m_n) = \\ = (\sqrt{n})^{-1}\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\psi^{(n-1)}(m_1, \ldots, \hat{m}_i, \ldots, m_n),$$

где $\hat{m}_i$ означает, что m_i не содержится среди аргументов функции. Если A действует в $L^2(M, d\mu)$ как оператор умножения на вещественнозначную функцию $\omega(m)$, то

$$(d\Gamma(A)\psi)^{(n)}(m_1, \ldots, m_n) = \left(\sum_{i=1}^{n}\omega(m_i)\right)\psi^{(n)}(m_1, \ldots, m_n).$$

Из (X.63) следует, что **полевой оператор Сигала** $\Phi_S(f)$, определенный на F_0 равенством

$$\Phi_S(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^-(f) + a^-(f)^*),$$

симметрический. На самом деле, как мы вскоре увидим, $\Phi_S(f)$ самосопряжен в существенном. Отображение из $\mathscr{H}$ во множество самосопряженных операторов в $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$, задаваемое правилом

$$f \longmapsto \Phi_S(f),$$

называется **сигаловым квантованием** над $\mathscr{H}$. Подчеркнем, что сигалово квантование есть вещественно (*но не комплексно*) линейное отображение, так как $f \longmapsto a^-(f)$ сопряженно-линейно, а $f \longmapsto a^-(f)^*$ линейно. В следующей теореме формулируются основные свойства сигалова квантования.

Теорема X.41. Пусть $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $\Phi_S(\cdot)$ — соответствующее сигалово квантование. Тогда

(a) (самосопряженность). Для каждого $f \in \mathscr{H}$ оператор $\Phi_S(f)$ самосопряжен в существенном на множестве F_0 конечночастичных векторов.

(b) (цикличность вакуума). Вектор Ω_0 входит в область определения всех конечных произведений $\Phi_S(f_1)\ldots\Phi_S(f_n)$, и множество $\{\Phi_S(f_1)\ldots\Phi_S(f_n)\Omega_0 \mid f_i$ и n произвольны$\}$ тотально в $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$.

(c) (коммутационные соотношения). Для каждого $\psi \in F_0$ и $f, g \in \mathscr{H}$

$$\Phi_S(f)\Phi_S(g)\psi - \Phi_S(g)\Phi_S(f)\psi = i\,\mathrm{Im}(f, g)_{\mathscr{H}}\,\psi. \quad \text{(X.64)}$$

Далее, если через $W(f)$ обозначить унитарный оператор $\exp(i\Phi_S(f))$, то

$$W(f+g) = e^{-i\,\mathrm{Im}(f,g)/2}\,W(f)\,W(g). \quad \text{(X.65)}$$

(d) (непрерывность). Если $f_n \to f$ в $\mathcal{H}$, то
$W(f_n)\psi \to W(f)\psi$ для всех $\psi \in \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$,
$\Phi_S(f_n)\psi \to \Phi_S(f)\psi$ для всех $\psi \in F_0$.

(e) $\Gamma(U)$: $D(\overline{\Phi_S(f)}) \to D(\overline{\Phi_S(Uf)})$ для любого унитарного оператора U на $\mathcal{H}$, и для $\psi \in D(\overline{\Phi_S(Uf)})$

$$\Gamma(U)\overline{\Phi_S(f)}\Gamma(U)^{-1}\psi = \overline{\Phi_S(Uf)}\psi$$

при всех $f \in \mathcal{H}$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathcal{H}_s^{(n)}$. Поскольку $\Phi_S(f)$: $F_0 \to F_0$, то $\psi \in C^\infty(\Phi_S(f))$. Далее, из (X.62), (X.63) и того факта, что $\|b^-(f)\| = \|f\|$, следует неравенство

$$\|\underbrace{a^\#(f)\ldots a^\#(f)}_{k \text{ раз}}\psi\| \leqslant \sqrt{n+1}\ldots\sqrt{n+k}\|f\|^k\|\psi\|,$$

где $a^\#(f)$ обозначает либо $a^-(f)$, либо $(a^-(f))^*$. Следовательно,

$$\|(\Phi_S(f))^k\psi\| \leqslant 2^{k/2}((n+k)!)^{1/2}\|f\|^k\|\psi\|.$$

В силу того, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k 2^{k/2}((n+k)!)^{1/2}\|f\|^k/k! < \infty$ для всех t, вектор ψ аналитический для $\Phi_S(f)$, а поскольку F_0 плотно в $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ и инвариантно относительно действия $\Phi_S(f)$, то $\Phi_S(f)$ самосопряжен в существенном на F_0 (теорема X.39).

Доказательство пункта (b) оставляем в качестве задачи 43.

Для доказательства (c) прежде всего проверяем, что если $\psi \in F_0$, то

$$a^-(f)a^-(g)^*\psi - a^-(g)^*a^-(f)\psi = (f, g)\psi. \tag{X.66}$$

Отсюда сразу следует (X.64). Хотя (X.64) и (X.65) формально эквивалентны, но само по себе (X.64) не дает соотношения (X.65) (по поводу того, сколь ошибочными могут быть заключения, основанные на формальной эквивалентности, см. § VIII.5). Приведем краткий вывод равенства (X.65) с использованием специальных свойств векторов из F_0.

Пусть $\psi \in \mathcal{H}_s^{(p)}$. Тогда

$$\|\Phi_S(f)^n\Phi_S(g)^m\psi\| \leqslant 2^{(n+m)/2}\sqrt{p+1}\ldots\sqrt{p+n+m}\|f\|^n\|g\|^m\|\psi\|,$$

откуда следует сходимость ряда $\sum\limits_{n,m}(\|\Phi_S(f)^n\Phi_S(g)^m\psi\|/n!m!)\,t^nt^m$ при всех t. Поскольку ψ — аналитический вектор для $\Phi_S(g)$, то $\sum\limits_m((i\Phi_S(g))^m/m!)\psi = \exp(i\Phi_S(g))\psi$. Далее, при каждом n вектор $\exp(i\Phi_S(g))\psi$ входит в область определения $(\overline{\Phi_S(f)})^n$, так как в нее входит

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{(i\Phi_S(g))^m}{m!}\psi$$

и $\Phi_S(f)^n \sum_{m=0}^{M} ((i\Phi_S(g))^m/m!)\psi$ сходится при $M \to \infty$. В итоге оценка

$$\sum_{n,\,m} \frac{\|(\Phi_S(f)^n \Phi_S(g)^m)\psi\|}{n!m!} t^n t^m < \infty$$

показывает, что $\exp(i\Phi_S(g))\psi$ — аналитический вектор для $\Phi_S(f)$, и потому $\exp(i\Phi_S(f))$ можно вычислять с помощью степенных рядов. Таким образом,

$$e^{i\Phi_S(f)} e^{i\Phi_S(g)}\psi = \sum_{n,\,m} \frac{(i\Phi_S(f))^n (i\Phi_S(g))^m}{n!m!}\psi.$$

Аналогично, ряд

$$e^{-it^2 \operatorname{Im}(f,g)/2} e^{it\Phi_S(f+g)}\psi =$$

$$= \sum_{n,\,m=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!}\left[\left(-\frac{it^2}{2}\operatorname{Im}(f,g)\right)^m (it\Phi_S(f+g))^n\right]\psi$$

абсолютно сходится. Теперь прямое вычисление с учетом (X.64) позволяет доказать (X.65) путем почленного сравнения сходящихся степенных рядов.

Для доказательства (d) возьмем $\psi \in \mathcal{H}_s^{(k)}$ и предположим, что $f_n \xrightarrow{\mathcal{H}} f$. Тогда

$$\|\Phi_S(f_n)\psi - \Phi_S(f)\psi\| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{k+1}\,\|f_n - f\|\,\|\psi\|,$$

так что $\Phi_S(f_n)\psi \to \Phi_S(f)\psi$. Таким образом, $\Phi_S(f_n)$ сильно сходится к $\Phi_S(f)$ на F_0. Поскольку F_0 является существенной областью для всех $\Phi_S(f_n)$ и $\Phi_S(f)$, теоремы VIII.21 и VIII.25 гарантируют сходимость $\exp(it\Phi_S(f_n))\psi$ к $\exp(it\Phi_S(f))\psi$ для всех $\psi \in \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$.

Для доказательства (e) возьмем $\eta \in \mathcal{H}^{(n)}$ в виде $\eta = \psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n$. Тогда

$$\begin{aligned}\Gamma(U)\,b^-(f)\,\Gamma(U)^{-1}\eta &= \Gamma(U)\,b^-(f)\,(U^{-1}\psi_1 \otimes \ldots \otimes U^{-1}\psi_n) = \\ &= \Gamma(U)\,(f, U^{-1}\psi_1)\,(U^{-1}\psi_2 \otimes \ldots \otimes U^{-1}\psi_n) = \\ &= (Uf, \psi_1)\,(\psi_2 \otimes \ldots \otimes \psi_n) = b^-(Uf)\,\eta.\end{aligned}$$

Поскольку множество конечных линейных комбинаций таких η плотно в $\mathcal{H}^{(n)}$ и норма $b^-(g)$ равна $\|g\|$, получаем, что $\Gamma(U)\,b^-(f)\,\Gamma(U)^{-1} = b^-(Uf)$. Но N и S коммутируют с $\Gamma(U)$, поэтому отсюда сразу следует, что $\Gamma(U)\,a^-(f)\,\Gamma(U)^{-1} = a^-(Uf)$ на F_0. Взяв сопряженные операторы и сузив их на F_0, получим еще одно равенство: $\Gamma(U)\,a^-(f)^*\,\Gamma(U)^{-1}=(a^-(Uf))^*$. В итоге $\Gamma(U)\,\Phi_S(f)\,\Gamma(U)^{-1}\psi=\Phi_S(Uf)\,\psi$ для $\psi\in F_0$. Учитывая самосопряженность в существенном на F_0 операторов в левой и правой частях этого равенства, заключаем, что

$$\Gamma(U)\,\overline{\Phi_S(f)}\,\Gamma(U)^{-1}=\overline{\Phi_S(Uf)}. \ \blacksquare$$

Будем далее использовать старый символ $\Phi_S(f)$ для обозначения замыкания оператора $\Phi_S(f)$.

