X.8. Полугруппы и их генераторы

Семейство ограниченных операторов $\{T(t) \mid 0 \leqslant t < \infty\}$ на банаховом пространстве X называется **сильно непрерывной полугруппой**, если

(a) $T(0) = I$.

(b) $T(s)T(t) = T(s+t)$ при всех s, $t \in \mathbb{R}^+$.

(c) Для всякого $\varphi \in X$ отображение $t \mapsto T(t)\varphi$ непрерывно.

Такие полугруппы естественно возникают в теории дифференциальных уравнений в частных производных и в квантовой теории, и мы посвятим этот раздел изучению их основных свойств. Мы увидим, что сильно непрерывные полугруппы оказываются «экспонентами» $T(t) = e^{-tA}$ операторов некоторого класса. Они, таким образом, обобщают связь между унитарными группами и самосопряженными операторами. В частности, теорема Стоуна, основной критерий, теорема о существенной области (теорема VIII.11) и теорема Като — Реллиха — все имеют соответствующие обобщения на сильно непрерывные полугруппы и их генераторы. Единственное важное свойство самосопряженных операторов, которое не обобщается, — это спектральная теорема. Существует другой класс — так называемые «спектральные операторы», — для которых аналог спектральной теоремы имеет место. Ссылки на литературу даны в Замечаниях. Теория полугрупп применяется к изучению параболических и гиперболических уравнений в частных производных. В этом разделе мы иллюстрируем все применения на уравнении теплопроводности. Более общие дифференциальные уравнения обсуждаются в Замечаниях.

Начнем с изучения одного специального класса полугрупп.

Определение. Семейство $\{T(t) \mid 0 \leqslant t < \infty\}$ ограниченных операторов на банаховом пространстве X называется **сжимающей полугруппой**, если это сильно непрерывная полугруппа и, сверх того, $\|T(t)\| \leqslant 1$ при всех $t \in [0, \infty)$.

Как увидит читатель, теоремы для общих сильно непрерывных полугрупп будут простым обобщением соответствующих теорем для сжимающих полугрупп. Поэтому изучим сначала этот специальный случай. Затем мы кратко обсудим общую теорию и заключим этот раздел рассмотрением другого специального класса — голоморфных полугрупп.

Пусть $T(t)$ — сжимающая полугруппа на банаховом пространстве X. Как и в случае унитарных групп на гильбертовых пространствах, генератор полугруппы $T(t)$ получается дифференцированием. Положим $A_t = t^{-1}(I - T(t))$ и определим

$$D(A) = \{\varphi \mid \text{существует } \lim_{t \downarrow 0} A_t \varphi\}.$$

Для $\varphi \in D(A)$ положим $A\varphi = \lim_{t\downarrow 0} A_t\varphi$. Первая наша цель — показать, что область $D(A)$ плотна. Мы прибегнем к приему, напоминающему технику, применявшуюся при доказательстве теоремы Стоуна. Для $\varphi \in X$ положим

$$\varphi_s = \int_0^s T(t)\,\varphi\,dt.$$

Поскольку $\{T(t)\}$ сильно непрерывна, нам требуется только интеграл Римана.

Для любого $r > 0$ имеем $T(r)\,\varphi_s = \int_0^s T(t+r)\,\varphi\,dt$; поэтому

$$\begin{aligned} A_r\varphi_s &= -\frac{1}{r}\int_0^s (T(t+r)\,\varphi - T(t)\,\varphi)\,dt = \\ &= -\frac{1}{r}\int_s^{s+r} T(t)\,\varphi\,dt + \frac{1}{r}\int_0^r T(t)\,\varphi\,dt \longrightarrow \\ &\xrightarrow[r\downarrow 0]{} -T(s)\,\varphi + \varphi. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi_s \in D(A)$ при каждом $\varphi \in X$ и $s > 0$. Так как $s^{-1}\varphi_s \longrightarrow \varphi$ при $s \longrightarrow 0$, то A плотно определен. Далее, если $\varphi \in D(A)$, то $A_r T(t)\,\varphi = T(t)\,A_r\varphi$, следовательно, $T(t)$: $D(A) \longrightarrow D(A)$ и

$$\frac{d}{dt}T(t)\,\varphi = -AT(t)\,\varphi = -T(t)\,A\varphi. \tag{X.97}$$

Кроме того, A замкнут. Действительно, если $\varphi_n \in D(A)$, $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ и $A\varphi_n \longrightarrow \psi$, то

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} A_r\varphi &= \lim_{r\to 0}\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{r}(T(r)\,\varphi_n - \varphi_n)\right\} = \\ &= \lim_{r\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r T(t)\,A\varphi_n\,dt = \quad (\text{в силу (X.97)}) \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_0^r T(t)\,\psi\,dt = \psi, \end{aligned}$$

так что $\varphi \in D(A)$ и $A\varphi = \psi$. Итак, мы доказали следующее

Предложение. Пусть $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве X. Положим $A\varphi = \lim_{r\to 0} A_r\varphi$, причем $D(A) = \{\varphi \mid$ существует $\lim_{r\downarrow 0} A_r\varphi\}$. Тогда A замкнут и плотно определен. Оператор A называется **инфинитезимальным генератором** полугруппы $T(t)$. Будем также говорить, что A порождает $T(t)$, и писать $T(t) \equiv e^{-tA}$.

Естественно задаться вопросом, какими дополнительными свойствами обладает генератор сжимающей полугруппы. Формальное преобразование Лапласа

$$\frac{1}{\lambda+A}=-\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}\,dt$$

позволяет предположить, что все λ с отрицательной вещественной частью принадлежат $\rho(A)$. Это действительно так, и приведенная формула выполняется в строгом смысле. Предположим, в самом деле, что $\operatorname{Re}\lambda>0$. Тогда из-за того, что $\|e^{-tA}\|\leqslant 1$, интеграл

$$R\varphi=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(e^{-tA}\varphi)\,dt$$

определяет ограниченный линейный оператор с нормой, меньшей или равной $(\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$. Более того, при $r>0$

$$A_rR\varphi=-\frac{1}{r}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(e^{-(t+r)A}-e^{-tA})\,\varphi\,dt=$$

$$=\frac{1-e^{\lambda r}}{r}\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}\varphi\,dt+\frac{e^{r\lambda}}{r}\int_0^r e^{-\lambda t}e^{-tA}\varphi\,dt,$$

так что $A_rR\varphi\to\varphi-\lambda R\varphi$, когда $r\to 0$. Значит, $R\varphi\in D(A)$ и $AR\varphi=\varphi-\lambda R\varphi$, откуда следует, что $(\lambda+A)R\varphi=\varphi$. Кроме того, для $\varphi\in D(A)$ имеем $AR\varphi=RA\varphi$, поскольку

$$A\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}\varphi\,dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}Ae^{-tA}\varphi\,dt=$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}A\varphi\,dt.$$

Первое равенство есть результат приближения римановыми суммами, вытекающий из того, что $e^{-\lambda t}e^{-tA}\varphi$ и $Ae^{-\lambda t}e^{-tA}\varphi$ интегрируемы и A замкнут. Таким образом, для $\varphi\in D(A)$ выполняется $R(\lambda+A)\varphi=\varphi=(\lambda+A)R\varphi$, откуда следует, что

$$R=(\lambda+A)^{-1}.$$

Полученные свойства A на самом деле и достаточны для того, чтобы A порождал сжимающую полугруппу. Причем по существу нам нужны сведения только при вещественных положительных λ. Соответствующая теорема (которую мы позже обобщим) есть прямой аналог теоремы Стоуна для самосопряженных операторов.

Теорема Х.47а (Хилле—Иосида). Необходимое и достаточное условие того, что замкнутый линейный оператор A на банаховом пространстве X порождает сжимающую полугруппу, состоит в следующем:

(i) $(-\infty,\ 0)\subset\rho(A)$,

(ii) $\|(\lambda+A)^{-1}\|\leqslant\lambda^{-1}$ при всех $\lambda>0$.

Кроме того, если A удовлетворяет (i) и (ii), то вся открытая левая полуплоскость содержится в $\rho(A)$ и

$$(\lambda+A)^{-1}\varphi=-\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}\varphi\,dt \qquad \text{(X.98)}$$

при всех $\varphi\in X$ и таких λ, что $\operatorname{Re}\lambda>0$. Наконец, если $T_1(t)$ и $T_2(t)$—сжимающие полугруппы, порождаемые соответственно операторами A_1 и A_2, то из $T_2(t)\neq T_1(t)$ при каком-либо t следует, что $A_1\neq A_2$.

Доказательство. Выше мы показали, что условия (i) и (ii) являются необходимыми и что выполняется (X.98); поэтому остается только доказать достаточность. Итак, предположим, что A—замкнутый оператор на X, удовлетворяющий условиям (i) и (ii). При $\lambda>0$ положим $A^{(\lambda)}=\lambda-\lambda^2(\lambda+A)^{-1}$. Мы покажем, что $A^{(\lambda)}\longrightarrow A$ сильно на $D(A)$, когда $\lambda\longrightarrow\infty$, а потом построим e^{-At} как сильный предел полугрупп $e^{-tA^{(\lambda)}}$.

