сопряженный к e^{-tA} на L^q есть e^{-tA} на L^p. Отсюда мы заключаем, что множество $\operatorname{Ran}(e^{-tA})$ плотно в L^p. Пусть $\psi=e^{-t_0A}\varphi$, $\varphi\in L^p$. Тогда

$$\|e^{-zA}\psi-\psi\|_p\leqslant\|e^{-(z+t_0)A}\varphi-e^{-t_0A}\varphi\|_p\to 0$$

при $z\to 0$, вследствие аналитичности внутри $S^{(p)}$, доказанной выше. Так как $\operatorname{Ran}(e^{-t_0A})$ плотна и $\{e^{-zA}\}$ равномерно ограничены на $S^{(p)}$, заключаем, что e^{-zA} сильно непрерывна на L^p. ∎

Есть примеры, когда все предположения теоремы X.55 выполняются, но e^{-tA} не сильно непрерывна на L^∞. Действительно, таким примером может служить одномерный оператор Эрмита (пример 1 из § X.7). Так как в этом случае $e^{-tA}\psi(x)$ — непрерывная функция x для всякого $t>0$, если $\psi\in L^\infty$, то $e^{-tA}\psi$ не может сходиться по норме L^∞ к ψ, если ψ не непрерывна.

X.9. Гиперсжимающие полугруппы

В предыдущем разделе мы рассмотрели L^p-сжимающие полугруппы. Здесь мы докажем теорему о самосопряженности операторов вида $A+V$, где V — оператор умножения и A порождает L^p-сжимающую полугруппу, удовлетворяющую сильному дополнительному требованию.

Определение. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой и $\mu(M)=1$. Предположим, что A — положительный самосопряженный оператор в $L^2(M, d\mu)$. Будем говорить, что e^{-tA} — **гиперсжимающая полугруппа**, если

(i) она L^p-сжимающая,

(ii) при некотором $b>2$ и некоторой постоянной C_b существует такое $T>0$, что $\|e^{-TA}\varphi\|_b\leqslant C_b\|\varphi\|_2$ при всех $\varphi\in L^2(M, d\mu)$.

По теореме X.55 из условия (i) следует, что e^{-tA} — сильно непрерывная сжимающая полугруппа при всех $p<\infty$. Неравенство Гёльдера показывает, что

$$\|\cdot\|_q\leqslant\|\cdot\|_p, \qquad \text{если } p\geqslant q. \tag{X.104}$$

Значит, L^p-пространства образуют семейство вложенных пространств, уменьшающихся по мере увеличения p; отсюда видно, что (ii) — очень сильное условие. Следующее предположение показывает, что b не играет никакой специальной роли.

Предложение. Пусть e^{-tA} — гиперсжимающая полугруппа на $L^2(M, d\mu)$; тогда для всех p, $q\in(1, \infty)$ существуют такие постоянные C_{pq} и $t_{pq}>0$, что если $t\geqslant t_{pq}$, то

$$\|e^{-tA}\varphi\|_p\leqslant C_{pq}\|\varphi\|_q$$

при всех $\varphi\in L^q$.

Доказательство. Случай $p \leqslant q$ следует немедленно из (i) и (X.104). Поэтому предположим, что $p > q$. Поскольку e^{-TA}: $L^2 \to L^b$ и e^{-TA}: $L^\infty \to L^\infty$, то по теореме Рисса—Торина существует такая постоянная C, что для всех $r \geqslant 2$ выполнено неравенство $\|e^{-TA}\varphi\|_r \leqslant C\|\varphi\|_{br/2}$. Рассмотрим теперь два случая. В первом, когда $q \geqslant 2$, выберем достаточно большое n так, чтобы было $2(b/2)^n > p$. Тогда $\|e^{-nTA}\varphi\|_{(b/2)^n 2} \leqslant \leqslant C^n\|\varphi\|_2$, так что если $2 \leqslant q$, $p > 2(b/2)^n$, то, пользуясь (X.104) и допущением (i), мы приходим к нужному заключению. При $1 < q \leqslant 2$ опять выбираем достаточно большое n так, что $2(b/2)^n > p$ и $q > c$, где $c^{-1} + (2(b/2)^n)^{-1} = 1$. Так как A самосопряжен и $e^{-nTA}\varphi$—ограниченное отображение из L^2 в $L^{2(b/2)^n}$, то $(e^{-nTA})^* = e^{-nTA}$—ограниченное отображение из L^c в L^2. Следовательно, e^{-2nTA}—ограниченное отображение из L^c в $L^{2(b/2)^n}$. Поскольку $c < q < p < 2(b/2)^n$, из (X.104) следует предложение. ∎

Прежде чем доказывать самосопряженность, рассмотрим пример гиперсжимающей полугруппы.