Теперь можно воспользоваться сигаловым квантованием для определения свободного скалярного эрмитова поля массы m. Возьмем $\mathscr{H}=L^2(H_m,\,d\Omega_m)$, где H_m, $m\geqslant 0$,—массовый гиперболоид в $\mathbb{R}^4$, состоящий из тех точек $p\in\mathbb{R}^4$, для которых $p\cdot\bar{p}-m^2=0$, $p_0>0$ и Ω_m—лоренц-инвариантная мера (определенная в § IX.8). Для каждого $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ определим Ef в $\mathscr{H}$ формулой $Ef=\sqrt{2\pi}\,\hat{f}\restriction H_m$, где (только на протяжении этого раздела) преобразование Фурье

$$\hat{f}(p)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{ip\cdot\tilde{x}}f(x)\,dx$$

определено в терминах лоренц-инвариантного внутреннего произведения $p\cdot\bar{x}$. Причина появления дополнительного множителя $\sqrt{2\pi}$ в определении E и знака плюс в определении преобразования Фурье состоит в том, что при таких определениях величина $\sqrt{2\pi}\,\hat{f}$ для обобщенных функций f вида $f(x)=g(\mathbf{x})\,\delta(t)$ является обычным трехмерным преобразованием Фурье функции g. Если $\Phi_S(\cdot)$—сигалово квантование над $L^2(H_m,\,d\Omega_m)$, мы полагаем

$$\Phi_m(f)=\Phi_S(Ef) \tag{X.67a}$$

для каждой *вещественнозначной* $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Для произвольной функции $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ мы полагаем

$$\Phi_m(f)=\Phi_m(\operatorname{Re}f)+i\Phi_m(\operatorname{Im}f). \tag{X.67b}$$

Отображение $f\longrightarrow\Phi_m(f)$ называется **свободным эрмитовым скалярным полем массы** m.

На $L^2(H_m,\,d\Omega_m)$ зададим еще следующее унитарное представление собственной группы Пуанкаре:

$$(U_m(a,\Lambda)\,\psi)(p)=e^{ip\cdot\tilde{a}}\,\psi(\Lambda^{-1}p), \tag{X.68}$$

где Λ обозначает как элемент абстрактной собственной группы Лоренца, так и соответствующий элемент в ее стандартном представлении на $\mathbb{R}^4$. Как и прежде, F_0 будет обозначать множество конечночастичных векторов.

Теорема X.42. Четверка

$$\langle\mathscr{F}_s(L^2(H_m,\,d\Omega_m)),\ \Gamma(U_m(\cdot,\,\cdot)),\ \Phi_m(\cdot),\ F_0\rangle$$

удовлетворяет аксиомам Вайтмана. Далее, для каждой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$

$$\Phi_m((\Box^2 + m^2) f) = 0,$$

где $\Box^2 = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$.

Доказательство. Поскольку мера $\Omega_m(\cdot)$ инвариантна относительно $\mathcal{L}_+^\uparrow$, представление $U_m(\cdot, \cdot)$ группы $\mathcal{P}_+^\uparrow$ на $L^2(H_m, d\Omega_m)$ непрерывно и унитарно. По определению, $\Gamma(U_m)$ есть сильно непрерывная унитарная группа вида $\overset{n}{\otimes} U_m(\cdot, \cdot)$ на $\mathcal{H}_s^{(n)}$ при любом n. Таким образом, $\Gamma(U_m)$ — унитарная группа на $\mathcal{F}_s(L^2(H_m, d\Omega_m))$, а поскольку $\Gamma(U_m)$ сильно непрерывна на F_0, она сильно непрерывна на $\mathcal{F}_s$. Это доказывает свойство 1.

Для проверки свойства 2 нужно показать, что носитель спектра четырехпараметрической унитарной группы $\Gamma(U_m(a, I))$ лежит в переднем световом конусе. Сначала заметим, что $L^2(H_m, d\Omega_m)$ уже является пространством спектрального представления для $U_m(a, I)$, ибо $(\eta, U_m(a, I)\eta) = \int\limits_{H_m} \exp(ip\cdot\tilde{a})|\eta(p)|^2 d\Omega_m(p)$.

Так как $\Gamma(U_m(a, I)) \restriction \mathcal{H}_s^{(n)} = \overset{n}{\otimes} U_m(a, I)$ при $\eta \in \mathcal{H}_s^{(n)}$ и $n > 0$, то

$$(\eta, \Gamma(U_m(a, I))\eta) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^4} \ldots \int\limits_{\mathbb{R}^4} \exp\left(i\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)\cdot\tilde{a}\right)|\eta(p_1, \ldots, p_n)|^2 \prod_{i=1}^n d\Omega_m(p_i) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^4} e^{i\lambda\cdot\tilde{a}}\, d\mu_\eta(\lambda),$$

где $\mu_\eta(S) = \int \ldots \int\limits_{\Sigma p_i \in S} |\eta(p_1, \ldots, p_n)|^2 \prod_{i=1}^n d\Omega_m(p_i)$. Поскольку носитель Ω_m лежит в $\bar{V}_+$ и $\bar{V}_+$ — конус, носитель μ_η также лежит в $\bar{V}_+$. Далее, если $\psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^\infty$ — произвольный вектор в $\mathcal{F}_s(L^2(H_m, d\Omega_m))$ и μ_ψ — спектральная мера, такая, что

$$(\psi, \Gamma(U_m(a, I))\psi) = \int e^{ip\cdot\tilde{a}} d\mu_\psi(p),$$

то $\mu_\psi = \sum_{n=0}^\infty \mu_{\psi^{(n)}}$, так как $\Gamma(U_m)\colon \mathcal{H}_s^{(n)} \to \mathcal{H}_s^{(n)}$.

Вектор $\Omega_0 = \{1, 0, 0, \ldots\}$ инвариантен относительно $\Gamma(U_m(\cdot, \cdot))$, ибо $\Gamma(U_m)$, по определению, действует тождественно на $\mathcal{H}_s^{(0)} = \mathbb{C}$. В $L^2(H_m, d\Omega_m)$ нет ненулевых векторов, инвариантных относительно $U_m(a, I)$ при всех $a \in \mathbb{R}^4$, поэтому в $\mathcal{H}_s^{(n)}$ нет ненулевых векторов, инвариантных относительно $\overset{n}{\otimes} U_m(\cdot, I)$. Поскольку $\Gamma(U_m)\colon \mathcal{H}_s^{(n)} \to \mathcal{H}_s^{(n)}$, единственным ненулевым инвариантным вектором в $\mathcal{F}_s(L^2(H_m, d\Omega_m))$ является Ω_0 (и все векторы, отличающиеся от него числовым множителем). Это доказывает свойство 3.

Свойство 4 немедленно следует из определения Φ_m: $\Phi_m(f) = \Phi_S(Ef)$ для вещественных f и $\Phi_m(f) = \Phi_m(\operatorname{Re} f) + i\Phi_m(\operatorname{Im} f)$ для комплекснозначных f, и из того, что $\Phi_S(f)$: $F_0 \to F_0$.

Предположим, что ψ_1, $\psi_2 \in F_0$ и $f_n \to f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, причем f_n вещественнозначны. Тогда

$$Ef_n = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}_n \restriction H_m \xrightarrow{L^2(H_m,\, d\Omega_m)} \sqrt{2\pi}\,\hat{f} \restriction H_m = Ef.$$

Из теоремы X.41 (d) следует, что

$$(\psi_1,\ \Phi_m(f_n)\psi_2) \to (\psi_1,\ \Phi_m(f)\psi_2).$$

Отсюда, рассматривая по отдельности вещественную и мнимую части f, мы докажем принадлежность $(\psi_1, \Phi_m(\cdot)\psi_2)$ пространству $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, что даст свойство 5.

Для доказательства пуанкаре-инвариантности поля заметим, что $\Gamma(U_m)$: $F_0 \to F_0$ и потому, в силу теоремы X.41 (e),

$$\Gamma(U_m(a, \Lambda))\,\Phi_m(f)\,\Gamma(U_m(a, \Lambda))^{-1}\psi = \\ = \Gamma(U_m)\,\Phi_S(Ef)\,\Gamma(U_m)^{-1}\psi = \Phi_S(U_m Ef)\,\psi,$$

если $\psi \in F_0$ и f — вещественнозначная функция из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Замена переменных показывает, что $U_m(a, \Lambda)\,Ef = E(\langle a, \Lambda\rangle f)$, так что $\Gamma(U_m(a, \Lambda))\,\Phi_m(f)\,\Gamma(U_m(a, \Lambda))^{-1} = \Phi_m(\langle a, \Lambda\rangle f)$. Поскольку обе части этого равенства линейны по f, а $\Gamma(U_m)$ — линейный оператор, оно справедливо и для комплекснозначных f.