При $\varphi\in D(A)$ имеем $A^{(\lambda)}\varphi=\lambda(\lambda+A)^{-1}A\varphi$. Более того, согласно (ii),

$$\lambda(\lambda+A)^{-1}\varphi-\varphi=-(\lambda+A)^{-1}A\varphi\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}0.$$

По условию (ii) семейство $\{\lambda(\lambda+A)^{-1}\mid\lambda>0\}$ равномерно ограничено по норме, так что с учетом плотности $D(A)$ получается $\lambda(\lambda+A)^{-1}\psi\longrightarrow\psi$ для всех $\psi\in X$. Поэтому $A^{(\lambda)}\varphi\longrightarrow A\varphi$ для всех $\varphi\in D(A)$.

Так как $A^{(\lambda)}$ ограничен, полугруппы $e^{-tA^{(\lambda)}}$ могут быть определены посредством степенных рядов. Поскольку

$$\|e^{-tA^{(\lambda)}}\|=\|e^{-\lambda t}e^{+t\lambda^2(\lambda+A)^{-1}}\|\leqslant$$
$$\leqslant e^{-\lambda t}\sum\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}\|(\lambda+A)^{-1}\|^n\leqslant 1,$$

они являются сжимающими полугруппами. Для всех $\mu,\ \lambda,\ t>0$ и всех $\varphi\in D(A)$ имеем

$$e^{-tA^{(\lambda)}}\varphi-e^{-tA^{(\mu)}}\varphi=\int_0^t\frac{d}{ds}\left(e^{-sA^{(\lambda)}}e^{-(t-s)A^{(\mu)}}\varphi\right)ds,$$

так что

$$\|e^{-tA^{(\lambda)}}\varphi - e^{-tA^{(\mu)}}\varphi\| \leqslant \int_0^t \|e^{-sA^{(\lambda)}}e^{-(t-s)A^{(\mu)}}\| \, \|A^{(\mu)}\varphi - A^{(\lambda)}\varphi\| \, ds \leqslant$$
$$\leqslant t\,\|A^{(\mu)}\varphi - A^{(\lambda)}\varphi\|.$$

Мы воспользовались тем, что $e^{-(t-s)A^{(\mu)}}$ и $e^{-tA^{(\lambda)}}$ коммутируют, так как $\{A^{(\lambda)}\}_{\lambda>0}$ — коммутирующее семейство. Так как выше было доказано, что $A^{(\lambda)}\varphi \longrightarrow A\varphi$, то $\{e^{-tA^{(\lambda)}}\varphi\}$ есть последовательность Коши при $\lambda \longrightarrow \infty$ для всякого $t > 0$ и $\varphi \in D(A)$. Так как $D(A)$ плотно и семейство $\{e^{-tA^{(\lambda)}}\}$ равномерно ограничено, это утверждение справедливо для всех $\varphi \in X$. Определим теперь $T(t)\varphi = \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{-tA^{(\lambda)}}\varphi$. Тогда $T(t)$ есть полугруппа сжимающих операторов, поскольку эти свойства сохраняются в сильном пределе. Приведенное выше неравенство показывает, что сходимость $e^{-tA^{(\lambda)}}\varphi \longrightarrow T(t)\varphi$ равномерна, когда t меняется в конечном интервале, так что $T(t)$ сильно непрерывна, поскольку сильно непрерывна $e^{-tA^{(\lambda)}}$. Значит, $T(t)$ есть сжимающая полугруппа.

Остается показать, что инфинитезимальный генератор $T(t)$, обозначим его $\tilde{A}$, совпадает с A. Для всех t и $\varphi \in D(A)$

$$e^{-tA^{(\lambda)}}\varphi - \varphi = -\int_0^t e^{-sA^{(\lambda)}} A^{(\lambda)}\varphi \, ds,$$

так что, вследствие $A^{(\lambda)}\varphi \longrightarrow A\varphi$, имеем

$$T(t)\varphi - \varphi = -\int_0^t T(s)\, A\varphi \, ds.$$

Следовательно, $\tilde{A}_t\varphi \longrightarrow A\varphi$, когда $t \longrightarrow 0$. Поэтому $D(\tilde{A}) \supset D(A)$ и $\tilde{A} \upharpoonright D(A) = A$. Если $\lambda > 0$, то $(\lambda + A)^{-1}$ существует по предположению, а $(\lambda + \tilde{A})^{-1}$ существует в силу утверждения о необходимости в доказываемой теореме. Следовательно, $(\lambda + \tilde{A})D(\tilde{A}) = X = (\lambda + A)D(A)$, откуда вытекает, что $D(\tilde{A}) = D(A)$.

Наконец, предположим, что $T_1(t)$ и $T_2(t)$ — такие сжимающие полугруппы, что $T_1(t_0) \neq T_2(t_0)$ при некотором $t_0 > 0$. Тогда существуют такие $l \in X^*$ и $\varphi \in X$, что $l(T_1(t_0)\varphi) \neq l(T_2(t_0)\varphi)$. Поскольку (X.98) выполняется как для $T_1(t)$, так и для $T_2(t)$, заключаем, что $l((\lambda + A_1)^{-1}\varphi) \neq l((\lambda + A_2)^{-1}\varphi)$ при некотором λ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$, ибо обычное преобразование Лапласа инъективно на ограниченных функциях. Итак, резольвенты A_1 и A_2 отличаются, так что $A_1 \neq A_2$. ∎

Построить e^{-tA} при доказательстве достаточности в теореме X.47а можно применением формулы $e^{-tA} = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + (t/n)A)^{-n}$

(см. задачу 49). Трудность в прямом применении теоремы X.47a состоит в необходимости строить резольвенту замкнутого оператора A для проверки условий (i) и (ii). Поэтому хотелось бы иметь условия непосредственно на оператор A, т. е. найти аналоги условия симметрии и основного критерия для самосопряженных операторов. Чтобы понять, какие это должны быть условия, рассмотрим случай гильбертова пространства. Если $\varphi \in D(A)$, то из $\|e^{-tA}\varphi\|^2 \leqslant \|\varphi\|^2$ для всех $t > 0$ следует, что $\frac{d}{dt}\|e^{-tA}\varphi\|^2 \Big|_{t=0} \leqslant 0$. С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\|e^{-tA}\varphi\|^2 \Big|_{t=0} = -(A\varphi, \varphi) - (\varphi, A\varphi),$$

откуда мы заключаем, что $\operatorname{Re}(A\varphi, \varphi) \geqslant 0$. Таким образом, условие $\operatorname{Re}(A\varphi, \varphi) \geqslant 0$ нужно обобщить на банахово пространство.

Определение. Пусть X — банахово пространство и $\varphi \in X$. Элемент $l \in X^*$, удовлетворяющий условиям $\|l\| = \|\varphi\|$ и $l(\varphi) = \|\varphi\|^2$, называется **нормированным касательным функционалом** к φ. По теореме Хана — Банаха всякий $\varphi \in X$ обладает по крайней мере одним нормированным касательным функционалом.

Определение. Плотно определенный оператор A на банаховом пространстве X называется **аккретивным**, если при каждом $\varphi \in D(A)$ для какого-либо нормированного касательного функционала от φ выполнено $\operatorname{Re}(l(A\varphi)) \geqslant 0$. Оператор A называется **максимальным аккретивным** (или **m-аккретивным**), если A аккретивен и не имеет собственных аккретивных расширений.

Заметим, что аккретивный оператор замыкаем (задача 52). Замыкание аккретивного оператора опять аккретивно, так что каждый аккретивный оператор имеет наименьшее замкнутое аккретивное расширение. Теперь мы можем сформулировать основной критерий.

Теорема X.48. Замкнутый оператор A на банаховом пространстве X порождает сжимающую полугруппу тогда и только тогда, когда он аккретивен и $\operatorname{Ran}(\lambda_0 + A) = X$ для некоторого $\lambda_0 > 0$.

Доказательство. Пусть e^{-tA} — сжимающая полугруппа, и предположим, что l — некоторый нормированный касательный функционал к $\varphi \in D(A)$. Тогда функция $t \mapsto l(e^{-tA}\varphi)$ дифференцируема и

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Re}(l(e^{-tA}\varphi))\big|_{t=0} = -\operatorname{Re}\, l(A\varphi).$$

С другой стороны,

$$|l(e^{-tA}\varphi)| \leqslant \|l\|\|e^{-tA}\varphi\| \leqslant \|\varphi\|^2 = l(\varphi)$$

для всех $t>0$, так что $\operatorname{Re} t^{-1}(l(e^{-tA}\varphi)-l(\varphi))\leqslant 0$ при всех $t>0$. Итак,

$$-\operatorname{Re}(l(A\varphi))\leqslant 0$$

для всех нормированных касательных функционалов к φ, так что A аккретивен. Равенство $\operatorname{Ran}(I+A)=X$ есть следствие условия (i) из теоремы X.47а. Итак, необходимость доказана.