Пример 1. Мы будем пользоваться терминологией примера 2 из § X.6. Пусть U: $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$—унитарное отображение вида U: $f(x) \mapsto \pi^{1/4}e^{x^2/2}f(x)$. Введем оператор $B = UNU^{-1}$. Тогда

$$B = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx}.$$

Так как B унитарно эквивалентен N, то B в существенном самосопряжен на множестве конечных линейных комбинаций полиномов Эрмита $p_n(x) = U\phi_n$, положителен и $Bp_n = np_n$. Следовательно, B порождает сжимающую полугруппу e^{-tB} на $L^2(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$. Покажем, что e^{-tB} есть гиперсжимающая полугруппа.

Так как $-d^2/dx^2$, x^2-1 и $-d^2/dx^2 + (x^2-1)$ все в существенном самосопряжены на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, то из формулы Троттера (теорема X.51) следует, что

$$e^{-tN}f = \lim_{n\to\infty}\left[\exp\left(\frac{t}{2n}\frac{d^2}{dx^2}\right)\exp\left(-\frac{t}{n}\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)\right)\right]^n f$$

для всех $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$. Поскольку $\exp(-(t/n)(^1/_2x^2-1))$ и $\exp((t/2n)d^2/dx^2)$ сохраняют положительность (задача 53), заключаем, что e^{-tN} сохраняет положительность. Так как U также сохраняет положительность, то ее сохраняет и e^{-tB}. Далее, $p_0(x) \equiv 1$ и $e^{-tB}p_0 = p_0$. Значит, согласно теореме X.55, e^{-tB}—сжимающая полугруппа на $L^p(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$ при всех $p \in [1, \infty]$.

Для доказательства свойства гиперсжимаемости мы покажем, что $\|e^{-tB}\varphi\|_4 \leqslant C\|\varphi\|_2$ при достаточно больших t. Прежде всего заметим, что

$$\|p_n\|_{L^4(\mathbb{R},\, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)} = \left(\pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}(p_n(x))^4 e^{-x^2}dx\right)^{1/4} = $$
$$= \|p_n(x)\phi_n\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R},\, dx)}.$$

Далее, так как $A\phi_0 = 0$, то

$$\phi_n(x) = (n!)^{-1/2}(A^\dagger)^n\phi_0 = (n!)^{-1/2}2^{n/2} :\left(\frac{A+A^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^n: \phi_0.$$

Викова степень $:((A+A^\dagger)/\sqrt{2})^n:$ определится путем проведения операции возведения в степень и перестановки всех $A^\dagger$ влево от всех A в каждом члене получаемой суммы. Так как $(A+A^\dagger)/\sqrt{2} = x$, то рассуждение, намеченное в задаче 48, показывает, что оператор $:((A+A^\dagger)/\sqrt{2})^n:$ сводится к умножению на полином. Но $\phi_n(x) = p_n(x)\,\phi_0$, так что для всякого $\psi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ имеем

$$p_n(x)\psi = 2^{n/2}(n!)^{-1/2} :\left(\frac{A+A^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^n: \psi.$$

Следовательно, пользуясь оценкой (X.61), находим, что

$$\|p_n(x)\,\phi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 2^{n/2}(n!)^{-1/2}\left\| :\left(\frac{A+A^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^n: \phi_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2^n}{(n!)^{1/2}}\left((n+1)^{1/2}\ldots(n+n)^{1/2}\right) =$$
$$= 2^n\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^{1/2} \leqslant 4^n.$$

Итак, если $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x) \in L^2(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$, то

$$\left\|e^{-tB}\sum_{n=0}^{\infty}a_n p_n(x)\right\|_{L^4(\mathbb{R},\, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\,e^{-tn}\|p_n(x)\|_{L^4(\mathbb{R},\, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)} \leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2tn}4^n\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R},\, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)}$$

при $t > {}^1/_2 \log 4$. Следовательно, e^{-tB} — гиперсжимающая полугруппа. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема X.56. Оператор $-{}^1/_2 d^2/dx^2 + x\,d/dx$ на пространстве $L^2(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$ положителен, самосопряжен в существенном на множестве конечных линейных комбинаций полиномов Эрмита и порождает гиперсжимающую полугруппу.

В порядке подготовки к нашей главной теореме докажем следующий результат. Его обобщения указаны в Замечаниях.