Для доказательства микропричинности (локальности) нужно показать, что для всех f, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, носители которых пространственно-подобны, и всех $\psi \in F_0$

$$\Phi_m(f)\,\Phi_m(g)\,\psi - \Phi_m(g)\,\Phi_m(f)\,\psi = 0. \tag{X.69}$$

Поскольку $\Phi_m(\cdot)$ линейно, (X.69) достаточно доказать для вещественнозначных f и g. Но тогда, в силу (X.64),

$$[\Phi_m(f),\ \Phi_m(g)]\,\psi = [\Phi_S(Ef),\ \Phi_S(Eg)]\,\psi = \\ = (i \operatorname{Im}(Ef, Eg)_{L^2(H_m,\, d\Omega_m)})\,\psi = \\ = \left(\frac{2\pi}{2} \int_{H_m} (\overline{\hat{f}(p)}\,\hat{g}(p) - \hat{f}(p)\,\overline{\hat{g}(p)})\, d\Omega_m(p)\right)\psi = \\ = \left(\int_{\mathbb{R}^4}\int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{2i}\,\Delta_m(x-y)\,f(x)\,g(y)\,dx\,dy\right)\psi,$$

где

$$\Delta_m(x) = \frac{i}{2(2\pi)^3}\int (e^{-i\tilde{p}\cdot x} - e^{ip\cdot\tilde{x}})\,d\Omega_m(p).$$

Далее, $\Delta_m(x) = \Delta_+(x; m^2) - \Delta_+(-x; m^2)$, и так как $\Delta_+(x; m^2) = f_S(x^2)$ для всех пространственно-подобных x (теорема IX.48), то $\operatorname{supp}\Delta_m \subset \overline{V}_+ \cup (-\overline{V}_+)$. В итоге

$$\iint \Delta_m(x-y)\, f(x)\, g(y)\, dx\, dy = 0,$$

откуда следует (X.69).

Цикличность вакуума относительно $\Phi_m(\cdot)$ немедленно следует из теоремы X.41 ((b) и (d)) и того факта, что образ области $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ при отображении E плотен в $L^2(H_m, d\Omega_m)$ (задача 44).

Наконец, если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, то $\widehat{(\Box^2+m^2) f}(p) = -(p\cdot \tilde{p} - m^2)\hat{f}(p)$, так что

$$E((\Box^2+m^2) f) = 0.$$

Следовательно, $\Phi_m((\Box^2+m^2) f) = 0$ для всех $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. ∎

Отметим, что, согласно проведенному выше вычислению, спектральная функция ρ в представлении Челлена—Лемана для Φ_m сосредоточена в точке m.

Классическая механика всегда служила столь плодотворной основой различных физических теорий, что описание физической системы на языке определенных «отнесенных к фиксированному моменту времени степеней свободы», эволюционирующих с течением времени, естественно и желательно. Сейчас мы сделаем это для свободного поля, вводя поле, отнесенное к нулевому моменту времени, и канонически сопряженный ему импульс. Подчеркнем, что выбор фиксированного момента времени релятивистски не инвариантен. По этой причине проверка релятивистской инвариантности теории взаимодействующего поля, построенного с помощью возмущения свободного поля, описанного в терминах полей, взятых в нулевой момент времени,—дело весьма непростое. Отметим еще, что прямой связи между канонически сопряженным импульсом и физическим импульсом P нет.

Начнем с абстрактного подхода. Напомним, что **сопряжение** на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$—это сопряженно-линейная изометрия C со свойством $C^2 = I$.

Определение. Пусть $\mathscr{H}$—комплексное гильбертово пространство и $\Phi_S(\cdot)$—соответствующее сигалово квантование. Пусть C—сопряжение на $\mathscr{H}$. Определим $\mathscr{H}_C = \{f \in \mathscr{H} \mid Cf = f\}$. Для каждого $f \in \mathscr{H}_C$ введем $\varphi(f) = \Phi_S(f)$ и $\pi(f) = \Phi_S(if)$. Отображение $f \mapsto \varphi(f)$ называется **каноническим свободным полем** над $\langle\mathscr{H}, C\rangle$, а отображение $f \mapsto \pi(f)$ называется **канонически сопряженным импульсом**. Мы часто будем опускать $\langle\mathscr{H}, C\rangle$ и писать просто $\mathscr{H}$, если используемое сопряжение и так ясно. Отметим, что множество элементов из $\mathscr{H}$, для которых определены отображения $f \mapsto \varphi(f)$ и $f \mapsto \pi(f)$, зависит от сопряжения C.

Теорема X.43. Пусть $\mathscr{H}$—комплексное гильбертово пространство с сопряжением C. Пусть $\varphi(\cdot)$ и $\pi(\cdot)$—соответствующие канонические поля. Тогда

(a) (i) Для каждого $f \in \mathscr{H}_C$ оператор $\varphi(f)$ самосопряжен в существенном на F_0.

(ii) $\{\varphi(f) \mid f \in \mathscr{H}_C\}$ — коммутирующее семейство самосопряженных операторов.

(iii) Ω_0 — циклический вектор семейства $\{\varphi(f) \mid f \in \mathscr{H}_C\}$.

(iv) Если $f_n \xrightarrow{\mathscr{H}_C} f$, то

$$\varphi(f_n)\psi \to \varphi(f)\psi \qquad \text{для всех } \psi \in F_0,$$

$$e^{i\varphi(f_n)}\psi \to e^{i\varphi(f)}\psi \qquad \text{для всех } \psi \in \mathscr{F}_s(\mathscr{H}).$$

(b) Свойства (i) — (iv) остаются справедливыми при замене $\varphi(\cdot)$ на $\pi(\cdot)$.

(c) Если $f,\ g \in \mathscr{H}_C$, то

$$\varphi(f)\pi(g)\psi - \pi(g)\varphi(f)\psi = i(f, g)\psi \qquad \text{для всех } \psi \in F_0, \tag{X.70}$$

$$e^{i\varphi(f)}e^{i\pi(g)} = e^{-i(f,g)}e^{i\pi(g)}e^{i\varphi(f)}. \tag{X.71}$$

Доказательство. Утверждения (a) (i) и (iv) сразу следуют из соответствующих свойств $\Phi_S(\cdot)$, доказанных в теореме X.41. Доказательство утверждения (a) (iii) мы оставляем читателю (задача 43). Докажем (a) (ii). Для этого заметим, что из (X.65) следует равенство

$$e^{it\varphi(f)}e^{is\varphi(g)} = e^{-its\,\mathrm{Im}(f,g)}e^{is\varphi(g)}e^{it\varphi(f)},$$

где использована вещественная линейность $\varphi(\cdot)$. Если $f, g \in \mathscr{H}_C$, то из поляризационного тождества следует, что $(f, g) = (Cf, Cg) = (g, f)$, поэтому $\mathrm{Im}(f, g) = 0$. В итоге $\exp(it\varphi(f))\exp(is\varphi(g)) = \exp(is\varphi(g))\exp(it\varphi(f))$ для всех s и t. Следовательно, в силу теоремы VIII.13, $\varphi(f)$ и $\varphi(g)$ коммутируют.

Доказательство (b) похоже на доказательство (a). Формулы (X.70) и (X.71) немедленно вытекают из (X.64), (X.65) и того факта, что $\mathrm{Im}(f, ig) = \mathrm{Re}(f, g) = (f, g)$ при $f, g \in \mathscr{H}_C$. ∎

Теперь определим сопряжение, которое мы будем использовать при описании свободного скалярного поля массы m. Запишем $f \in L^2(H_m, d\Omega_m)$ как $f(p_0, \mathbf{p})$ и положим по определению $(Cf)(p_0, \mathbf{p}) = \overline{f(p_0, -\mathbf{p})}$. Отметим, что C определено корректно на $L^2(H_m, d\Omega_m)$, поскольку $\langle p_0, \mathbf{p}\rangle \in H_m$ тогда и только тогда, когда $\langle p_0, -\mathbf{p}\rangle \in H_m$. Ясно, что C — сопряжение. Обозначим канонические поля, отвечающие C, через $\varphi(\cdot)$ и $\pi(\cdot)$ и для вещественнозначных $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ положим

$$\varphi_m(f) = \varphi(Ef),$$

$$\pi_m(f) = \pi(\mu Ef), \qquad \mu = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

и продолжим эти поля на все $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ по линейности. С помощью операторов a^- эти поля можно представить в виде

$$\varphi_m(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(a^-(Ef))^*+a^-(CEf)\},$$
$$\pi_m(f)=\frac{i}{\sqrt{2}}\{(a^-(\mu Ef))^*-a^-(C\mu Ef)\}.$$

Предупредим читателя, что операторы a в последних формулах отличаются от операторов, наиболее часто используемых при обсуждении свободного поля, и что правильным свободным полем в пространстве-времени является Φ_m, а не φ_m; ниже мы покажем, что φ_m и π_m полезны при обсуждении полей, отнесенных к нулевому моменту времени. Отображения $f\longmapsto\varphi_m(f)$ и $f\longmapsto\pi_m(f)$ комплексно линейны и $\varphi_m(f)$, $\pi_m(f)$ самосопряжены тогда и только тогда, когда $Ef\in\mathcal{H}_C$.