Для доказательства достаточности предположим, что A — замкнутый аккретивный оператор, удовлетворяющий условию $\operatorname{Ran}(\lambda_0+A)=X$ при некотором $\lambda_0>0$. Пусть l — нормированный касательный функционал к $\varphi\in D(A)$, так что $\operatorname{Re}(l(A\varphi))\geqslant 0$. Тогда

$$\lambda\|\varphi\|^2\leqslant\lambda l(\varphi)+\operatorname{Re} l(A\varphi)=$$
$$=\operatorname{Re} l((\lambda+A)\varphi)\leqslant\|\varphi\|\|(\lambda+A)\varphi\|.$$

Итак, $\operatorname{Ran}(\lambda+A)$ замкнут и $\lambda+A$ имеет ограниченный обратный из $\operatorname{Ran}(\lambda+A)$ в $D(A)$ с нормой, меньшей или равной λ^{-1}. Для завершения доказательства осталось только показать, что область $\operatorname{Ran}(\lambda+A)$ плотна в X. Но $\operatorname{Ran}(\lambda+A)$ плотна при $\lambda=\lambda_0$, так что с помощью обычной аргументации теории возмущений (см. доказательство теоремы X.1) можно показать, что $\operatorname{Ran}(\lambda+A)$ плотна при всех $\lambda>0$. ∎

Следствие. Пусть A — замкнутый оператор на банаховом пространстве X. Тогда если оба оператора, A и его сопряженный A', аккретивны, то A порождает сжимающую полугруппу.

Доказательство. Допустим, что $\operatorname{Ran}(I+A)$ не плотна. Тогда по теореме Хана — Банаха в X^* существует такой l, что $l((I+A)\varphi)=0$ для всех $\varphi\in D(A)$. Следовательно, $l\in D(A')$ и $(I+A')l=0$. Поэтому если μ — некоторый нормированный касательный функционал к l в X^{**}, то $\mu(A'l)=-\|l\|^2$, что противоречит допущению о том, что A' аккретивен при $l\neq 0$. Итак, $\operatorname{Ran}(I+A)$ плотна в X. ∎

Прежде чем рассмотреть некоторые примеры, сделаем ряд замечаний. Во-первых, при доказательстве достаточности в теореме X.48 мы воспользовались лишь тем допущением, что для каждого $\varphi\in D(A)$ существует по крайней мере один нормированный касательный функционал l, такой, что $\operatorname{Re} l(A\varphi)\geqslant 0$. Отсюда следовало, что $(\lambda+A)^{-1}$ ограничено при всяком $\lambda>0$. Опираясь затем на допущение $\operatorname{Ran}(\lambda_0+A)=X$, мы завершили доказательство достаточности. Однако при доказательстве необходимости было показано, что если A порождает сжимающую полугруппу, то $\operatorname{Re} l(A\varphi)\geqslant 0$ для *всех* касательных функционалов. Итак, при наличии допущения $\operatorname{Ran}(I+A)=X$ из условия

$\operatorname{Re} l(A\varphi) \geqslant 0$ для одного касательного функционала (к каждому $\varphi \in D(A)$) следует, что $\operatorname{Re} l(A\varphi) \geqslant 0$ для всех касательных функционалов. Во-вторых, генераторы сжимающих полугрупп, очевидно, m-аккретивны, так как из условия $\operatorname{Ran}(I+A)=X$ вытекает, что A не имеет собственных аккретивных расширений. Обратное утверждение: если A максимально аккретивен, то A порождает сжимающую полугруппу — справедливо для гильбертова пространства, но не для банахова (см. Замечания и задачу 50). Наконец, как и в случае самосопряженных операторов, для генераторов сжимающих полугрупп выполняется теорема о существенной области.

Теорема X.49. Пусть A — генератор сжимающей полугруппы на банаховом пространстве X. Пусть D — плотное множество, $D \subset D(A)$, такое, что e^{-tA}: $D \to D$. Тогда D есть существенная область оператора A (т. е. $\overline{A \restriction D} = A$).

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$. Нужно только показать, что область $\operatorname{Ran}(\lambda + A \restriction D)$ плотна в X. Допустим, что это не так. Тогда найдется такой $l \in X^*$, $l \neq 0$, что $l((\lambda+A)\varphi)=0$ для всех $\varphi \in D$. Но если $\varphi \in D$, то

$$\frac{d}{dt}\, l(e^{-tA}\varphi) = l(-Ae^{-tA}\varphi) = \lambda\, l(e^{-tA}\varphi),$$

так как $e^{-tA}\varphi \in D$. Значит, $l(e^{-tA}\varphi) = l(\varphi)e^{\lambda t}$, а это при достаточно больших t противоречит допущению, что e^{-tA} — сжимающие, за исключением случая $l(\varphi)=0$. Но так как D плотна, $l(\varphi)$ не может обращаться в нуль для всех $\varphi \in D$, и мы заключаем, что $\operatorname{Ran}(\lambda + A \restriction D)$ плотна. ∎

Пример 1. Пусть B — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда $\|(\mu - B)^{-1}\| \leqslant |\operatorname{Im}\mu|^{-1}$, так что оба оператора $A_1 = iB$ и $A_2 = -iB$ удовлетворяют условиям теоремы Хилле — Иосиды. Сжимающие полугруппы e^{-tA_1} и e^{-tA_2} совпадают с унитарными группами e^{itB} при $t<0$ и при $t>0$ соответственно.

Если $B \geqslant 0$, то сам B удовлетворяет условиям теоремы Хилле — Иосиды, так как $\|(\mu+B)^{-1}\| \leqslant \mu^{-1}$ при $\mu > 0$ согласно функциональному исчислению. Значит, B порождает сжимающую полугруппу e^{-Bt}. Разумеется, такие полугруппы могут быть построены и прямо с помощью функционального исчисления.

Пример 2 (уравнение теплопроводности на $L^2(\mathbb{R}^n)$). Оператор $-\Delta$ самосопряжен в существенном на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и положителен, поэтому его замыкание (которое мы также обозначим $-\Delta$) порождает полугруппу $e^{\Delta t}$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Для $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ определим $u(x, t) = e^{\Delta t} f$. Тогда для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \overline{\left(\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\varphi(x, t)\right)} u(x, t)\, dx\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\left(\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\varphi(x, t)\right)} e^{\Delta t} f(x)\, dx \right) dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\left(e^{\Delta t}\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\varphi(x, t)\right)} f(x)\, dx \right) dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial}{\partial t} [\overline{(e^{\Delta t}\varphi)(x, t)} f(x)]\, dx\, dt = 0,$$

так что $u(x, t)$ есть слабое решение уравнения теплопроводности $\partial u(x, t)/\partial t = \Delta u(x, t)$. Если $f \in D(\Delta)$, то $u(x, t) \in D(\Delta)$ как функция x при всяком $t > 0$, так что в этом случае $u(x, t)$ есть классическое решение в том смысле, что $u(\cdot, t)$ есть $L^2(\mathbb{R}^n)$-значная дифференцируемая функция t и $\partial u(x, t)/\partial t = \Delta u(x, t)$. В любом случае $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию $u(x, 0) = f(x)$ в том смысле, что $\|u(x, t) - f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$ при $t \to 0$. Позже мы увидим, что на самом деле $u(x, t)$ при $t > 0$ бесконечно дифференцируема по x и t для всех $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что, поскольку $e^{\Delta t}$ — сжимающая полугруппа, $\|u(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ есть невозрастающая функция t.

Пример 3 (уравнение теплопроводности на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$). Обозначим через $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ множество непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, таких, что $f(x) \to 0$, когда $|x| \to \infty$. Это есть банахово пространство относительно sup-нормы. Определим $-\Delta$ как замыкание оператора $\varphi \mapsto -\Delta\varphi$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Мы покажем, что $-\Delta$ удовлетворяет условиям теоремы X.48. Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда найдется такая точка x_0, что $|\varphi(x_0)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|$. Пусть $l_\varphi = \overline{\varphi(x_0)}\, \delta_{x_0}$. Тогда $l_\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)^*$, $\|l_\varphi\| = |\varphi(x_0)| = \|\varphi\|$ и $l_\varphi(\varphi) = |\varphi(x_0)|^2 = \|\varphi\|^2$, так что l_φ — нормированный касательный функционал к φ. Далее,

$$\operatorname{Re}(l_\varphi(-\Delta\varphi)) = \operatorname{Re} \overline{\varphi(x_0)}\,(-\Delta\varphi(x_0)) =$$
$$= |\nabla\varphi(x_0)|^2 - \frac{1}{2}\Delta|\varphi(x_0)|^2 \geqslant 0,$$

так как $\Delta|\varphi(x_0)|^2 \leqslant 0$ вследствие того, что $|\varphi(x)|^2$ имеет максимум в точке x_0. Это показывает, что $-\Delta \restriction \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ аккретивен и, значит, его замыкание также аккретивно. Более того, если $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то $\widecheck{(1+k^2)^{-1}\hat{g}} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset D(-\Delta)$ и $(I - \Delta)\widecheck{(1+k^2)^{-1}\hat{g}} = g$, так что $\operatorname{Ran}(I-\Delta)$ содержит $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, которое плотно в $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Так как $\operatorname{Ran}(I-\Delta)$ замкнуто, заключаем, что $\operatorname{Ran}(I-\Delta)=C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Итак, $-\Delta$ аккретивен и удовлетворяет условию $\operatorname{Ran}(I-\Delta) = C_\infty(\mathbb{R}^n)$, значит, по теореме X.48, $-\Delta$ порождает сжимающую полугруппу $e^{\Delta t}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Как и в примере 2, можно показать, что $u(x, t)=e^{\Delta t}f$ — слабое решение уравнения теплопроводности для $f\in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Ниже мы увидим, что на самом деле $u(x, t)$ есть классическое решение. Функция $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию $u(x, 0)=f(x)$ в том смысле, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x, t)-f(x)|\to 0 \quad \text{при} \quad t\to 0.$$

Так как $e^{\Delta t}$ — сжимающая полугруппа, то $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x, t)|$ есть невозрастающая функция t. Это отражает интуитивное представление о том, что максимальная температура должна понижаться в процессе теплопередачи.