Теорема X.57 (лемма Сигала). Пусть A и B — полуограниченные самосопряженные операторы, так что $A+B$ в существенном самосопряжен на $D(A)\cap D(B)$. Тогда

$$\|e^{-(A+B)}\| \leqslant \|e^{-A/2}e^{-B}e^{-A/2}\|.$$

Доказательство. Пусть $C=\|e^{-A/2}e^{-B}e^{-A/2}\|$. Пусть $\varphi\in Q(e^A)$. Тогда, разумеется, $\varphi\in Q(e^{-B})=\mathscr{H}$ и

$$(\varphi, e^{-B}\varphi)=(e^{A/2}\varphi, e^{-A/2}e^{-B}e^{-A/2}e^{A/2}\varphi)\leqslant C(\varphi, e^A\varphi),$$

откуда заключаем, что $\|e^{-B/2}\varphi\|^2\leqslant C\|e^{A/2}\varphi\|^2$. Из теоремы X.18 следует, что $(\varphi, e^{-B/2}\varphi)\leqslant(\varphi, C^{1/2}e^{-A/2}\varphi)$ или $\|e^{-B/4}\varphi\|^2\leqslant$ $\leqslant C^{1/2}\|e^{A/4}\varphi\|^2$. По индукции получим $\|e^{-2^{-n}B}\varphi\|^2\leqslant C^{2^{1-n}}\|e^{2^{-n}A}\varphi\|^2$. Поэтому

$$(\varphi, e^{-2^{-(n+1)}A}e^{-2^{-n}B}e^{-2^{-(n+1)}A}\varphi)\leqslant C^{2^{-n}}(\varphi, \varphi)$$

для всех $\varphi\in Q(e^A)$. Так как $e^{-2^{-(n+1)}A}e^{-2^{-n}B}e^{-2^{-(n+1)}A}$ — ограниченный самосопряженный оператор, то

$$\|e^{-2^{-(n+1)}A}e^{-2^{-n}B}e^{-2^{-(n+1)}A}\|\leqslant C^{2^{-n}}$$

и, значит,

$$\|(e^{-2^{-(n+1)}A}e^{-2^{-n}B}e^{-2^{-(n+1)}A})^{2^n}\|\leqslant C.$$

Но по формуле Троттера

$$(e^{-2^{-(n+1)}A}e^{-2^{-n}B}e^{-2^{-(n+1)}A})^{2^n}\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-(A+B)}$$

в сильном смысле, так что и $\|e^{-(A+B)}\|\leqslant C$. ∎

Теперь мы готовы сформулировать нашу главную теорему.

Теорема X.58. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой и $\mu(M)=1$, и пусть H_0 — генератор гиперсжимающей полугруппы на $L^2(M, d\mu)$. Пусть V — вещественнозначная измеримая функция на $\langle M, \mu\rangle$, такая, что $V\in L^p(M, d\mu)$ при всех $p\in[1, \infty)$ и $e^{-tV}\in L^1(M, d\mu)$ при всех $t>0$. Тогда H_0+V в существенном самосопряжен на $C^\infty(H_0)\cap D(V)$ и ограничен снизу.

Доказательство. Доказательство этой теоремы довольно длинное, поэтому мы разобьем его на несколько шагов. Идея состоит в следующем. Определим прежде всего

$$V_n(x)=\begin{cases}V(x), & \text{если } |V(x)|\leqslant n,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда $H_n = H_0 + V_n$ самосопряжен на $D(H_0)$ по теореме Като — Реллиха. Сначала мы выведем некоторые равномерные оценки экспоненты e^{-tH_n}, рассматриваемой как отображение из L^p в L^q. Затем мы воспользуемся этими оценками, чтобы доказать, что e^{-tH_n} сильно сходится к однопараметрической самосопряженной полугруппе $T(t)$ на $L^2(M, d\mu)$, так что $T(t)$ порождается некоторым полуограниченным самосопряженным оператором H. Наконец, мы покажем, что H в существенном самосопряжен на $C^\infty(H) \cap D(V)$ и равен там $H_0 + V$.

Первый шаг. При любом $t > 0$: $\sup_n \| e^{-tV_n} \|_1 < \infty$ и равномерно ограничен по t на любом компактном интервале из $[0, \infty)$.