Благодаря проектору E класс функций, на котором определены $\varphi_m(\cdot)$ и $\pi_m(\cdot)$, можно расширить и включить в него обобщенные функции вида $\delta(t-t_0)g(x_1, x_2, x_3)$, где $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. В частности, если $t_0=0$, g — вещественнозначная функция и $\hat{g}$ — *обычное* преобразование Фурье на $\mathbb{R}^3$, то

$$(CE\widehat{\delta g})(p_0, \mathbf{p})=\overline{E\widehat{\delta g}(p_0, -\mathbf{p})}=(2\pi)^{-1/2}\overline{\hat{g}(-\mathbf{p})}=(2\pi)^{-1/2}\hat{g}(\mathbf{p})=E\widehat{\delta g},$$

т. е. $E(\delta g)$ и $\mu E(\delta g)$ лежат в $\mathcal{H}_C$. Следовательно, $\varphi_m(\delta g)$ и $\pi_m(\delta g)$ самосопряжены, если $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ вещественнозначна. Отображения $g\longmapsto\varphi_m(\delta g)$, $g\longmapsto\pi_m(\delta g)$ по очевидным причинам называются **полями, взятыми в нулевой момент времени**. Начиная с этого места, мы далее в качестве аргументов полей $\varphi_m(\cdot)$ и $\pi_m(\cdot)$ будем брать только пробные функции вида δg и в случае, когда $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, вместо $\varphi_m(\delta g)$ и $\pi_m(\delta g)$ будем писать просто $\varphi_m(g)$ и $\pi_m(g)$. Если f и g — вещественнозначные функции из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, то из (X.70) следует, что для всех $\psi\in F_0$

$$[\varphi_m(f), \pi_m(g)]\psi=i\int_{H_m}\overline{\hat{f}(p)}\,\hat{g}(p)\,\mu(p)\,\psi\,d\Omega_m(p). \qquad (X.72)$$

Для удобства, а также с целью согласования наших обозначений с общепринятыми, перепищем поля, построенные нами в пространстве Фока, отвечающем одночастичному пространству $L^2(H_m, d\Omega_m)$, в терминах пространства Фока, построенного из пространства $L^2(\mathbb{R}^3)$. Для упрощения обозначений определим для каждой функции $f\in L^2(H_m, d\Omega_m)$ операторы

$$a^\dagger(f)=(a^-(f))^*, \qquad a(f)=a^-(Cf).$$

Прежде всего отметим, что каждая функция $f(p)\in L^2(H_m, d\Omega_m)$ естественным образом задает функцию $f(\mathbf{p})=f(\mu(\mathbf{p}), \mathbf{p})$ на $\mathbb{R}^3$.

Для каждой $f \in L^2(H_m, d\Omega_m)$ положим $(Jf)(\mathbf{p}) = f(\mu(\mathbf{p}), \mathbf{p})/\sqrt{\mu(\mathbf{p})}$. Поскольку J — унитарное отображение $L^2(H_m, d\Omega_m)$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$, то $\Gamma(J)$ — унитарное отображение $\mathcal{F}_s(L^2(H_m, d\Omega_m))$ на $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$. Операторы уничтожения и рождения $\tilde{a}(\cdot)$, $\tilde{a}^\dagger(\cdot)$ в $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ связаны с $a(\cdot)$, $a^\dagger(\cdot)$ соотношениями

$$\tilde{a}\left(\frac{f(\mathbf{p})}{\sqrt{\mu(\mathbf{p})}}\right) = \Gamma(J)\, a(f)\, \Gamma(J)^{-1},$$

$$\tilde{a}^\dagger\left(\frac{f(\mathbf{p})}{\sqrt{\mu(\mathbf{p})}}\right) = \Gamma(J)\, a^\dagger(f)\, \Gamma(J)^{-1}.$$

С помощью унитарного отображения $\Gamma(J)$ мы перенесем поля Вайтмана в $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$, полагая

$$\tilde{\Phi}_m(f) \equiv \Gamma(J)\,\Phi_m(f)\,\Gamma(J)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{a}\left(\tilde{C}\frac{Ef}{\sqrt{\mu}}\right) + \tilde{a}^\dagger\left(\frac{Ef}{\sqrt{\mu}}\right)\right\} \quad \text{для вещественнозначных } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4),$$

$$\tilde{\varphi}_m(f) \equiv \Gamma(J)\,\varphi_m(f)\,\Gamma(J)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{a}\left(\frac{E(f\delta)}{\sqrt{\mu}}\right) + \tilde{a}^\dagger\left(\frac{E(f\delta)}{\sqrt{\mu}}\right)\right\} \quad \text{для вещественнозначных } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3),$$

где $\tilde{C} = JCJ^{-1}$ действует по правилу $(\tilde{C}g)(\mathbf{p}) = \overline{g(-\mathbf{p})}$. *Установив это соответствие, мы впредь будем опускать* $\sim$ *и не будем использовать жирный шрифт*; далее мы будем иметь дело только с полями в $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ и только с трехмерными импульсами. Кроме того, напомним, что сужение четырехмерного преобразования Фурье, которым мы пользовались в этом разделе, на функции вида $\delta(x_0)\, g(x_1, x_2, x_3)$ дает обычное трехмерное преобразование Фурье. Отметим еще, что

$$\bar{f} = (C\hat{f})^{\vee},$$

поэтому $C\hat{f} = \hat{f}$ тогда и только тогда, когда f вещественнозначна.

Для вещественнозначных f и g равенство (X.72) превращается в соотношение

$$[\varphi_m(f),\ \pi_m(g)] = i\int f(x)\, g(x)\, d^3x, \qquad \text{(X.73)}$$

которое является каноническим коммутационным соотношением (ККС) над пространством Шварца. В дополнении к этому разделу доказано, что для каждого $m > 0$ представление ККС, определяемое полями φ_m, π_m, неприводимо, а представления, отвечающие разным m, неэквивалентны. Таким образом, поля в нулевой момент времени в теориях свободных скалярных полей порождают различные представления ККС.

В качестве последней темы, перед тем как перейти к взаимодействующим полям, покажем, каким образом развитый выше формализм связан с «полями» и «операторами рождения и уничтожения», вводимыми в физической литературе. Сначала положим

$$D_{\mathscr{S}} = \{\psi \mid \psi \in F_0,\ \psi^{(n)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{3n}) \text{ для всех } n\}$$

и для каждого $p \in \mathbb{R}^3$ определим оператор $a(p)$ в $\mathscr{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$, задав его формулой

$$(a(p)\psi)^{(n)}(k_1, \ldots, k_n) = \sqrt{n+1}\, \psi^{(n+1)}(p, k_1, \ldots, k_n) \qquad (X.74)$$

на $D_{\mathscr{S}}$. Сопряженный к $a(p)$ оператор не является плотно определенным, поскольку формально он задается соотношением

$$(a^\dagger(p)\psi)^{(n)}(k_1, \ldots, k_n) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{n} \delta(p - k_l)\, \psi^{(n-1)}(k_1, \ldots, k_{l-1}, k_{l+1}, \ldots, k_n). \qquad (X.75)$$

Однако $a^\dagger(p)$ — корректно определенная квадратичная форма на $D_{\mathscr{S}} \times D_{\mathscr{S}}$. Например, если $\psi_1 = \{0, \psi^{(1)}, 0, \ldots\}$ и $\psi_2 = \{0, 0, \psi^{(2)}, 0, \ldots\}$, то

$$(\psi_2, a^\dagger(p)\psi_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (\overline{\psi^{(2)}(k_1, p)}\, \psi^{(1)}(k_1) + \overline{\psi^{(2)}(p, k_1)}\, \psi^{(1)}(k_1))\, dk_1.$$

Читатель легко проверит, что формулы

$$a(g) = \int_{\mathbb{R}^3} a(p)\, g(-p)\, dp, \qquad (X.76a)$$

$$a^\dagger(g) = \int_{\mathbb{R}^3} a^\dagger(p)\, g(p)\, dp \qquad (X.76b)$$

справедливы для всех $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, если эти равенства понимать в смысле квадратичных форм. Например, (X.76a) означает, что для $\psi_1, \psi_2 \in D_{\mathscr{S}}$

$$(\psi_1, a(g)\psi_2) = \int_{\mathbb{R}^3} (\psi_1, a(p)\psi_2)\, g(-p)\, dp.$$

Смысл (X.76b) аналогичен. Поскольку $a(p)$: $D_{\mathscr{S}} \to D_{\mathscr{S}}$, степени $a(p)$ задают операторы на $D_{\mathscr{S}}$. Как и раньше, можно написать формальное выражение для $(a^\dagger(p))^n$, но оно не имеет смысла как оператор, а только как квадратичная форма на $D_{\mathscr{S}} \times D_{\mathscr{S}}$. Отметим, что

$$(\psi_1, (a^\dagger(p))^n \psi_2) = ((a(p))^n \psi_1, \psi_2), \qquad (X.77)$$

поэтому в смысле квадратичных форм $(a^\dagger(p))^n$ и $(a(p))^n$ сопряжены друг другу при каждом n. Квадратичную форму $a^\dagger(p)^n$ можно, конечно, определить с помощью (X.77), а затем убедиться, что она возникает путем возведения в n-ю степень формального объекта, даваемого формулой (X.75). Поскольку $a(p_1)$: $D_{\mathscr{S}} \to D_{\mathscr{S}}$, квадратичная форма $(\psi_1, a^\dagger(p_2)\, a(p_1)\, \psi_2)$ определена для всех $\langle p_1, p_2\rangle \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Заметим, однако, что $(\psi_1, a(p_1)\, a^\dagger(p_2)\, \psi_2)$ не имеет смысла, так как $a^\dagger(p_2)$ — всего лишь квадратичная форма. Вообще, любое произведение вида $\prod_{i=1}^{N_1} a(p_i)$ задает оператор из $D_{\mathscr{S}}$ в $D_{\mathscr{S}}$, а $\prod_{i=N_1+1}^{N_2} a^\dagger(p_i)$ — корректно определенная квадратичная форма на $D_{\mathscr{S}} \times D_{\mathscr{S}}$. Таким образом,

$$\left(\psi_1, \left(\prod_{i=N_1+1}^{N_2} a^\dagger(p_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{N_1} a(p_i)\right)\psi_2\right)$$

также квадратичная форма на $D_{\mathscr{S}} \times D_{\mathscr{S}}$. Легко проверить, что в случае $f_i \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$

$$\left(\prod_{i=N_1+1}^{N_2} a^\dagger(f_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{N_1} a(f_i)\right) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{3N_2}} \left(\prod_{i=N_1+1}^{N_2} a^\dagger(p_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{N_1} a(-p_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{N_2} f(p_i)\right) dp_1 \ldots dp_{N_2} \tag{X.78}$$

в смысле квадратичных форм и

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} a^\dagger(p)\, a(p)\, dp. \tag{X.79}$$

Генератор сдвигов по времени в теории свободного скалярного поля массы m имеет вид

$$H_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \mu(p)\, a^\dagger(p)\, a(p)\, dp \tag{X.80}$$

и называется **свободным гамильтонианом массы** m. Равенства (X.78), (X.79) и (X.80) не требуют никаких формальных манипуляций, а представляют собой точные математические утверждения о квадратичных формах.