Поскольку нам известно выражение для ядра $e^{t\Delta}$, мы могли применить при анализе примеров 2 и 3 «прямые» методы. Преимущество абстрактной теории проявляется там, где нельзя получить явные решения; см. хотя бы пример 4 далее.

Существует теорема теории возмущений для генераторов сжимающих полугрупп — аналог теоремы Като — Реллиха. Докажем сначала одну лемму, которую мы позже усилим.

Лемма. Пусть A — генератор сжимающей полугруппы на банаховом пространстве X. Предположим, что B — аккретивный оператор, причем $D(B)\supset D(A)$ и для всех $\varphi\in D(A)$

$$\|B\varphi\|\leqslant a\|A\varphi\|+b\|\varphi\|$$

с некоторым b и некоторым $a<1/2$. Тогда сумма $A+B$ (определенная на $D(A)$) есть замкнутый аккретивный оператор, порождающий сжимающую полугруппу.

Доказательство. Это доказательство основано на той же идее, что и доказательство теоремы X.12. Пусть $\lambda>0$. Тогда $\|A(\lambda+A)^{-1}\|=\|\lambda(\lambda+A)^{-1}-1\|\leqslant 2$. Поэтому для $\varphi\in D(A)$

$$\|B(\lambda+A)^{-1}\varphi\|\leqslant a\|A(\lambda+A)^{-1}\varphi\|+b\|(\lambda+A)^{-1}\varphi\|\leqslant$$
$$\leqslant\left(2a+\frac{b}{\lambda}\right)\|\varphi\|.$$

Значит, $\|B(\lambda+A)^{-1}\|<1$ для достаточно больших λ. Следовательно, поскольку

$$\operatorname{Ran}(\lambda+A)=X$$

и

$$(\lambda+A+B)=(I+B(\lambda+A)^{-1})(\lambda+A),$$

мы приходим к заключению, что $\operatorname{Ran}(\lambda+A+B)=X$. Так как A порождает сжимающую полугруппу, то мы знаем, что $\operatorname{Re}(l(A\varphi))\geqslant 0$ для *всякого* нормированного касательного функционала к φ. Поэтому $A+B$ аккретивен и порождает сжимающую полугруппу. ∎

Теорема X.50. Пусть A и C—аккретивные операторы на банаховом пространстве X. Предположим, что существует плотное множество D, $D\subset D(A)$, $D\subset D(C)$, и такое $a\in[0, 1)$, что

$$\|(A-C)\varphi\|\leqslant a(\|A\varphi\|+\|C\varphi\|)+b\|\varphi\|$$

для некоторого b и всех $\varphi\in D$. Тогда

(a) $\bar{A}$ порождает сжимающую полугруппу в том и только в том случае, когда такую полугруппу порождает $\bar{C}$.

(b) $D(\overline{A\restriction D})=D(\overline{C\restriction D})$.

Доказательство. Чтобы доказать (a), нужно показать только, что $\operatorname{Ran}(\lambda_0+A)$ тогда и только тогда плотно для некоторого $\lambda_0>0$, когда $\operatorname{Ran}(\mu_0+C)$ плотно для некоторого $\mu_0>0$. Доказательство это в точности такое же, как в теореме X.13, с тем единственным отличием, что α' выбирается так, чтобы было $2a\alpha'/(1-a)<1/2$, т. е. чтобы можно было применить лемму. Как и прежде, доказательство утверждения (b) мы предоставим читателю. ∎

Следствие. Пусть A и B удовлетворяют всем условиям леммы, только условие $a<1/2$ заменяется на $a<1$. Тогда утверждение леммы остается в силе.

Как и для самосопряженных операторов, имеет место формула произведения.

Теорема X.51 (формула Троттера для произведения). Пусть A и B—генераторы сжимающих полугрупп на банаховом пространстве X. Допустим, что замыкание $(A+B)\restriction D(A)\cap D(B)$ порождает сжимающую полугруппу на X. Тогда для всех $\varphi\in X$

$$e^{-t\,\overline{(A+B)}}\varphi=\lim_{n\to\infty}(e^{-tA/n}e^{-tB/n})^n\varphi.$$

Если $D=D(A)\cap D(B)$ и $(A+B)\restriction D$ замкнуто, то доказательство теоремы X.51 в точности такое же, как и теоремы VIII.30. Относительно общего случая см. ссылки в Замечаниях.

Пример 4 (уравнение теплопроводности с источниками и стоками, пропорциональными температуре). Пусть $q(x)$—ограниченная ($|q(x)|<M$) вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$. Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t)-\Delta u(x, t)=-q(x)u(x, t) \qquad (X.99)$$

отвечает такому физическому положению, когда источники или добавляют (если $q(x)\leqslant 0$), или поглощают (если $q(x)\geqslant 0$) тепло в точке x пропорционально локальной температуре в точке x в момент времени t. Предыдущее обсуждение подсказывает, что мы должны рассмотреть оператор

$$A=-\Delta+q(x)$$

на $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Так как функция $q(x)$ ограничена константой M как оператор на $L^2(\mathbb{R}^n)$, из теоремы Като—Реллиха немедленно следует, что A самосопряжен на $D(-\Delta)$ и ограничен снизу константой $-M$. Поэтому e^{-tA} может быть определен с помощью функционального исчисления, и если $f\in D(-\Delta)$, то $u(x, t)=e^{-tA}f$ удовлетворяет уравнению (X.99) с начальными условиями $u(x, 0)=f(x)$.

В случае $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ можно применить следствие теоремы X.50 — аналог теоремы Като—Реллиха для пространства Банаха. Допустим вначале, что $q(x)\geqslant 0$. Тогда умножение на $q(x)$ есть ограниченный аккретивный оператор на $D(-\Delta)\subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$, поскольку можно воспользоваться теми же нормированными касательными функционалами l_φ, что и в примере 3, и обнаружить, что $l_\varphi(q\varphi)=q(x_0)\,|\varphi(x_0)|^2\geqslant 0$. Поэтому, согласно следствию теоремы X.50, A — замкнутый аккретивный оператор на $D(-\Delta)$. Как и прежде, $u(x, t)=e^{-At}f$ удовлетворяет (X.99) в слабом смысле и $\|u(x, t)-f(x)\|_\infty\to 0$ при $t\to 0$.

Если q отрицательна в какой-либо точке, то умножение на q *не* аккретивно на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Это естественно, так как только в случае $q(x)\geqslant 0$ (т.е. когда тепло только поглощается, но не выделяется) мы можем ожидать, что e^{-tA} будет сжимающей полугруппой. Но эту трудность легко преодолеть, положив $A_M=-\Delta+$ $+q(x)+M$ на $D(-\Delta)$. Так как $q(x)+M\geqslant 0$, то $q(x)+M$ — ограниченный аккретивный оператор и для построения сжимающей полугруппы e^{-tA_M} можно применить следствие теоремы X.50. Положим теперь $T(t)=e^{tM}e^{-tA_M}$. Тогда $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа и для всякого $f\in D(-\Delta)$ функция $u(x, t)=T(t)f$ слабо удовлетворяет (X.99).

Интуитивно ясно, что решение уравнения теплопроводности должно сохранять положительность, т. е. если $u(x, 0)\geqslant 0$ почти всюду, то $u(x, t)\geqslant 0$ почти всюду по x для всех $t>0$. В задаче 53 от читателя требуется показать, что $e^{\Delta t}$ сохраняет положительность на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Так как $e^{-tq(x)}\geqslant 0$ при всех x, то $(e^{\Delta t/n}e^{-tq(x)/n})^n f\geqslant 0$, если $f\geqslant 0$. По формуле Троттера

$$(e^{\Delta t/n}e^{-tq(x)/n})^n f\xrightarrow[n\to\infty]{L^2}e^{-t(-\Delta+q)}f,$$

так что мы должны получить $e^{-t(-\Delta+q)}f \geqslant 0$ почти всюду. Сходное применение формулы Троттера показывает, что $T(t) = e^{tM}e^{-t(-\Delta+q+M)}$ сохраняет положительность на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ (задача 54).