Чтобы доказать это утверждение, заметим, что если $V(x) < 0$, то $V_n(x) \geqslant V(x)$, так что $e^{-tV_n(x)} \leqslant e^{-tV(x)}$. С другой стороны, если $V(x) \geqslant 0$, то $V_n(x) \geqslant 0$, так что $e^{-tV_n(x)} \leqslant 1$. Значит, $e^{-tV_n(x)} \leqslant e^{-tV(x)} + 1$ при всех x, так что $\| e^{-tV_n(x)} \|_1 \leqslant \| e^{-tV} \|_1 + 1$. Если

$$V_+(x) = \begin{cases} V(x) & \text{при } V(x) > 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и $V_- = V - V_+$, то $\| e^{-tV_+} \|_1 \leqslant 1$, а $\| e^{-tV_-} \|_1$ монотонно возрастает; отсюда легко получается утверждение о равномерности.

Второй шаг. Пусть задано $p < q$. Тогда для каждого t существует такая постоянная C_t (зависящая от p, q и t, но не зависящая от n), что для всех $\varphi \in L^q$

$$\| e^{-tH_n} \varphi \|_p \leqslant C_t \| \varphi \|_q.$$

При фиксированных p и q она равномерно ограничена по t в любом компактном интервале из $[0, \infty)$.

Отметим, что это довольно слабый результат, поскольку $p < q$, однако требования на V настолько сильны, что нам его будет достаточно там, где он потребуется на четвертом шаге. Пусть $A_m = (e^{-tV_n/m} e^{-tH_0/m})^m$. Сначала покажем, что $\| A_m \varphi \|_p \leqslant C_t \| \varphi \|_q$, а потом воспользуемся формулой Троттера для произведения. Пусть r удовлетворяет равенству $r^{-1} + q^{-1} = p^{-1}$. Тогда отображение A_m можно записать в виде

$$\begin{tikzcd}
L^q \arrow[r, "e^{-(t/m)H_0}"] & L^q \arrow[dr, "e^{-(t/m)V_n}"] & & & & & \\
& & L^{(q^{-1}+m^{-1}r^{-1})^{-1}} \arrow[r, "e^{-(t/m)H_0}"] & L^{(q^{-1}+m^{-1}r^{-1})^{-1}} \arrow[dr, "e^{-(t/m)V_n}"] & & & \\
& & & & L^{(q^{-1}+2m^{-1}r^{-1})^{-1}} \arrow[r] & \vdots \arrow[dr, "e^{-(t/m)V_n}"] & \\
& & & & & & L^p
\end{tikzcd}$$

Каждое из отображений $e^{-(t/m)H_0}$ есть сжатие, так как e^{-tH_0} — гиперсжимающая полугруппа. Согласно неравенству Гёльдера, норма каждого из отображений $e^{-(t/m)V_n}$ не превосходит $\|e^{-(t/m)V_n}\|_{mr}$. Поэтому

$$\|A_m\varphi\|_p \leqslant \|e^{-(t/m)V_n}\|_{mr}^m \|\varphi\|_q.$$

Далее,

$$\|e^{-(t/m)V_n}\|_{mr}^m = \left[\left(\int\limits_M e^{-tV_n r}\,d\mu\right)^{1/mr}\right]^m = \|e^{-tV_n}\|_r,$$

и мы заключаем, что

$$\|A_m\varphi\|_p \leqslant \|e^{-tV_n}\|_r \|\varphi\|_q.$$

По формуле Троттера $A_m\varphi \to e^{-tH_n}\varphi$ при всех φ из L^2. Но, в силу $*$-слабой компактности единичного шара в L^p, $A_m\varphi$ также имеет $*$-слабую предельную точку ψ в L^p, такую, что $\|\psi\|_p \leqslant \|e^{-tV}\|_r \|\varphi\|_q$. Немного теории меры — и мы увидим, что $\psi = e^{-tH_n}\varphi$. Это дает нужную оценку. Равномерность доказывается так же, как на первом шаге.

Третий шаг. Существует такая постоянная E, не зависящая от n, что

$$\|e^{-tH_n}\varphi\|_2 \leqslant e^{Et}\|\varphi\|_2.$$

Сначала покажем, что $e^{-TH_0}e^{-2TV_n}e^{-TH_0}$ — ограниченное отображение из L^2 в L^2 с гранью D, не зависящей от n. Так как H_0 — гиперсжимающий, e^{-TH_0} — ограниченное отображение (с гранью D_1) из L^2 в L^4. По неравенству Гёльдера e^{-2TV_n} — ограниченное отображение из L^4 в L^2 с гранью $\|e^{-2TV_n}\|_4 = \|e^{-8TV_n}\|_1^{1/4} \leqslant (\|e^{-8TV}\|_1 + 1)^{1/4}$ согласно первому шагу. Наконец, e^{-TH_0} есть сжатие на L^2, так что $\|e^{-TH_0}e^{-2TV_n}e^{-TH_0}\| \leqslant D$. Следовательно, по лемме Сигала $\|e^{-2T(H_0+V_n)}\| \leqslant D$ или