Теорема X.44. Пусть n_1 и n_2 — неотрицательные целые числа. Предположим, что $W \in L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$. Тогда существует единственный определенный в $\mathscr{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ оператор T_W, такой, что $D_{\mathscr{S}} \subset D(T_W)$ — его существенная область и

(a) $$T_W = \int_{\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)}} W(k_1, \ldots, k_{n_1}, p_1, \ldots, p_{n_2}) \left(\prod_{i=1}^{n_1} a^\dagger(k_i)\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n_2} a(p_j)\right) d^{3n_1}k\, d^{3n_2}p \tag{X.81}$$

в смысле квадратичных форм на $D_{\mathscr{S}} \times D_{\mathscr{S}}$.

Кроме того,

(b) Если m_1 и m_2 — такие неотрицательные целые числа, что $m_1+m_2=n_1+n_2$, то $(1+N)^{-m_1/2}T_W(1+N)^{-m_2/2}$ — ограниченный оператор с нормой

$$\|(1+N)^{-m_1/2}T_W(1+N)^{-m_2/2}\| \leqslant C(m_1, m_2)\|W\|_{L^2}.$$

В частности, при $m_1=n_1$ и $m_2=n_2$

$$\|(1+N)^{-n_1/2}T_W(1+N)^{-n_2/2}\| \leqslant \|W\|_{L^2}.$$

(c) $$T_W^* = \int\limits_{\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)}} \overline{W(k_1, \ldots, k_{n_1}, p_1, \ldots, p_{n_2})} \times$$
$$\times \left(\prod_{i=1}^{n_2} a^\dagger(p_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{n_1} a(k_i)\right) d^{3n_1}k\, d^{3n_2}p$$

в смысле квадратичных форм на $D_{\mathscr{S}} \times D_{\mathscr{S}}$.

(d) Если $W_n \longrightarrow W$ в $L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$, то $T_{W_n} \longrightarrow T_W$ сильно на $D_{\mathscr{S}}$.

(e) Множество F_0 содержится в $D(T_W)$ и $D(T_W^*)$, и на векторах из F_0 операторы T_W и T_W^* задаются явными формулами

$$(T_W\psi)^{(l-n_2+n_1)} = K(l, n_1, n_2)\, S\Big[\int W(k_1, \ldots, k_{n_1}, p_1, \ldots, p_{n_2}) \times$$
$$\times \varphi^{(l)}(p_1, \ldots, p_{n_2}, k_{n_1+1}, \ldots, k_{n_1+l-n_2} d^{3n_2}p\Big], \tag{X.82a}$$

$$(T_W\psi)^{(n)} = 0 \quad \text{при } n < n_1 - n_2,$$

$$(T_W^*\psi)^{(l-n_1+n_2)} = K(l, n_2, n_1)\, S\Big[\int \overline{W(k_1, \ldots, k_{n_1}, p_1, \ldots, p_{n_2})} \times$$
$$\times \psi^{(l)}(k_1, \ldots, k_{n_1}, p_{n_2+1}, \ldots, p_{n_2+l-n_1})\, d^{3n_1}k, \tag{X.82b}$$

$$(T_W^*\psi)^{(n)} = 0 \quad \text{при } n < n_2 - n_1,$$

где S — оператор симметризации и

$$K(l, n_1, n_2) = \left[\frac{l!\,(l+n_1-n_2)!}{((l-n_2)!)^2}\right]^{1/2}.$$

Доказательство. На векторах из $D_{\mathscr{S}}$ мы определяем $T_W\psi$ формулой (X.82a). В силу неравенства Шварца и того факта, что S — проектор,

$$\|(T_W\psi)^{(l-n_2+n_1)}\|^2 \leqslant K(l, n_1, n_2)^2 \|W\|^2 \|\psi^{(l)}\|^2.$$

Если теперь определить оператор T_W^* на $D_{\mathscr{S}}$ с помощью формулы (X.82b), то легко проверить, что для всех φ и ψ из $D_{\mathscr{S}}$

$$(\varphi, T_W\psi) = (T_W^*\varphi, \psi).$$

Таким образом, T_W замыкаем и T_W^* — сужение на $D_{\mathscr{S}}$ оператора, сопряженного к T_W. Пусть теперь T_W обозначает $\overline{T}_W$, а T_W^* — оператор, сопряженный к T_W. По определению T_W множество $D_{\mathscr{S}}$ — существенная область для T_W, а поскольку T_W ограничен на l-частичных векторах из $D_{\mathscr{S}}$, справедливо включение $F_0 \subset D(T_W)$. Поскольку правая часть (X.82a) также ограничена на l-частичных векторах, (X.82a) представляет действие T_W на любой l-частичный вектор. Доказательство утверждения о T_W^* в пункте (е) аналогично.

Для доказательства (b) предположим, что $\psi \in D_{\mathscr{S}}$. Тогда в силу проведенных вычислений

$$\|((1+N)^{-m_1/2} T_W (1+N)^{-m_2/2} \psi)^{(l-n_2+n_1)}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{K(l, n_1, n_2)}{(1+l-n_2+n_1)^{m_1/2}(1+l)^{m_2/2}} \right)^2 \|W\|^2 \|\psi^{(l)}\|^2,$$

так что

$$\|(1+N)^{-m_1/2} T_W (1+N)^{-m_2/2} \psi\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sup_{l<\infty} \frac{K(l, n_1, n_2)}{(1+l-n_2+n_1)^{m_1/2}(1+l)^{m_2/2}} \right) \|W\| \|\psi\| \leqslant$$
$$\leqslant C(m_1, m_2) \|W\| \|\psi\|,$$

где

$$C(m_1, m_2) = \sup_l \frac{K(l, n_1, n_2)}{(1+l-n_2+n_1)^{m_1/2}(1+l)^{m_2/2}} < \infty,$$

так как $m_1+m_2=n_1+n_2$. Точная верхняя грань берется только по тем l, для которых $l-n_2+n_1 \geqslant 0$, ибо все другие члены уничтожаются действием T_W. Следовательно, $(1+N)^{-m_1/2} T_W \times \times (1+N)^{-m_2/2}$ расширяется до ограниченного оператора на $\mathscr{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ с нормой, меньшей или равной $C(m_1, m_2)$. Если $m_1=n_1$ и $m_2=n_2$, то $C(m_1, m_2)=1$.

Для доказательства (d) нужно только заметить, что если $\psi=\{0, \ldots, \psi^{(l)}, 0, \ldots\} \in D_{\mathscr{S}}$ и $W_n \xrightarrow{L^2} W$, то

$$\|T_{W_n}\psi - T_W\psi\| = \|T_{W_n-W}\psi\| \leqslant$$
$$\leqslant K(l, n_1, n_2)\|W_n - W\| \|\psi\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Поскольку $D_{\mathscr{S}}$ состоит из конечных линейных комбинаций таких векторов, мы доказали, что T_{W_n} сильно сходятся на $D_{\mathscr{S}}$ к T_W, если $W_n \xrightarrow{L^2} W$.

Для доказательства (а) возьмем $\psi_1, \psi_2 \in D_{\mathscr{S}}$, $\psi_1=\{0, \ldots, \psi_1^{(l-n_2+n_1)}, 0, \ldots\}$, $\psi_2=\{0, \ldots, \psi_2^{(l)}, 0, \ldots\}$. Тогда если $W=\left(\prod_{i=1}^{n_1} f_i(k_i)\right) \times$

$\times\left(\prod_{j=1}^{n_2} g(p_j)\right)$, то определение формы $\left(\prod_{i=1}^{n_1} a^\dagger(k_i)\right)\left(\prod_{j=1}^{n_2} a(p_j)\right)$ показывает, что

$$(\psi_1, T_W\psi_2)=\int W(k_1, \ldots, k_{n_1}, p_1, \ldots, p_{n_2})\times$$
$$\times\left(\psi_1, \left(\prod_{i=1}^{n_1} a^\dagger(k_i)\right)\left(\prod_{j=1}^{n_2} a(p_j)\right)\psi_2\right)d^{3n_1}k\,d^{3n_2}p. \qquad (X.83)$$

Так как обе части (X.83) линейно зависят от W, это соотношение остается справедливым и для W, представляющих собой конечные линейные комбинации произведений, с которых мы начали. Поскольку

$$\left(\psi_1, \left(\prod_{i=1}^{n_1} a^\dagger(k_i)\right)\left(\prod_{j=1}^{n_2} a(p_j)\right)\psi_2\right)\in L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$$

и справедливо (d), обе части (X.83) являются непрерывными линейными функционалами на $L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$, а так как они совпадают на плотном множестве, они совпадают всюду. Наконец, (X.83) распространяется по линейности на всю область $D_{\mathscr{S}}\times D_{\mathscr{S}}$. Это доказывает (a); доказательство (c) аналогично. ∎