Построение $e^{-(-\Delta+q)t}$ в примере 4 для случая $q \leqslant 0$ показывает, насколько естественно возникают сильно непрерывные полугруппы, не являющиеся сжимающими. Поэтому мы сейчас продемонстрируем, как легко обобщаются результаты для сжимающих полугрупп. Пусть $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа, и пусть $\alpha > 0$. Так как $t \mapsto T(t)\varphi$ непрерывно и отрезок $[0, \alpha]$ компактен, множество $\{\|T(t)\varphi\| \mid 0 \leqslant t \leqslant \alpha\}$ ограничено. Поэтому из принципа равномерной ограниченности (теорема III.9) следует, что существует такое M, что $\|T(t)\| \leqslant M$ для всех $t \in [0, \alpha]$. Пусть теперь $t \in (0, \infty)$. Тогда $t = n\alpha + \tau$, где $\tau \in [0, \alpha]$. По свойству полугрупп

$$\|T(t)\| = \|T(\alpha)^n T(\tau)\| \leqslant M^{n+1} \leqslant Me^{\omega t},$$

где $\omega = \alpha^{-1}\log M$. Следовательно, все сильно непрерывные полугруппы экспоненциально ограничены. Точная нижняя грань чисел ω, для которых существует такое M, что $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$, обозначается через ω_0 и называется **типом** полугруппы (см. задачу 51). **Генератор** A полугруппы $T(t)$ определяется точно так же, как для сжимающей полугруппы. Как и раньше, A замкнут, и рассуждение, совпадающее с тем, которое предваряет теорему X.47a, показывает, что если $\lambda > \omega_0$, то $-\lambda \in \rho(A)$ и

$$(\lambda + A)^{-1}\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\varphi\, dt$$

для всех $\varphi \in X$. Значит, если $\omega > \omega_0$ и $\lambda > \omega$, то

$$\|(\lambda + A)^{-n}\varphi\| = \left\|\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n(\lambda + A)^{-1}\varphi\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}\left(\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}Me^{\omega t}\, dt\right)\|\varphi\| = \frac{M\|\varphi\|}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Обратно, небольшие изменения в доказательстве теоремы X.47a показывают, что эти условия являются также и достаточными для того, чтобы A порождал сильно непрерывную полугруппу (задача 55). Итак, имеет место следующая

Теорема X.47b (теорема Хилле—Иосиды—Филлипса). Необходимое и достаточное условие того, что замкнутый оператор A на банаховом пространстве X порождает сильно непрерывную полугруппу, состоит в следующем:

(i) Существует такое $\omega > 0$, что каждое $\lambda > \omega$ лежит в $\rho(A)$.

(ii) Существует такое M, что

$$\|(\lambda+A)^{-n}\| \leqslant \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$$

для всех $\lambda > \omega$ и всех положительных целых n.

В этом случае $\|e^{-tA}\| \leqslant Me^{\omega t}$ при всех $t > 0$ и

$$\|(\lambda+A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda-\omega)}$$

при всех λ, так что $\operatorname{Re}(\lambda-\omega) > 0$.

Последний предмет, которым мы займемся в этом разделе,— это теория ограниченных голоморфных полугрупп. Чтобы понять, что мы хотим, рассмотрим сначала случай положительного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Векторнозначная функция $e^{-tA}\varphi$ может быть аналитически продолжена в правую полуплоскость с помощью функционального исчисления. Это подсказывает следующее

Определение. Пусть $\theta \in (0, \pi/2]$. Сильно непрерывная ограниченная полугруппа $T(t)$, $t > 0$, на банаховом пространстве X называется **ограниченной голоморфной полугруппой с углом** θ, если

(i) $T(t)$ есть сужение на положительную вещественную ось аналитического семейства операторов $T(z)$ в открытом секторе $S_\theta = \{z \mid |\arg z| < \theta\}$, удовлетворяющего условию $T(z+z') = T(z)T(z')$ для всех $z, z' \in S_\theta$.

(ii) При каждом $\theta_1 < \theta$ семейство $\{T(z)\}$ равномерно ограничено в секторе S_{θ_1} и $T(z)\varphi \to \varphi$, если $z \to 0$ в S_{θ_1}, для всех $\varphi \in X$.

Если A — инфинитезимальный генератор $T(t)$, то мы пишем $T(z) = e^{-zA}$.

Легко вывести некоторые свойства генератора A ограниченной голоморфной полугруппы с углом θ. При всяком $0 < \eta < \theta$ полугруппа $e^{-(re^{i\eta})A}$ будет ограниченной и сильно непрерывной (как функция r). Очевидно, ее генератор есть $e^{i\eta}A$, так что спектр $e^{i\eta}A$ должен лежать в правой полуплоскости. Так как это справедливо для всех η, удовлетворяющих $0 \leqslant |\eta| < \theta$, мы заключаем, что

$$\sigma(A) \subset \overline{S}_{\pi/2-\theta} \equiv \left\{ z \,\middle|\, |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \theta \right\}. \qquad \text{(X.100)}$$

Далее, для каждого $\theta_1 < \theta$ семейство $\{e^{-(re^{i\eta})A}\}$ равномерно ограничено (скажем, числом M_1) при всех $r > 0$ и всех η, таких, что $|\eta| \leqslant \theta_1$. Следовательно, по теореме X.47b

$$\|(\lambda + e^{i\eta}A)^{-1}\| \leqslant \frac{M_1}{\operatorname{Re}\lambda}$$

при всех λ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Значит, если задано $\theta_1 < \theta$, то

$$\|(z+A)^{-1}\| \leqslant \frac{M_1}{\operatorname{dist}\left(z, \overline{S}_{\pi/2-\theta_1}\right)} \tag{X.101}$$

при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S}_{\pi/2-\theta_1}$, где M_1 зависит от θ_1.

На самом деле эти условия также и достаточны:

Теорема X.52. Замкнутый оператор A на банаховом пространстве X служит генератором ограниченной голоморфной полугруппы с углом $\theta \leqslant \pi/2$ тогда и только тогда, когда A удовлетворяет условиям (X.100) и X.101).

Доказательство. Необходимость уже доказана. Заметим, что достаточность можно было бы доказать тем же методом, что и в теореме Хилле—Иосиды, если бы мы располагали условием

$$\|(z+A)^{-n}\| \leqslant \frac{M_1}{\left(\operatorname{dist}\left(z, \overline{S}_{\pi/2-\theta_1}\right)\right)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{X.101a}$$

более сильным, чем условие (X.101). В большей части приложений можно убедиться в справедливости (X.101a), но поучительно само доказательство общего случая. Идея доказательства состоит в применении обобщения функционального исчисления Данфорда (см. задачу 1 и Замечания к гл. VII) для построения полугруппы, которая, как затем показывается, обладает всеми нужными свойствами. Пусть $0 < \theta_2 < \theta_1 < \theta$ и Γ—путь, указанный на рис. X.5. Положим

$$T(z) \equiv -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda z}(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda \tag{X.102}$$

для всех $z \in S_{\theta_2} = \{z \mid |\arg z| < \theta_2\}$. Так как $\sigma(A) \subset \overline{S}_{\pi/2-\theta}$, то на Γ определено $(\lambda - A)^{-1}$. Более того, для $\lambda \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3$ имеем $\operatorname{Re}(z\lambda) = c(z)|\lambda|$, где $c(z) = |z| \cdot \cos(\arg z + \pi/2 - \theta_2)$, так что для $z \in S_{\theta_2}$ интеграл сходится и совокупность $\{\|T(z)\|\}$ равномерно ограничена в области

$$R_{\varepsilon, \delta} = \{z \mid |z| \geqslant \delta, \ |\arg z| \leqslant \theta_2 - \varepsilon\}$$

при всяких $\varepsilon, \delta > 0$. С другой стороны, если $0 < |z| \leqslant \delta$ и $|\arg z| \leqslant \theta_2 - \varepsilon$, то, производя замену переменных $\zeta = |z|\lambda$, найдем

$$T(z) = \int_{\Gamma'} e^{-\zeta z/|z|}\left(\frac{\zeta}{|z|} - A\right)^{-1}\frac{d\zeta}{|z|} =$$

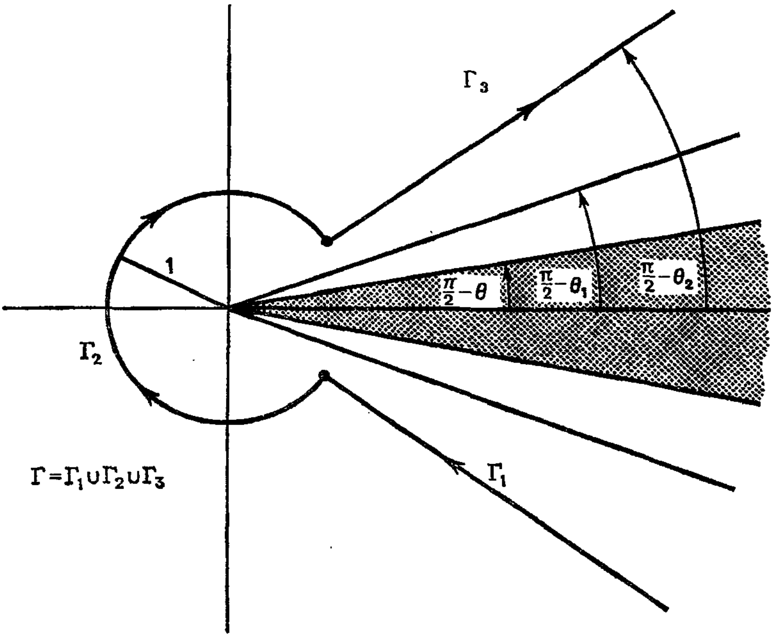

Рис. X.5. Кривая Γ.

