где коэффициенты d_2 и d_0 не зависят от x, но зависят от n (задача 48). При каждом значении x величина $S\varphi_m(x;\ n)S^{-1}$ — это оператор на $L^2(Q,\ d\mu)$, действующий как умножение на $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x;\ n)\,q_k$, где $c_k(x;\ n)=(2\pi)^{-1/2}(f_k,\ \chi_n\mu^{-1/2}\exp(ikx))$. Более того, $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(x;\ n)|^2=(2\pi)^{-1}\|\chi_n\mu^{-1/2}\|_2^2$, так что $S\varphi_m(x;\ n)^4 S^{-1}$ и $S\varphi_m(x;\ n)^2 S^{-1}$ лежат в $L^2(Q,\ d\mu)$ и их $L^2(Q,\ d\mu)$-нормы равномерно ограничены по x. Следовательно, в силу того что $g\in L^1(\mathbb{R})$, оператор $SH_I(g;\ n)S^{-1}$ действует в $L^2(Q,\ d\mu)$ как умножение на $L^2(Q,\ d\mu)$-функцию, которую мы обозначим через $V_n(q)$.

Гамильтониан $H_I(g;\ n)$ для каждого n отличается от $H_I(g)$ только тем, что ядро каждого члена, входящего в $H_I(g;\ n)$, равно $g\left(\sum_{j=1}^{4}k_j\right)\prod_{i=1}^{4}\mu(k_i)^{-1/2}\chi_n(k_i)$. При $n\to\infty$ эти ядра сходятся в $L^2(\mathbb{R}^4)$ к $g\left(\sum_{j=1}^{4}k_j\right)\prod_{i=1}^{4}\mu(k_i)^{-1/2}$. Следовательно, по теореме X.44, $H_I(g;\ n)\psi\to H_I(g)\psi$ при $\psi\in F_0$. В частности, $H_I(g;\ n)\Omega_0\to\to H_I(g)\Omega_0$. Но $S\Omega_0=1$ и, значит, $\|H_I(g;\ n)\Omega_0\|=\|SH_I(g;n)S^{-1}\|_{L^2(Q,\ d\mu)}=\|V_n\|_{L^2(Q,\ d\mu)}$. В итоге функции V_n образуют последовательность Коши в $L^2(Q,\ d\mu)$ и потому сходятся к некоторой функции $V\in L^2(Q,\ d\mu)$. Читатель теперь сможет легко завершить доказательство, показав, что каждый $P(q_1,\ \ldots,q_n)$ входит в область определения V и что $SH_I(g)S^{-1}=V$ на этой области. Поскольку Ω_0 лежит в области определения $H_I(g)^n$ для любого n, в область определения V^n при любом n входит 1. Таким образом, $V\in L^{2n}(Q,\ d\mu)$ для всех n и, поскольку $\mu(Q)<\infty$, $V\in L^p(Q,\ d\mu)$ для всех $p<\infty$. ∎

Дополнение к § X.7. Соотношения Вейля для свободного поля

В этом дополнении мы изучаем естественное обобщение соотношений Вейля (VIII.8) на случай бесконечного числа степеней свободы. Пусть $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$ — пространство Шварца вещественнозначных функций на $\mathbb{R}^l$. Предположим, что $f\mapsto U(f)$ и $f\mapsto V(f)$ — отображения из $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$ во множество ограниченных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяющие условиям

(i) $V(f)$ и $U(f)$ унитарны для каждой $f\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$;

(ii) для $V(f)$ и $U(f)$ при всех $f,\ g\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$ справедливы соотношения

$$V(f)V(g)=V(f+g),\qquad U(f)U(g)=U(f+g),\qquad \text{(X.93)}$$

$$V(f)\,U(g)=U(g)\,V(f)\exp\left(-i\int_{\mathbb{R}^l} f(x)\,g(x)\,dx\right); \qquad (X.94)$$

(iii) если $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^l)} f$, то $U(f_n)\to U(f)$ и $V(f_n)\to V(f)$ сильно на $\mathscr{H}$.