Напоследок отметим, что на $D_{\mathscr{S}}$ свободное скалярное поле и поля в нулевой момент времени как квадратичные формы можно выразить через $a^\dagger(k)$ и $a(k)$:

$$\Phi_m(x, t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}\left[e^{i(\mu(p)t-p\cdot x)}a^\dagger(p)+e^{-i(\mu(p)t-p\cdot x)}a(p)\right]\frac{d^3p}{\sqrt{2\mu(p)}}, \qquad (X.84)$$

$$\varphi_m(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}\left[e^{-ip\cdot x}a^\dagger(p)-e^{ip\cdot x}a(p)\right]\frac{d^3p}{\sqrt{2\mu(p)}}, \qquad (X.85)$$

$$\pi_m(x)=\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}\left[e^{-ip\cdot x}a^\dagger(p)-e^{ip\cdot x}a(p)\right]\sqrt{\frac{\mu(p)}{2}}\,d^3p. \qquad (X.86)$$

Перед тем как обратиться к гамильтонову методу построения самодействующего скалярного бозонного поля в двумерном пространстве-времени, разумно сделать несколько общих замечаний о квантовой теории взаимодействующих полей. В настоящее время большинство из этих теорий носит предматематический характер в следующем смысле. При современном состоянии теории можно выписать гамильтонианы и поля, но нельзя указать гильбертово пространство, где эти величины задают корректные операторы. С помощью полей и гамильтонианов путем формальных манипуляций можно вычислить матричные элементы S-оператора. Эти матричные элементы представляются степенными рядами, коэффициенты которых зависят от вакуумных средних, вычисляемых с. помощью величин теории свободного поля. В типичных случаях каждый коэффициент этих рядов дается расходящимся интегралом. Обычно такие расходящиеся величины ликвидируются с помощью так называемой процедуры «перенормировок», которая дает предписания, каким образом, делая бесконечными различные параметры, входящие в теорию, извлечь из возникающих разностей расходящихся величин конечные «главные части». В квантовой электродинамике эти предписания приводят к предсказаниям, удивительно близким к экспериментальным данным. Однако прогресс в математической задаче обоснования подобных моделей до сих пор был весьма медленным. Реальные математические результаты получены только в нескольких случаях и только в пространстве-времени размерности меньше 4. Только в одной модели (теория, которую мы обсуждаем ниже, — частный случай этой модели) проверены (на 1974 г.) все аксиомы Вайтмана. Если эти случаи содержат зерно истины, то математическое решение отмеченных проблем потребует дальнейшего продвижения в различных областях функционального анализа, таких, как техника доказательств самосопряженности, теория возмущений, теория рассеяния, теория вероятностей, спектральный анализ и C^*-алгебры.

«Теория взаимодействующих полей» — это полевая теория, в которой выполняются аксиомы Вайтмана и в которой нетривиальна матрица рассеяния (см. § XII.15). Естественный способ построения таких полей состоит в попытке ввести возмущение в одну из построенных нами теорий свободных полей. В классической лагранжевой теории поля простейшие гамильтонианы имеют вид

$$H = H_0 + \int_{\mathbb{R}^3} F(\varphi(x))\, d^3x,$$

где F — некоторая функция, скажем полином (см. § X.13). Поскольку мы хотим, чтобы гамильтониан был ограничен снизу, мы ожидаем, что этот полином имеет четный порядок, а коэффициент при старшей степени в этом полиноме положителен. Выбор $F(x) = \alpha x^2$ приводит к тривиальному рассеянию, ибо результирующая теория описывает свободное поле массы $m+2\alpha$. Второй простейший выбор — это $F(x) = \lambda x^4$. В этом случае мы приходим к необходимости рассматривать формальный гамильтониан

$$H = H_0 + \lambda \int_{\mathbb{R}^3} (\varphi_m(x))^4\, d^3x, \qquad \lambda > 0, \tag{X.87}$$

где H_0 — гамильтониан свободного скалярного бозонного поля с массой m, а $\varphi_m(x)$ — свободное поле в нулевой момент времени. Первая наивная надежда связана с идеей доказать самосопряженность H и определить в пространстве Фока самодействующее поле формулой

$$\Phi(x,\ t) = e^{itH}\varphi_m(x)\,e^{-itH}. \tag{X.88}$$

Мы не сможем придать смысл формулам (X.87), (X.88), не подвергая их серьезным изменениям, однако коммутационные соотношения между φ, π, a и $a^\dagger$ позволят формально вычислить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет Φ (хотя эти формальные вычисления относятся как раз к тому типу, относительно использования которых мы предостерегали читателя в § VIII.5):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(x,\ t) = e^{itH}i^2[H, [H,\ \varphi_m(x)]]\,e^{-itH};$$

$$\begin{aligned}
&[H,\ \varphi_m(x)] = [H_0,\ \varphi_m(x)] = \\
&= \int\int \frac{d^3k\, d^3l}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\mu(l)}}\,\mu(k)\,\{e^{il\cdot x}[a^\dagger(k)\,a(k),\ a(l)] + \\
&\qquad\qquad + e^{-il\cdot x}[a^\dagger(k)\,a(k),\ a^\dagger(l)]\} = \\
&= \int \frac{d^3k\, d^3l}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\mu(l)}}\,\mu(k)\,\{e^{il\cdot x}(-a(k)\,\delta(k-l)) + e^{-il\cdot x}a^\dagger(k)\,\delta(k-l)\} = \\
&= \int \frac{\sqrt{\mu(k)}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2}}\,(-e^{ik\cdot x}a(k) + e^{-ik\cdot x}a^\dagger(k))\,d^3k = -i\pi_m(x);
\end{aligned}$$

$$[H,\ [H,\ \varphi_m(x)]] = [H_0,\ [H,\ \varphi_m(x)]] + [H_I,\ [H,\ \varphi_m(x)]];$$

$$\begin{aligned}
[H_0[H,\ \varphi_m(x)]] &= \int \frac{(\mu(k))^2}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\mu(k)}}\,[e^{ik\cdot x}a(k) + e^{-ik\cdot x}a^\dagger(k)]\,d^3k = \\
&= (-\Delta + m^2)\,\varphi_m(x);
\end{aligned}$$

$$[\varphi_m(y),\ [H,\ \varphi_m(x)]] = \int \frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{(2\pi)^{3/2}}\,d^3k = \delta(x-y);$$

$$\begin{aligned}
[H_I,\ [H,\ \varphi_m(x)]] &= \lambda \int [\varphi_m(y)^4,\ [H,\ \varphi_m(x)]]\,d^3y = \\
&= 4\lambda \int \varphi_m(y)^3\,\delta(x-y)\,d^3y = 4\lambda\varphi_m(x)^3.
\end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial t^2} &= e^{itH}(\Delta - m^2)\,\varphi_m(x)\,e^{-itH} - 4\lambda e^{itH}\varphi_m(x)^3 e^{-itH} = \\
&= (\Delta - m^2)\,e^{itH}\varphi_m(x)\,e^{-itH} - 4\lambda\,(e^{itH}\varphi_m(x)\,e^{-itH})^3 = \\
&= (\Delta - m^2)\,\Phi(x,\ t) - 4\lambda\Phi(x,\ t)^3.
\end{aligned}$$

Таким образом, формально поле $\Phi(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению

$$(\Box^2 + m^2)\,\Phi(x,\ t) = -4\lambda\,(\Phi(x,\ t))^3. \tag{X.89}$$

Другой подход к интересующей нас задаче состоит в том, чтобы попытаться найти операторнозначную обобщенную функцию

$\Phi(x, t)$, которая удовлетворяет (X.89) и аксиомам Вайтмана. Далее мы будем писать $\varphi(x)$ вместо $\varphi_m(x)$.

Вернемся к рассмотрению (X.87). Хотя $\varphi(x)$ — корректно определенная квадратичная форма на $D_{\mathcal{S}} \times D_{\mathcal{S}}$, это не оператор, и потому необходимо разъяснить, что понимается под $(\varphi(x))^4$. Предположим, что мы взяли в качестве $\varphi(x)$ выражение (X.85) и формально возвели его в четвертую степень так, как будто $\varphi(x)$ — оператор. Мы получим сумму 16 членов вида

$$\int_{\mathbb{R}^3}\cdots\int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-i\sum_{j=1}^{4} k_j x\right)\left(\prod_{j=1}^{4}(2\pi)^{-3/2}(2\mu(k_j))^{-1/2}\right)\times \\ \times\left(\prod_{j=1}^{4} a^{\#}(k_j)\right) d^3k_1 \ldots d^3k_4, \tag{X.90}$$

где $a^{\#}(k_j)$ означает либо $a(-k_j)$, либо $a^{\dagger}(k_j)$. Как мы уже знаем, выражения вида (X.90), вообще говоря, не имеют смысла даже как квадратичные формы, если только в них все $a^{\dagger}$ не стоят слева от a. Если же все $a^{\dagger}$ стоят слева от a, то (X.90) для каждого x задает квадратичную форму на $D_{\mathcal{S}} \times D_{\mathcal{S}}$. Поэтому определим n-ю **викову степень** $\varphi(x)$ как квадратичную форму на $D_{\mathcal{S}} \times D_{\mathcal{S}}$, получаемую путем формального возведения $\varphi(x)$ в n-ю степень и перестановки в полученном выражении всех $a^{\dagger}$ налево от a. Будем обозначать n-ю викову степень $\varphi(x)$ через $:\varphi(x)^n:$. Подчеркнем, что правильнее было бы называть ее n-й виковой степенью *относительно* Ω_0 (см. задачу 48). Читатель может убедиться, что *формально*

$$:\varphi(x)^4: = \varphi(x)^4 - c\varphi(x)^2 + d,$$

где c и d — выбранные подходящим образом бесконечные константы. Вводя далее обрезания, мы придадим точный математический смысл этому выражению.