(см. рис. X.6)

$$= \int_\Gamma e^{-\zeta z/|z|} \left(\frac{\zeta}{|z|} - A \right)^{-1} \frac{d\zeta}{|z|}$$

(по интегральной формуле Коши и (X.101)).

Так как для $\zeta \in \Gamma$ имеем $\operatorname{dist}(\zeta/|z|, \overline{S}_{\pi/2-\theta_1}) = |z|^{-1} \operatorname{dist}(\zeta, \overline{S}_{\pi/2-\theta_1})$, то

$$\|e^{-zA}\| \leqslant \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} e^{-|\zeta|(1-\cos(\pi/2-\varepsilon))} M_1\, d\zeta + C \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \text{ (независимо от } z)$$

и функция $T(z)$ равномерно ограничена в секторе $R_{\varepsilon,0} = \overline{S}_{\theta_2-\varepsilon}$. Далее, $T(z)$ — аналитическая операторнозначная функция в S_{θ_2}, так как мы можем дифференцировать под знаком интеграла.

Доказательство того, что $T(z)$ — полугруппа, проведем следующим образом. Пусть Γ'' — контур Γ, сдвинутый влево на две единицы. Тогда, по теореме Коши и по (X.101), определение $T(z)$ не зависит от того, какой из двух контуров Γ или Γ'' мы выберем. Пусть $z, z' \in S_{\theta_2}$. Тогда, пользуясь теоремой Фубини,

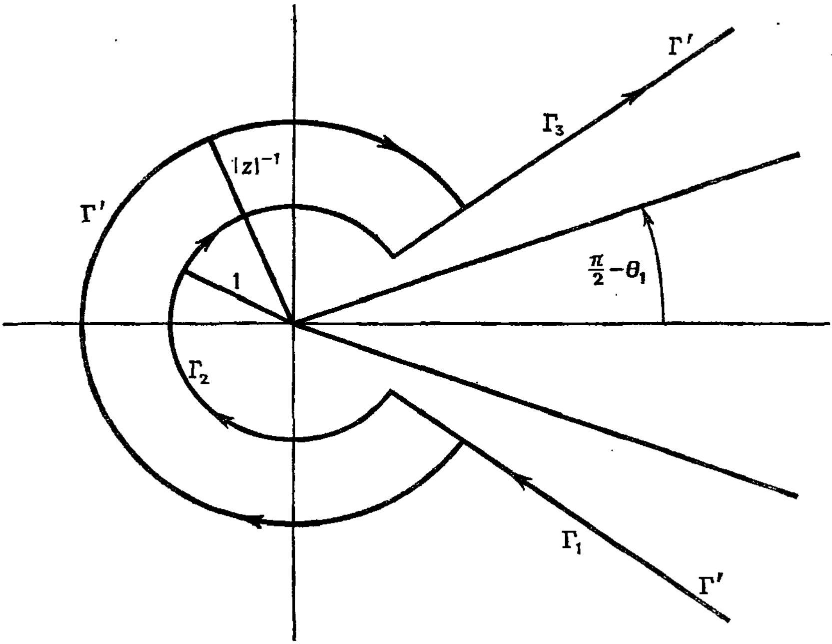

Рис. X.6. Кривая Γ″.

первой резольвентной формулой и интегральной формулой Коши, найдем

$$T(z)\,T(z') = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma''} e^{-\lambda z - \mu z'} (\lambda - A)^{-1} (\mu - A)^{-1}\, d\mu\, d\lambda =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma''} e^{-\lambda z - \mu z'} (\mu - \lambda)^{-1} ((\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1})\, d\mu\, d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-\lambda (z + z')} (\lambda - A)^{-1}\, d\lambda = T(z + z').$$

Допустим теперь, что $z \longrightarrow 0$ в секторе $\overline{S}_{\theta_2 - \varepsilon}$ и $\varphi \in D(A)$. Тогда

$$T(z)\,\varphi - \varphi = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} (e^{-\lambda z} (\lambda - A)^{-1} - e^{-\lambda z}\lambda^{-1})\,\varphi\, d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-\lambda z}\lambda^{-1} (\lambda - A)^{-1} A\varphi\, d\lambda \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[z \to 0]{} -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \lambda^{-1} (\lambda - A)^{-1} A\varphi\, d\lambda =$$

(по теореме о мажорированной сходимости и (X.101))

$= 0$ (по теореме Коши, (X.100) и (X.101)).

Поскольку все $T(z)$ равномерно ограничены, $T(z)\varphi \to \varphi$ для всех $\varphi \in X$. Следовательно, $T(z)$ — сильно непрерывная полугруппа в $\bar{S}_{\theta_2-\varepsilon}$ и, в частности, $T(t)$ сильно непрерывна для $t>0$.

Пусть $\varphi \in X$. Тогда, как отмечалось выше, можно дифференцировать под знаком интеграла; получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}T(z)\varphi &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda z}(-\lambda)(\lambda-A)^{-1}\varphi\,d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda z}(-\varphi - A(\lambda-A)^{-1}\varphi)\,d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda z}(-A(\lambda-A)^{-1}\varphi)\,d\lambda = \quad \text{(теорема Коши)} \\ &= -A\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda z}(\lambda-A)^{-1}\varphi\,d\lambda\right] = \text{(так как } A \text{ замкнут)} \\ &= -AT(z)\varphi.\end{aligned}$$

Итак, $T(z)\colon X \to D(A)$ и $-AT(z)\varphi = T'(z)\varphi$. Далее, если $\varphi \in D(A)$, то такое же вычисление показывает, что $T'(z)\varphi = -T(z)A\varphi$. Следовательно, векторнозначная функция $T(t)\varphi$ имеет равномерно ограниченную производную при $t>0$, так что

$$\begin{aligned}\frac{T(t)\varphi-\varphi}{t} &= \frac{1}{t}\int_0^t T'(s)\varphi\,ds = \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t -AT(s)\varphi\,ds \xrightarrow[t\to 0]{} -A\varphi.\end{aligned}$$

Значит, генератор $T(t)$ расширяет A, но так как $T(t)\colon D(A) \to D(A)$, то из теоремы X.49 следует, что сам A порождает $T(t)$.

Поскольку θ_2 может быть выбрано сколь угодно близким к θ_1 и $\varepsilon>0$ произвольно, мы доказали теорему. ∎

Следствие 1. Пусть q — строго m-аккретивная форма в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, такая, что из $\varphi \in Q(q)$ следует $|\arg[q(\varphi,\varphi)]| \leqslant \theta$, причем $\theta < \pi/2$. Тогда ассоциированный (по теореме VIII.16) с этой формой строго m-аккретивный оператор порождает ограниченную голоморфную полугруппу с углом $\pi/2-\theta$.

Доказательство. Это следствие прямо вытекает из теоремы VIII.17 и только что доказанной теоремы. ∎

Следствие 2. Пусть A — генератор ограниченной голоморфной полугруппы с углом θ, $\theta > 0$. Тогда для всякого целого $m > 0$ и всякого $\varphi \in X$

$$e^{-tA}\varphi \in D(A^m) \qquad \text{и} \qquad \|A^m e^{-tA}\varphi\| \leqslant C\frac{\|\varphi\|}{|t|^m}$$

при всех $t > 0$ (C зависит от A и от m, но не зависит от φ).

Доказательство этого следствия основано на представлении (X.102), формуле $T'(z) = -AT(z)$ и построениях, сходных с доказательством самой теоремы. Воспроизведение деталей вынесено в задачу 58.