Пара отображений $\{U(\cdot),\ V(\cdot)\}$ называется **представлением соотношений Вейля** над $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$. Два таких представления $\{U_1(\cdot),\ V_1(\cdot)\}$ на $\mathscr{H}_1$ и $\{U_2(\cdot),\ V_2(\cdot)\}$ на $\mathscr{H}_2$ называются **эквивалентными**, если существует унитарный оператор $T\colon \mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_2$, такой, что $U_2(f)=TU_1(f)T^{-1}$ и $V_2(f)=TV_1(f)T^{-1}$ для всех $f\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$. Соотношение (X.71) показывает, что для каждого m пара $\{\exp(i\pi_m(\cdot)),\ \exp(i\varphi_m(\cdot))\}$, где π_m, φ_m — взятые в нулевой момент времени скалярное поле массы m и его сопряженный импульс, реализует представление соотношений Вейля на $\mathscr{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$. Как мы увидим дальше, эти представления для различных m не эквивалентны.

Пусть $\{U(\cdot),\ V(\cdot)\}$ — представление соотношений Вейля над $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$, и пусть $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R}^l)$, построенный из произведений функций Эрмита. Если положить $U_n(t)=U(th_n)$ и $V_n(t)=V(th_n)$, то из (X.93), (X.94) и (iii) будет следовать, что $U_n(t)$, $V_n(t)$ при каждом n — сильно непрерывные унитарные группы на $\mathscr{H}$, обладающие свойством

$$\begin{aligned} &V_n(t)\,U_m(s)=U_m(s)\,V_n(t), \qquad m\neq n,\\ &V_n(t)\,U_n(s)=e^{-ist}\,U_n(s)\,V_n(t)\end{aligned} \qquad (X.95)$$

для всех $s,\ t\in\mathbb{R}$. Таким образом, $\{U_n(t),\ V_n(s)\}$ при всех n удовлетворяет соотношениям Вейля (VIII.8) и для различных n соответствующие унитарные операторы коммутируют. Теорема фон Неймана (теорема VIII.14; см. задачу 30 и гл. XIV) утверждает, что с точностью до кратности существует единственное представление (представление Шредингера) соотношений (X.95), если n принимает конечное множество целочисленных значений. Долгое время полагали, что теорема фон Неймана остается справедливой и в случае, когда n принимает бесконечное число значений, однако в работе Фридрихса в конце сороковых годов были указаны примеры неэквивалентных представлений, значение которых было подчеркнуто в более поздних работах Сигала и Гординга — Вайтмана. Как мы уже упоминали, приводимая ниже теорема X.46 показывает, что свободные скалярные поля различной массы приводят к неэквивалентным представлениям.

В силу (X.93) и (iii), унитарные группы $V(tf)$, $U(tf)$ непрерывны на $\mathscr{H}$; обозначим их генераторы через $\varphi(f)$ и $\pi(f)$ соответственно. Можно показать, что в $\mathscr{H}$ существует область D, инвариантная относительно действия всех операторов $\varphi(f)$, $\pi(f)$, $f\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$, на которой $\varphi(f)$ и $\pi(f)$ самосопряжены в существенном. Для $\psi \in D$ соотношение (X.94) дает

$$[\varphi(f), \pi(g)]\psi = i\int f(x)g(x)\,dx\,\psi \tag{X.96}$$

при всех f, $g \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$. Пара операторнозначных обобщенных функций над $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$, удовлетворяющих (X.96), называется **представлением канонических коммутационных соотношений.** Мы уже видели, что в случае свободного скалярного поля массы m, взятого в нулевой момент времени, в качестве D можно взять D_0 и что (X.96) можно проверить прямым вычислением. Так же, как и в случае конечного числа p_l и q_l, обсуждавшемся в § VIII.5, равенство (X.96) не обязательно влечет за собой (X.94), хотя формально они эквивалентны.

Докажем теперь, что представления канонических коммутационных соотношений, порождаемые свободными скалярными полями различной масссы $m > 0$, неэквивалентны. Будем называть семейство ограниченных операторов на гильбертовом пространстве **неприводимым,** если любой оператор, коммутирующий со всеми членами семейства, кратен единичному оператору.

Лемма 1. Пусть $\Phi_S(\cdot)$ — сигалово квантование над сепарабельным гильбертовым пространством $\mathscr{H}$. Тогда семейство операторов $\{\exp(i\Phi_S(f)) \mid f \in \mathscr{H}\}$ неприводимо.