Если теперь в (X.87) заменить $\varphi(x)^4$ на $:\varphi(x)^4:$, то H станет квадратичной формой на $D_{\mathcal{S}} \times D_{\mathcal{S}}$. Например, если $\psi_i = \{0, 0, 0, \psi_i^{(3)}, 0, \ldots\}$, $i = 1, 2$, то член с двумя $a^{\dagger}$ и двумя a, входящий в $(\psi_1, H\psi_2)$, равен

$$\int\left(\iiiint\left(\frac{\exp(-ix\cdot(k_1+k_2-k_3-k_4))}{\prod_{j=1}^{4}(2\mu(k_j))^{1/2}(2\pi)^{3/2}}\right)\times \\ \times\left(\iint \overline{\psi_1^{(3)}(p_1, k_1, k_2)}\,\psi_2^{(3)}(p_2, k_3, k_4)\, d^3p_1\, d^3p_2\right) d^3k_1 \ldots d^3k_4\right) d^3x. \tag{X.91}$$

Это корректно определенный конечный интеграл, ибо $\psi_i^{(3)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. К сожалению, квадратичная форма H не порождается никаким оператором. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим формальное выражение для $H\Omega_0$. Оно равно вектору $(0, 0, 0, 0, \psi^{(4)}, 0, \ldots)$, где (формально)

$$\psi^{(4)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp\left(-ix \cdot \sum_{j=1}^{4} k_j\right)}{\prod_{i=1}^{4} (2\pi)^{3/2} (2\mu(k_i))^{1/2}} d^3x =$$

$$= \frac{\delta\left(\sum_{j=1}^{4} k_j\right)}{(2\pi)^3 \prod_{i=1}^{4} (2\mu(k_i))^{1/2}}.$$

Это выражение заведомо не принадлежит $L^2(\mathbb{R}^{3\cdot 4})$; во-первых, оно сингулярно из-за δ-функции, а во-вторых, даже если ограничить область интегрирования по x, взяв $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и рассмотрев

$$\int \frac{g(x)\exp\left(-ix \sum_{j=1}^{4} k_j\right)}{\prod_{i=1}^{4} (2\pi)^{3/2} (2\mu(k_i))^{1/2}} d^3x = \frac{\hat{g}\left(\sum_{j=1}^{4} k_j\right)}{(2\pi)^{9/2} \prod_{i=1}^{4} (2\mu(k_i))^{1/2}},$$

мы все еще не получим L^2-функцию из-за слишком медленного убывания $\mu(k_i)$ на ∞. Таким образом, здесь мы столкнулись с бесконечностями двух типов: расходимостью, вызванной бесконечностью объема (x-пространства), и ультрафиолетовыми расходимостями (большие k).

Для того чтобы все-таки получить оператор, *мы ограничимся рассмотрением одномерного пространства* (т. е. теперь каждая из переменных p_i, k_i, x будет одномерной) и заменим квадратичную форму $\int_{\mathbb{R}} :\varphi(x)^4: dx$ на $\int_{\mathbb{R}} g(x) :\varphi(x)^4: dx$, где $g(x)$ — вещественнозначная функция из $L^2(\mathbb{R})$. Тогда каждый член в квадратичной форме

$$H_0 + \int_{\mathbb{R}} g(x) :\varphi(x)^4: dx$$

обладает ядром вида $\hat{g}\left(\sum_{j=1}^{4} k_j\right) \Big/ \prod_{i=1}^{4} (2\mu(k_i))^{1/2}$. Поскольку эта функция лежит в $L^2(\mathbb{R}^4)$ (задача 47), теорема X.44 гарантирует, что квадратичную форму порождает некоторый оператор на $D_{\mathscr{S}}$, который симметричен, ибо g — вещественнозначная функция.

Обозначим оператор $\int_{\mathbb{R}} g(x) :\varphi(x)^4: dx$ через $H_I(g)$ и определим на $D_{\mathcal{S}}$ оператор

$$H(g) = H_0 + H_I(g) = H_0 + \int_{\mathbb{R}} g(x) :\varphi(x)^4: dx.$$

В качестве g мы будем часто выбирать гладкую функцию с компактным носителем, равную единице на очень большом интервале. Иногда в качестве g выбирают характеристическую функцию большого интервала. В любом случае смысл введения g в том, что она выключает взаимодействие при больших значениях x. По этой причине g называется **пространственным обрезанием,** а $H(g)$ — **пространственно обрезанным гамильтонианом полевой теории** $(\varphi^4)_2$**-взаимодействия** (индекс 2 указывает на то, что мы используем одномерное пространство, так что пространство-время двумерно). Соберем все сказанное в отдельное

Предложение. Пусть φ — свободное скалярное бозонное поле массы m при $t=0$ в двумерном пространстве-времени. Пусть g — вещественнозначная функция из $L^2(\mathbb{R})$. Тогда

$$H(g) = H_0 + H_I(g) = \int_{\mathbb{R}} \mu(k)\, a^\dagger(k)\, a(k)\, dk + \int_{\mathbb{R}} g(x) :\varphi(x)^4: dx$$

— корректно заданный на $D_{\mathcal{S}}$ симметрический оператор.

В § 9 мы докажем, что $H(g)$ самосопряжен в существенном на $C^\infty(H_0) \cap D(H_I(g))$, а в гл. XIX покажем, как с помощью алгебр фон Неймана можно снять пространственное обрезание, перейдя к новому представлению канонических коммутационных соотношений.

Считается, что указанный способ анализа объемных расходимостей, состоящий во введении и последующем убирании с помощью методов теории C^*-алгебр пространственного обрезания, остается приемлемым и при рассмотрении расходимостей того же типа в более общих теориях квантованных полей. Предполагается, что ультрафиолетовые расходимости в $(\varphi^4)_3$- и $(\varphi^4)_4$-моделях можно убрать с помощью процедуры, известной под именем процедуры перенормировок, сопровождаемой изменением представления канонических коммутационных соотношений. Для того чтобы кратко описать процедуру перенормировки, напомним, что, как мы уже видели, виково упорядочение степеней поля можно интерпретировать как вычитание полинома более низкого порядка с бесконечными коэффициентами. Для $(\varphi^4)_3$-модели известно, а для $(\varphi^4)_4$-модели ожидается, что похожий способ вычитания членов с бесконечными константами будет по-прежнему применим, с тем исключением, что константы не будут больше линейно зависеть от λ, как это было в случае викова упорядочения. Дальнейшее обсуждение и ссылки на результаты в теории $(\varphi^4)_3$-взаимодействия см. в Замечаниях.

Наша последняя тема — построение **Q-пространства** и пространства $L^2(Q, d\mu)$, где можно дать новое представление для введенных выше структур, связанных с пространством Фока. По аналогии со случаем одной степени свободы, когда $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ изоморфно $L^2(\mathbb{R}, dx)$, причем $\Phi_S(1)$ становится умножением на x, мы построим пространство с мерой $\langle Q, \mu\rangle$, $\mu(Q)=1$, и унитарное отображение $S\colon \mathcal{F}_s(\mathcal{H}) \to L^2(Q, d\mu)$, такие, что $S\varphi(f)S^{-1}$ для каждой функции $f\in\mathcal{H}_C$ будет действовать в $L^2(Q, d\mu)$ как оператор умножения на измеримую функцию. Затем мы сумеем показать, что в случае свободного скалярного поля массы m в двумерном пространстве-времени величина $V\equiv SH_I(g)S^{-1}$ задается оператором умножения на функцию $V(q)$, которая для каждого $p<\infty$ лежит в пространстве $L^p(Q, d\mu)$. В § X.9 мы воспользуемся этим фактом для доказательства самосопряженности в существенном на $C^\infty(H_0)\cap D(H_I(g))$ гамильтониана $H=H_0+H_I(g)$.

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такой ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, что $f_n\in\mathcal{H}_C$, и пусть $\{g_k\}_{k=1}^{N}$ — конечный набор f_n. Пусть $\mathcal{F}_N$ — замыкание множества

$$\{P(\varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_N))\,\Omega_0 \mid P\text{ — полином}\}$$

в пространстве $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ и $F_0^{(N)}=\mathcal{F}_N\cap F_0$. Из теоремы X.43 (и ее доказательства) следует, что $\varphi(g_k)$ и $\pi(g_l)$ самосопряжены в существенном на $F_0^{(N)}$ и

$$e^{it\varphi(g_k)}\,e^{is\pi(g_l)}=e^{-ist\delta_{kl}}\,e^{is\pi(g_l)}\,e^{it\varphi(g_k)}.$$

Иначе говоря, у нас есть представление соотношений Вейля, в котором вектор Ω_0 удовлетворяет равенству $(\varphi(g_k)^2+\pi(g_k)^2-1)\,\Omega_0=0$ и цикличен относительно операторов $\{\varphi(g_k)\}_{k=1}^{N}$. Следовательно, с помощью построений из задачи 30 (или теоремы VIII.14) можно заключить, что существует унитарное отображение $\tilde S^{(N)}\colon \mathcal{F}_N\to L^2(\mathbb{R}^N)$ со следующими свойствами:

$$\tilde S^{(N)}\varphi(g_k)(\tilde S^{(N)})^{-1}=x_k,$$

$$\tilde S^{(N)}\pi(g_k)(\tilde S^{(N)})^{-1}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$\tilde S^{(N)}\Omega_0=\pi^{-N/4}\exp\left(-\sum_{k=1}^{N}\frac{x_k^2}{2}\right).$$