Понятие ограниченной голоморфной полугруппы можно обобщить так же, как мы обобщили понятие сжимающей полугруппы. Сильно непрерывная полугруппа $T(t)$ на банаховом пространстве X называется **голоморфной полугруппой с углом** θ, если $T(t)$ обладает всеми свойствами ограниченной голоморфной полугруппы с углом θ, за исключением равномерной ограниченности в секторах $\bar{S}_{\theta_1}$, $\theta_1 < \theta$. Если $T(t)$ — голоморфная полугруппа с углом θ, то для всякого $\theta_1 < \theta$ и $\varphi \in X$ совокупность $\|T(z)\varphi\|$ ограничена в

$$\tilde{R}_{1,\,\theta_1} = \{z \,|\, |\arg z| \leqslant \theta_1,\ |z| \leqslant 1\},$$

так что по принципу равномерной ограниченности функция $\|T(z)\|$ ограничена в $\tilde{R}_{1,\,\theta_1}$. Пользуясь полугрупповым свойством, как выше, заключаем из этого, что существуют такие постоянные M, $\omega > 0$, что

$$\|T(z)\| \leqslant Me^{\omega|z|}$$

для всех $z \in \bar{S}_{\theta_1}$. Следовательно, $e^{-\omega z}T(z)$ — ограниченная голоморфная полугруппа с углом θ_1. Отметим, что это справедливо для всех $\theta_1 < \theta$, однако ω, вообще говоря, зависит от θ_1. Из этого описания, теоремы X.52 и следствия 2 немедленно вытекает

Теорема X.53. Замкнутый оператор A в банаховом пространстве X порождает голоморфную полугруппу с углом θ тогда и только тогда, когда для всякого $\theta_1 < \theta$ существуют такие константы M, $\omega > 0$, что из $\lambda \notin \bar{S}_{\pi/2-\theta_1}$ следует, что $\lambda - \omega \in \rho(A)$ и

$$\|(A - (\lambda - \omega))^{-1}\| \leqslant \frac{M}{\operatorname{dist}(\lambda, \bar{S}_{\pi/2-\theta_1})}.$$

Кроме того, существуют такие константы M_0, $\omega_0 > 0$, что для всех $\varphi \in X$

$$e^{-tA}\varphi \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D(A^m) \qquad \text{и} \qquad \|A^m e^{-tA}\varphi\| \leqslant \frac{M_0 e^{\omega_0 t}\|\varphi\|}{t^m}$$

при всех $t > 0$,

Доказательство следующей теоремы близко следует доказательствам теорем X.12 и X.50 и предоставляется читателю (задача 56).

Теорема X.54. Предположим, что A — генератор голоморфной полугруппы с углом θ в банаховом пространстве X. Пусть B — такой линейный оператор в X, что

(i) $D(B) \supset D(A)$.

(ii) Для всех $a > 0$ существует такое $b > 0$, что для всех $\varphi \in D(A)$

$$\|B\varphi\| \leqslant a \|A\varphi\| + b \|\varphi\|.$$

Тогда $A + B$ порождает голоморфную полугруппу с углом θ на $D(A)$.

Чтобы проиллюстрировать введенные нами понятия и продемонстрировать применение голоморфных полугрупп, обсудим один пример.

Пример 5 (гладкость решений уравнения теплопроводности). Раньше было уже показано (в § IX.7), что полугруппа $e^{t\Delta}$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$ может быть представлена формулой

$$(e^{t\Delta}f)(x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} f(y)\, dy.$$

С помощью прямого вычисления можно убедиться, что эта формула определяет также сильно непрерывную полугруппу на $C_\infty(\mathbb{R})$ с $-\Delta$ в качестве инфинитезимального генератора этой полугруппы на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Значит, это то представление для полугруппы $e^{t\Delta}$ на $C_\infty(\mathbb{R})$, которое мы строили в примере 3.

Для любого $z \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} z > 0$ определим $e^{z\Delta}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$(e^{z\Delta}f)(x) = (4\pi z)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4z} f(y)\, dy,$$

где выбран квадратный корень с наименьшим аргументом. Читатель может убедиться посредством прямых вычислений (задача 57), что $z \longmapsto e^{z\Delta}$ — аналитическая операторнозначная функция при $\operatorname{Re} z > 0$, что полугрупповое свойство выполняется и что если $z \to 0$ в $\bar{S}_\theta$, $|\theta| < \pi/2$, то $e^{z\Delta}f \to f$. Далее,

$$\|e^{z\Delta}\| = \|(4\pi z)^{-n/2} e^{-|x|^2/4z}\|_1 = \frac{|z|}{\operatorname{Re} z},$$

так что $e^{z\Delta}$ — ограниченная голоморфная полугруппа с углом $\pi/2$. Заметим, что если $z = te^{i\theta}$, $0 < |\theta| < \pi/2$, то $e^{te^{i\theta}\Delta}$ дает пример ограниченной полугруппы, которая не является сжимающей.

Предположим, что $q(x)$ — ограниченная непрерывная функция. Тогда, по теореме X.54, оператор $-\Delta+q$ с областью определения $D(-\Delta)$ порождает голоморфную полугруппу с углом $\pi/2$ на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Далее, $e^{t(\Delta-q)}f\in\bigcap_{m=1}^{\infty}D((-\Delta+q)^m)$ для каждого $f\in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Если мы вдобавок предположим, что q бесконечно дифференцируема и ее производные ограничены, то можно показать, что $e^{t(\Delta-q)}f$ есть C^∞-функция x для каждого $t>0$. В самом деле, положим $\varphi\equiv e^{t(\Delta-q)}f$. Тогда $\varphi\in D(-\Delta+q)=D(\Delta)$. Далее, $\varphi\in D((-\Delta+q)^2)$, так что $-\Delta\varphi+q\varphi\in D(\Delta)$. Поскольку $\varphi\in D(\Delta)$, то, согласно задаче 57 (b), $\nabla\varphi$ принадлежит $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ и, значит, $q\varphi\in D(\Delta)$. Следовательно, $\Delta\varphi\in D(\Delta)$. Продолжая так же, докажем, что $\Delta^m\varphi\in D(\Delta)$ для всех m. В частности, $\Delta^m\varphi$ непрерывна при всех m, так что по лемме Соболева (теорема IX.24) φ есть C^∞-функция x.

Сходное доказательство позволяет убедиться, что $e^{t(\Delta-q)}f$ есть C^∞-функция по x при всех $t>0$, если $f\in L^2$. В этом случае непосредственно из спектральной теоремы мы можем заключить, что $e^{t(\Delta-q)}f\in\bigcap_{m=1}^{\infty}D((-\Delta+q)^m)$, так что не возникает нужды в теореме X.53.

Простое рассуждение, основанное на лемме Соболева и теореме X.53, показывает, что в тех же предположениях решения

$$u(x,t)=(e^{t(\Delta-q)}f)(x)$$

бесконечно дифференцируемы *совместно* по x и t при $t>0$.

Как последний пример в теории голоморфных полугрупп мы исследуем один класс операторов, с которым встретимся в следующем разделе и еще раз дальше. Пусть $\langle M,\mu\rangle$ — пространство с мерой, причем $\mu(M)=1$, и пусть A — положительный самосопряженный оператор в $L^2(M,d\mu)$. Так как $L^2\subset L^p$ при всех $1\leqslant p\leqslant 2$, сжимающая полугруппа e^{-tA} — плотно определенное отображение L^p в L^p, $1\leqslant p\leqslant 2$. Возникает естественный вопрос: при каких условиях можно расширить e^{-tA} до сжимающей полугруппы на L^p?

Определение. Пусть $\langle M,\mu\rangle$ есть σ-конечное пространство с мерой и A — положительный самосопряженный оператор в $L^2(M,d\mu)$. Будем называть e^{-tA} **L^p-сжимающей полугруппой**, если $\|e^{-tA}\varphi\|_p\leqslant\|\varphi\|_p$ при всех $\varphi\in L^2\cap L^p$, *всех* $p\in[1,\infty]$ и всех $t>0$. Если отображение $t\longmapsto e^{-tA}$ сильно непрерывно при всех $p<\infty$, то будем называть e^{-tA} **непрерывной** L^p-сжимающей полугруппой.

Теорема X.55. Пусть $\langle M,\mu\rangle$ — пространство с мерой, причем $\mu(M)=1$, и пусть A — положительный самосопряженный оператор в $L^2(M,d\mu)$. Тогда

(a) Если e^{-tA} сохраняет положительность и $e^{-tA}1=1$, то e^{-tA} есть L^p-сжимающая полугруппа.

(b) Каждая L^p-сжимающая полугруппа автоматически непрерывна. Более того, $\operatorname{Ker}(e^{-tA}\restriction L^p)=\{0\}$ при всех $p>1$ и $\operatorname{Ran}(e^{-tA}\restriction L^q)$ плотна в L^q при всех $q<\infty$.