Доказательство. Пусть $\{\exp(i\Phi_S(f)) \mid f \in \mathscr{H}\}'$ — множество операторов, коммутирующих со всеми $\exp(i\Phi_S(f))$, $f \in \mathscr{H}$. Поскольку $\{\exp(i\Phi_S(f)) \mid f \in \mathscr{H}\}'$ — равномерно замкнутая алгебра операторов, замкнутая, кроме того, и относительно операции сопряжения, можно провести рассмотрение, подобное проведенному при доказательстве леммы после теоремы VI.19; оно показывает, что каждый оператор в $\{\exp(i\Phi_S(f)) \mid f \in \mathscr{H}\}'$ может быть записан как линейная комбинация четырех унитарных операторов из $\{\exp(i\Phi_S(f)) \mid f \in \mathscr{H}\}'$. Поэтому достаточно доказать, что каждый унитарный оператор $T \in \{\exp(i\Phi_S(f)) \mid f \in \mathscr{H}\}'$ кратен единичному оператору.

Для каждого $f \in \mathscr{H}$ и всех t такой T коммутирует с $\exp(it\Phi_S(f))$, и потому, в силу теоремы VIII.13, он коммутирует со всеми спектральными проекторами оператора $\Phi_S(f)$. Таким образом, T: $D(\Phi_S(f)) \to D(\Phi_S(f))$ и $T\Phi_S(f)\psi = \Phi_S(f)T\psi$ для всех $\psi \in D(\Phi_S(f))$. Пусть теперь C — сопряжение на $\mathscr{H}$. Положим $N(f) = (\Phi_S(f)^2 + \Phi_S(if)^2 - 1)/2$ для $f \in \mathscr{H}_C$. Тогда $N(f) \geqslant 0$, ибо $N(f) = d\Gamma((f, \cdot)f)$ и T: $D(N(f)) \to D(N(f))$, $TN(f)\psi = N(f)T\psi$ для $\psi \in D(N(f))$. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$, состоящий из $f_i \in \mathscr{H}_C$ при каждом i. Читатель легко проверит, что для каждого $\psi \in D(N)$

$$N\psi = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} N(f_i)\psi.$$

Следовательно, ψ тогда и только тогда лежит в области определения $Q(N)$ формы, отвечающей N, когда $\psi \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Q(N(f_i))$ и $\sum_{i=1}^{\infty} (\psi, N(f_i)\psi) < \infty$, а если эта сумма конечна, то

$$(\psi, N\psi) = \sum_{i=1}^{\infty} (\psi, N(f_i)\psi).$$

Поскольку $\Omega_0 \in D(N(f_i))$, то $T\Omega_0 \in D(N(f_i))$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} (T\Omega_0, N(f_i)T\Omega_0) = \sum_{i=1}^{\infty} (T^*T\Omega_0, N(f_i)\Omega_0) = 0,$$

так как $N(f_i)\Omega_0 = 0$ для всех i. Отсюда $T\Omega_0 \in Q(N)$ и $(T\Omega_0, NT\Omega_0) = 0$. Поскольку N строго положителен на $\{\Omega_0\}^{\perp}$, существует такая константа c, что $T\Omega_0 = c\Omega_0$. Пусть $\mathcal{P}$ — полином от $\Phi_S(g_1), \ldots, \Phi_S(g_n)$ с некоторыми $g_i \in \mathcal{H}$. Тогда $T(\mathcal{P}\Omega_0) = \mathcal{P}(T\Omega_0) = c\mathcal{P}\Omega_0$. Множество векторов вида $\mathcal{P}\Omega_0$ плотно в $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ (теорема X.41). Следовательно, $T = cI$. ∎

Лемма 2. Пусть $\varphi_m(\cdot)$, $\pi_m(\cdot)$ — взятые в нулевой момент поле и его сопряженный импульс, отвечающие свободному скалярному полю массы m. Тогда семейство

$$\{e^{i\varphi_m(f)}, e^{i\pi_m(f)} \mid f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)\}$$

неприводимо.

Доказательство. Читатель легко выведет лемму 2 из леммы 1, используя плотность $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ в $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ и свойство непрерывности полей (теорема X.41 (d)). ∎

Теорема X.46. Пусть $\varphi_m(\cdot)$, $\pi_m(\cdot)$ — взятые в нулевой момент поле и его сопряженный импульс, отвечающие свободному скалярному полю массы m. Тогда представления $\{\exp(i\pi_{m_1}(\cdot)), \exp(i\varphi_{m_1}(\cdot))\}$ и $\{\exp(i\pi_{m_2}(\cdot)), \exp(i\varphi_{m_2}(\cdot))\}$ соотношений Вейля при $m_1 \neq m_2$ не эквивалентны.