Удобно вместо $L^2(\mathbb{R}^N)$ использовать гильбертово пространство $L^2\left(\mathbb{R}^N,\ \pi^{-N/2}\exp\left(-\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right)d^Nx\right)$. Положим поэтому $d\mu_k = \pi^{-1/2}\exp(-x_k^2)\,dx_k$ и введем $(Tf)(x) = \pi^{N/4}\exp\left(\sum_{k=1}^{N} x_k^2/2\right)f(x)$. Тогда T будет унитарным отображением $L^2(\mathbb{R}^N)$ на $L^2\left(\mathbb{R}^N,\ \prod_{k=1}^{N} d\mu_k\right)$, и если положить $S^{(N)} = T\tilde{S}^{(N)}$, то

$$S^{(N)}\colon \mathcal{F}_N \longrightarrow L^2\left(\mathbb{R}^N,\ \prod_{k=1}^{N} d\mu_k\right),$$

$$S^{(N)}\varphi(g_k)(S^{(N)})^{-1} = x_k,$$

$$S^{(N)}\pi(g_k)(S^{(N)})^{-1} = -\frac{x_k}{i} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

$S^{(N)}\Omega_0 = 1$ (функция, тождественно равная единице). Отметим, что масса каждой меры μ_k равна единице и потому

$$(\Omega_0,\ P_1(\varphi(g_1))\ldots P_N(\varphi(g_N))\,\Omega_0) = \int_{\mathbb{R}^N} P_1(x_1)\ldots P_N(x_N)\prod_{k=1}^{N} d\mu_k =$$

$$= \prod_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{R}} P_k(x_k)\,d\mu_k = \prod_{k=1}^{N}(\Omega_0,\ P_k(\varphi(g_k))\,\Omega_0), \qquad (X.92)$$

где $P_1, \ldots, P_N$ — полиномы. Эту формулу можно доказать и с помощью прямых вычислений в $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$.

Теперь легко понять, как построить $\langle Q, d\mu\rangle$. Определим Q равенством $Q = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{\infty}\mathbb{R}$. Возьмем σ-алгебру, порождаемую счетными произведениями измеримых множеств из $\mathbb{R}$, и положим $\mu = \bigotimes_{k=1}^{\infty}\mu_k$. Обозначим точки Q через $q = \langle q_1, q_2, \ldots\rangle$. Тогда $\langle Q, \mu\rangle$ — пространство с мерой и множество функций вида $P(q_1, \ldots, q_n)$, где P — полином, а n произвольно, плотно в $L^2(Q, d\mu)$. Обсуждение деталей, относящихся к теории меры, можно найти в работах, указанных в Замечаниях. Пусть P — полином от N переменных:

$$P(x_{k_1}, \ldots, x_{k_N}) = \sum_{l_1, \ldots, l_N} c_{l_1, \ldots, l_N}\, x_{k_1}^{l_1}\ldots x_{k_N}^{l_N};$$

определим отображение

$$S\colon P(\varphi(f_{k_1}), \ldots, \varphi(f_{k_N}))\,\Omega_0 \longmapsto P(q_{k_1}, \ldots, q_{k_N}).$$

Тогда, в силу (X.92), поскольку каждая мера μ_k имеет массу единица,

$$\|P(\varphi(f_{k_1}), \ldots, \varphi(f_{k_N}))\,\Omega_0\|^2 = \sum_{\mathrm{l,\,m}} c_\mathrm{l}\,\bar{c}_\mathrm{m}\,(\Omega_0, \varphi(f_{k_1})^{l_1+m_1}\ldots$$

$$\ldots\varphi(f_{k_N})^{l_N+m_N}\,\Omega_0) =$$

$$= \sum_{\mathrm{l,\,m}} c_\mathrm{l}\,\bar{c}_\mathrm{m} \int_{\mathbb{R}_N} q_{k_1}^{l_1+m_1}\ldots q_{k_N}^{l_N+m_N} \prod_{i=1}^{N} d\mu_{k_i} =$$

$$= \int_Q |P(q_{k_1}, \ldots, q_{k_N})|^2\,d\mu.$$

Вектор Ω_0 цикличен относительно полиномов по полям (теорема X.42), поэтому S продолжается до унитарного отображения из $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ на $L^2(Q, d\mu)$. Ясно, что $S\varphi(f_k)S^{-1} = q_k$ и $S\Omega_0 = 1$.

Теорема X.45. Пусть φ_m — свободное скалярное поле массы m (в двумерном пространстве-времени), взятое в нулевой момент времени. Пусть $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Определим $H_I(g)$ формулой

$$H_I(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,{:}\varphi_m(x)^4{:}\,dx.$$

Пусть S — построенное выше унитарное отображение $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}))$ на $L^2(Q, d\mu)$. Тогда $V \equiv SH_I(g)S^{-1}$ есть оператор умножения на функцию $V(q)$, обладающую следующими свойствами:

(a) $V \in L^p(Q, d\mu)$ для всех $p < \infty$;

(b) $e^{-tV} \in L^1(Q, d\mu)$ для всех $t \in [0, \infty)$.

Доказательство. Докажем (a). По поводу доказательства (b) мы отсылаем читателя к работам, указанным в Замечаниях. Пусть $\chi_n(k)$ — характеристическая функция интервала $(-n, n)$. Положим

$$\varphi_m(x;\ n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int [e^{-ik\cdot x}\,a(k) + e^{ik\cdot x}\,a^\dagger(k)]\,\frac{\chi_n(k)}{\sqrt{\mu(k)}}\,dk.$$

В таком случае $\varphi_m(x;\ n)$ — корректно определенная операторнозначная *функция* x. Определим ${:}\varphi_m(x;\ n)^4{:}$, переставляя налево все $a^\dagger$, входящие в формальное выражение для $\varphi_m(x;\ n)^4$. Полученная таким образом величина ${:}\varphi_m(x;\ n)^4{:}$ тоже представляет собой корректно определенный оператор для каждого значения x, который переводит F_0 в себя. Определим теперь

$$H_I(g;\ n) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,{:}\varphi_m(x;\ n)^4{:}\,dx$$

и положим $V_n = SH_I(g;\ n)S^{-1}$. Для каждого значения x

$${:}\varphi_m(x;\ n)^4{:} = \varphi_m(x;\ n)^4 + d_2(n)\,\varphi_m(x;\ n)^2 + d_0(n),$$

где коэффициенты d_2 и d_0 не зависят от x, но зависят от n (задача 48). При каждом значении x величина $S\varphi_m(x;\ n)S^{-1}$ — это оператор на $L^2(Q,\ d\mu)$, действующий как умножение на $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x;\ n)\, q_k$, где $c_k(x;\ n) = (2\pi)^{-1/2}(f_k,\ \chi_n\mu^{-1/2}\exp(ikx))$. Более того, $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x;\ n)|^2 = (2\pi)^{-1}\|\chi_n\mu^{-1/2}\|_2^2$, так что $S\varphi_m(x;\ n)^4 S^{-1}$ и $S\varphi_m(x;\ n)^2 S^{-1}$ лежат в $L^2(Q,\ d\mu)$ и их $L^2(Q,\ d\mu)$-нормы равномерно ограничены по x. Следовательно, в силу того что $g \in L^1(\mathbb{R})$, оператор $SH_I(g;\ n)S^{-1}$ действует в $L^2(Q,\ d\mu)$ как умножение на $L^2(Q,\ d\mu)$-функцию, которую мы обозначим через $V_n(q)$.

Гамильтониан $H_I(g;\ n)$ для каждого n отличается от $H_I(g)$ только тем, что ядро каждого члена, входящего в $H_I(g;\ n)$, равно $g\left(\sum_{j=1}^{4} k_j\right)\prod_{i=1}^{4}\mu(k_i)^{-1/2}\chi_n(k_i)$. При $n \to \infty$ эти ядра сходятся в $L^2(\mathbb{R}^4)$ к $g\left(\sum_{j=1}^{4} k_j\right)\prod_{i=1}^{4}\mu(k_i)^{-1/2}$. Следовательно, по теореме X.44, $H_I(g;\ n)\psi \to H_I(g)\psi$ при $\psi \in F_0$. В частности, $H_I(g;\ n)\Omega_0 \to H_I(g)\Omega_0$. Но $S\Omega_0 = 1$ и, значит, $\|H_I(g;\ n)\Omega_0\| = \|SH_I(g;n)S^{-1}\|_{L^2(Q,\ d\mu)} = \|V_n\|_{L^2(Q,\ d\mu)}$. В итоге функции V_n образуют последовательность Коши в $L^2(Q,\ d\mu)$ и потому сходятся к некоторой функции $V \in L^2(Q,\ d\mu)$. Читатель теперь сможет легко завершить доказательство, показав, что каждый $P(q_1, \ldots, q_n)$ входит в область определения V и что $SH_I(g)S^{-1} = V$ на этой области. Поскольку Ω_0 лежит в области определения $H_I(g)^n$ для любого n, в область определения V^n при любом n входит 1. Таким образом, $V \in L^{2n}(Q,\ d\mu)$ для всех n и, поскольку $\mu(Q) < \infty$, $V \in L^p(Q,\ d\mu)$ для всех $p < \infty$. ∎

Дополнение к § X.7. Соотношения Вейля для свободного поля

В этом дополнении мы изучаем естественное обобщение соотношений Вейля (VIII.8) на случай бесконечного числа степеней свободы. Пусть $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$ — пространство Шварца вещественнозначных функций на $\mathbb{R}^l$. Предположим, что $f \mapsto U(f)$ и $f \mapsto V(f)$ — отображения из $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$ во множество ограниченных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяющие условиям

(i) $V(f)$ и $U(f)$ унитарны для каждой $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$;

(ii) для $V(f)$ и $U(f)$ при всех $f,\ g \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$ справедливы соотношения

$$V(f)V(g) = V(f+g), \qquad U(f)U(g) = U(f+g), \qquad (X.93)$$