(c) В предположениях (a), если $1<p<\infty$, то e^{-tA}—ограниченная голоморфная полугруппа в секторе

$$S^{(p)}=\left\{z\,\middle|\,|\arg z|<\frac{\pi}{2}\left(1-\left|\frac{2}{p}-1\right|\right)\right\}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что полугруппа e^{-tA}—сжимающая на всех пространствах L^p. Допустим, что $f\in L^2$ и $f\geqslant 0$. Тогда

$$\|e^{-tA}f\|_1=(1,\ e^{-tA}f)=(e^{-tA}1,\ f)=(1,\ f)=\|f\|_1.$$

Если $f\in L^2$ вещественнозначна, то представим ее в виде $f=f_+-f_-$, где $f_+=\max\{0,\ f(x)\}$ и $f_-=\max\{0,\ -f(x)\}$. Тогда

$$\|e^{-tA}f\|_1\leqslant\|e^{-tA}f_+\|_1+\|e^{-tA}f_-\|_1=\|f_+\|_1+\|f_-\|_1=\|f\|_1.$$

Предположим теперь, что $f(x)\in L^2$ комплекснозначна. Тогда

$$\begin{aligned}|(e^{-tA}f)(x)|&=\sup_{\eta\ \text{рациональны}}\{\operatorname{Re}[e^{-i\eta}(e^{-tA}f)(x)]\}=\\&=\sup_{\eta\ \text{рациональны}}\{\operatorname{Re}[(e^{-tA}(e^{-i\eta}f))(x)]\}=\\&=\sup_{\eta\ \text{рациональны}}\{(e^{-tA}(\operatorname{Re}e^{-i\eta}f))(x)\}\end{aligned}$$

при почти всех x. Мы воспользовались здесь тем, что e^{-tA} переводит вещественные функции в вещественные, так как e^{-tA} сохраняет положительность. Для всякой вещественной $g\in L^2$ также почти всюду

$$\begin{aligned}|(e^{-tA}g)(x)|&=|e^{-tA}g_+-e^{-tA}g_-|\leqslant\\&\leqslant e^{-tA}g_++e^{-tA}g_-=e^{-tA}|g(x)|.\end{aligned}$$

Поэтому

$$|(e^{-tA}f)(x)|\leqslant e^{-tA}|f(x)|\ \text{почти всюду},\tag{X.103}$$

откуда следует, что $\|e^{-tA}f\|_1\leqslant\|e^{-tA}|f(x)|\|_1=\|f\|_1$. Итак, $\|e^{-tA}f\|_1\leqslant\|f\|_1$ для всех $f\in L^2$.

Если $f\in L^\infty\subset L^2$, то

$$\begin{aligned}\|e^{-tA}f\|_\infty&=\sup_{\substack{\|g\|_1=1\\ g\in L^2}}(e^{-tA}f,\ g)=\sup_{\substack{\|g\|_1=1\\ g\in L^2}}(f,\ e^{-tA}g)\leqslant\\&\leqslant\|f\|_\infty\left(\sup_{\|g\|_1=1}\|e^{-tA}g\|_1\right)=\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

так что e^{-tA}—сжатие и на L^∞. Значит, по теореме Рисса—Торина e^{-tA} есть сжатие на всех пространствах L^p. Для доказательства утверждения об аналитичности требуется интерполяционная теорема Стейна (теорема IX.21). Так как A положителен и самосопряжен, то $e^{-\zeta A}$ аналитична при $\operatorname{Re}\zeta > 0$ и, как оператор на L^2, непрерывна и ограничена единицей в замкнутой правой полуплоскости. Интерполируем сначала между $p=1$ и $p=2$. Пусть $\eta > 0$ и $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ фиксировано. Тогда для всех z, удовлетворяющих $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $\exp(-\eta e^{i\theta z} A)$—аналитическая операторнозначная функция на $L^1 \cap L^2 = L^2$. Далее, $\exp(-\eta e^{i\theta z} A)$ ограничена и непрерывна в замкнутой полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$. При $\operatorname{Re} z = 1$ имеем $\|e^{-\eta e^{i\theta z} A} f\|_2 \leqslant \|f\|_2$, а при $\operatorname{Re} z = 0$ имеем $\|e^{-\eta e^{i\theta z} A} f\|_1 \leqslant \|f\|_1$. Значит, по интерполяционной теореме Стейна, $\|e^{-\eta e^{i\theta t} A} f\|_p \leqslant \|f\|_p$ при $t \in (0, 1)$, где $t = 2 - 2/p$. Так как $\eta > 0$ и $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ были произвольны, заключаем, что

$$\|e^{-\zeta A} f\|_p \leqslant \|f\|_p \text{ всегда, когда } |\arg\zeta| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{2}{p}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \left|\frac{2}{p} - 1\right|\right).$$

Доказательство для $2 \leqslant p < \infty$ аналогично. Теперь если f_k и g_k—простые функции, то интеграл $\int_M (e^{-\zeta A} f_k) g_k \, d\mu$ аналитичен в правой полуплоскости. Если $f_k \xrightarrow{L^p} f$ и $g_k \xrightarrow{L^q} g$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, то

$$\int_M (e^{-\zeta A} f_k) g_k \, d\mu \longrightarrow \int_M (e^{-\zeta A} f) g \, d\mu$$

равномерно в $S^{(p)} = \left\{\zeta \,\middle|\, |\arg\zeta| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \left|\frac{2}{p} - 1\right|\right)\right\}$, так что $\int_M (e^{-\zeta A} f) g \, d\mu$ аналитичен в этом секторе. Так как слабо аналитические функции сильно аналитичны (теорема VI.4), то $\zeta \longmapsto e^{-\zeta A}$ аналитична в $S^{(p)}$ как функция, значения которой суть операторы в L^p.

Остается показать, что $e^{-zA} f \xrightarrow{L^p} f$, когда $z \longrightarrow 0$ в $S^{(p)}$, для всех $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$. Если $z \in S^{(p)}$ и $1 \leqslant p \leqslant 2$, то $\|e^{-zA} f - f\|_p \leqslant \leqslant \|e^{-zA} f - f\|_2$ для $f \in L^2$. Поскольку L^2 плотно в L^p, сильная непрерывность следует из того, что совокупность $\{e^{-zA}\}$ равномерно ограничена на L^p, а отображение e^{-zA} сильно непрерывно на L^2. Предположим теперь, что $2 < p < \infty$, и пусть q удовлетворяет условию $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Допустим, что $e^{-t_0 A}\psi = 0$ для какого-либо $\psi \in L^q$. Тогда $e^{-sA}\psi = 0$ для всех $s \geqslant t_0$ и, следовательно, по аналитичности, $e^{-tA}\psi = 0$ для всех $t > 0$. Так как e^{-tA} сильно непрерывна на L^q, то $\psi = 0$. Значит, $\operatorname{Ker}(e^{-tA}) = \{0\}$ на L^q для всякого $t > 0$. Читатель легко удостоверится, что сопряженный к e^{-tA} на L^q есть e^{-tA} на L^p. Отсюда мы заключаем, что множество $\mathrm{Ran}(e^{-tA})$ плотно в L^p. Пусть $\psi=e^{-t_0A}\varphi$, $\varphi \in L^p$. Тогда

$$\|e^{-zA}\psi-\psi\|_p \leqslant \|e^{-(z+t_0)A}\varphi-e^{-t_0A}\varphi\|_p \to 0$$

при $z\to 0$, вследствие аналитичности внутри $S^{(p)}$, доказанной выше. Так как $\mathrm{Ran}(e^{-t_0A})$ плотна и $\{e^{-zA}\}$ равномерно ограничены на $S^{(p)}$, заключаем, что e^{-zA} сильно непрерывна на L^p. ∎

Есть примеры, когда все предположения теоремы X.55 выполняются, но e^{-tA} не сильно непрерывна на L^∞. Действительно, таким примером может служить одномерный оператор Эрмита (пример 1 из § X.7). Так как в этом случае $e^{-tA}\psi(x)$ — непрерывная функция x для всякого $t>0$, если $\psi \in L^\infty$, то $e^{-tA}\psi$ не может сходиться по норме L^∞ к ψ, если ψ не непрерывна.

X.9. Гиперсжимающие полугруппы

В предыдущем разделе мы рассмотрели L^p-сжимающие полугруппы. Здесь мы докажем теорему о самосопряженности операторов вида $A+V$, где V — оператор умножения и A порождает L^p-сжимающую полугруппу, удовлетворяющую сильному дополнительному требованию.

Определение. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой и $\mu(M)=1$. Предположим, что A — положительный самосопряженный оператор в $L^2(M, d\mu)$. Будем говорить, что e^{-tA} — **гиперсжимающая полугруппа**, если

(i) она L^p-сжимающая,

(ii) при некотором $b>2$ и некоторой постоянной C_b существует такое $T>0$, что $\|e^{-TA}\varphi\|_b \leqslant C_b\|\varphi\|_2$ при всех $\varphi \in L^2(M, d\mu)$.

По теореме X.55 из условия (i) следует, что e^{-tA} — сильно непрерывная сжимающая полугруппа при всех $p<\infty$. Неравенство Гёльдера показывает, что

$$\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_p, \qquad \text{если } p \geqslant q. \tag{X.104}$$

Значит, L^p-пространства образуют семейство вложенных пространств, уменьшающихся по мере увеличения p; отсюда видно, что (ii) — очень сильное условие. Следующее предположение показывает, что b не играет никакой специальной роли.

Предложение. Пусть e^{-tA} — гиперсжимающая полугруппа на $L^2(M, d\mu)$; тогда для всех $p, q \in (1, \infty)$ существуют такие постоянные C_{pq} и $t_{pq}>0$, что если $t \geqslant t_{pq}$, то

$$\|e^{-tA}\varphi\|_p \leqslant C_{pq}\|\varphi\|_q$$

при всех $\varphi \in L^q$.