Доказательство. Предположим, что существует унитарное отображение T на $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$, удовлетворяющее условиям

$$T\exp(i\pi_{m_1}(f))T^{-1} = \exp(i\pi_{m_2}(f)), \quad T\exp(i\varphi_{m_1}(f))T^{-1} = \exp(i\varphi_{m_2}(f))$$

при всех $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Пусть $G_{m_1}(\cdot, \cdot)$ и $G_{m_2}(\cdot, \cdot)$ обозначают сужения представлений $\Gamma(U_{m_1}(\cdot, \cdot))$ и $\Gamma(U_{m_2}(\cdot, \cdot))$ на евклидову группу, являющуюся подгруппой в $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$, оставляющей неизменной фиксированную плоскость, отвечающую нулевому моменту времени (полупрямое произведение группы вращений и группы сдвигов на $\mathbb{R}^3$). Для любого элемента $\langle R, a\rangle$ евклидовой группы пуанкаре-инвариантность полей дает

$$G_{m_1}(R, a)\,\varphi_{m_1}(f)\,G_{m_1}(R, a)^{-1} = \varphi_{m_1}(\langle R, a\rangle f),$$
$$G_{m_2}(R, a)\,\varphi_{m_2}(f)\,G_{m_2}(R, a)^{-1} = \varphi_{m_2}(\langle R, a\rangle f)$$

и аналогичные соотношения для π_{m_1} и π_{m_2}. В такой ситуации функциональное исчисление позволяет получить равенства

$$G_{m_1}(R, a)\exp(i\varphi_{m_1}(f))\,G_{m_1}(R, a)^{-1} = \exp(i\varphi_{m_1}(\langle R, a\rangle f)),$$
$$G_{m_2}(R, a)\exp(i\varphi_{m_2}(f))\,G_{m_2}(R, a)^{-1} = \exp(i\varphi_{m_2}(\langle R, a\rangle f))$$

и аналогичные равенства для π_{m_1} и π_{m_2}. Читатель может быстро проверить, что из этих соотношений и свойств T вытекает перестановочность $TG_{m_1}(R, a)\,T^{-1}G_{m_2}(\langle R, a\rangle^{-1})$ и с $\exp(i\pi_{m_2}(f))$, и с $\exp(i\varphi_{m_2}(f))$ для каждого $\langle R, a\rangle$ и каждой функции $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. В таком случае лемма 2 приводит к равенству

$$TG_{m_1}(R, a)\,T^{-1}G_{m_2}(\langle R, a\rangle^{-1}) = C(R, a),$$

или

$$TG_{m_1}(R, a)\,T^{-1} = C(R, a)\,G_{m_2}(R, a),$$

где $C(R, a)$ — постоянная, которая a priori может зависеть от R и a. Из приведенных выше соотношений следует, что $C(\cdot, \cdot)$ — одномерное представление евклидовой группы. Нетрудно показать (задача 41), что единственным таким представлением будет тождественное представление. Таким образом,

$$TG_{m_1}(R, a)\,T^{-1} = G_{m_2}(R, a)$$

для всех $\langle R, a\rangle$ из евклидовой группы. А отсюда следует, что $T\Omega_0 = \alpha\Omega_0$, поскольку Ω_0 — единственный вектор, инвариантный относительно G_{m_1} и G_{m_2} одновременно. В итоге

$$(\Omega_0, \varphi_{m_1}(f)\,\varphi_{m_1}(g)\,\Omega_0) = (\Omega_0, T\varphi_{m_1}(f)\,T^{-1}T\varphi_{m_1}(g)\,T^{-1}\Omega_0) =$$
$$= (\Omega_0, \varphi_{m_2}(f)\,\varphi_{m_2}(g)\,\Omega_0).$$

Это означает, что $(\Omega_0, \varphi_{m_1}(x)\,\varphi_{m_1}(y)\,\Omega_0)$ и $(\Omega_0, \varphi_{m_2}(x)\,\varphi_{m_2}(y)\,\Omega_0)$ равны как обобщенные функции умеренного роста на $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) \times \times \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Но

$$(\Omega_0, \varphi_{m_1}(x)\,\varphi_{m_1}(y)\,\Omega_0) = \Delta_+(x-y;\ m_1^2),$$

а

$$(\Omega_0, \varphi_{m_2}(x)\,\varphi_{m_2}(y)\,\Omega_0) = \Delta_+(x-y;\ m_2^2),$$

и эти обобщенные функции *не равны*, если $m_1 \neq m_2$. Следовательно, отображения T с указанными выше свойствами не существует, и потому представления соотношений Вейля не эквивалентны. ∎