$$-E \equiv \frac{-\log D}{2T} \leqslant H_0 + V_n.$$

Четвертый шаг. Пусть $\varphi \in L^2(M, d\mu)$. Тогда существует $T(t)\varphi \equiv \equiv \lim\limits_{n\to\infty} e^{-tH_n}\varphi$ и $T(t)$ есть сильно непрерывная полугруппа самосопряженных операторов, удовлетворяющих условию $\|T(t)\| \leqslant e^{Et}$. Далее, существует единственный самосопряженный оператор H, удовлетворяющий условию $H \geqslant -E$, такой, что $T(t) = e^{-tH}$.

Начнем с того, что запишем $e^{-tH_n}\varphi$, $\varphi \in L^2$, с помощью формулы Дюамеля в виде

$$e^{-tH_n}\varphi = e^{-tH_m}\varphi + \int_0^t e^{-(t-u)H_n}(V_m - V_n)\, e^{-uH_m}\varphi\, du.$$

Эта формула выполняется, так как обе ее части в применении к вектору из $D(H_0)$ оказываются решениями одного и того же дифференциального уравнения первого порядка. Так как H_n самосопряжен на $D(H_0)$, соответствующие полугруппы совпадают. Допустим теперь, что $\varphi \in L^\infty$ и t фиксировано. Тогда, согласно второму шагу, мы можем найти такую постоянную K_1, что $\|e^{-uH_m}\varphi\|_8 \leqslant K_1 \|\varphi\|_\infty$ при всех m и всех $u \in [0, t]$. Можно найти также такую K_2, что

$$\|e^{-(t-u)H_n}\psi\|_2 \leqslant K_2 \|\psi\|_4$$

при всех n и всех $u \in [0, t]$. Наконец, по неравенству Гёльдера $V_m - V_n$ имеет норму $\|V_m - V_n\|_8$ как отображение из L^8 в L^4. Следовательно, по формуле Дюамеля

$$\|e^{-tH_n}\varphi - e^{-tH_m}\varphi\|_2 \leqslant K_1 K_2 t \|V_m - V_n\|_8 \|\psi\|_\infty.$$

Так как $V_n \xrightarrow{L^8} V$, то $e^{-tH_m}\varphi$ есть последовательность Коши в L^2; значит, можно определить $T(t)\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-tH_n}\varphi$. Согласно третьему шагу, $\{e^{-tH_m}\}$ равномерно ограничены, когда t меняется в компактных интервалах из $[0, \infty)$, так что $\varepsilon/3$-прием позволяет убедиться, что $e^{-tH_n}\varphi$ сходится при всех $\varphi \in L^2$. Аналогично доказывается, что, поскольку сходимость для $\varphi \in L^\infty$ равномерна на компактных t-интервалах, $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа. Определим теперь H как инфинитезимальный генератор $T(t)$. Так как каждый e^{-tH} самосопряжен, то H симметричен. Но e^{-tH} — полугруппа, ограниченная величиной e^{Et}, так что $-E-1 \in \rho(H)$. В силу основного критерия H самосопряжен. Оценки прямо вытекают из третьего шага.

Пятый шаг. Пусть $\mathcal{D}=\{\varphi \mid \varphi=e^{-tH}\psi$ *с некоторым* $\psi \in L^\infty\}$. *Тогда* $\mathcal{D} \subset L^4 \cap D(H_0)$, H *в существенном самосопряжен на* $\mathcal{D}$, *и если* $\varphi \in \mathcal{D}$, *то* $H\varphi = H_0\varphi + V\varphi$.

Пространство L^∞ плотно в L^2, поэтому, согласно спектральной теореме, $\mathcal{D}$ плотно в L^2. Также с помощью спектральной теоремы довольно легко убедиться, что множество $(H+i)[\mathcal{D}]$ L^2-плотно и, значит, H в существенном самосопряжен на $\mathcal{D}$. Теперь допустим, что $\varphi = e^{-tH}\psi \in \mathcal{D}$. Согласно второму шагу, $e^{-tH_n}\psi \in L^4$; применяя формулу Дюамеля подобно тому, как это делалось выше, можно показать, что $\{e^{-tH_n}\psi\}_{n=1}^\infty$ — последовательность Коши в L^4. Поскольку $\varphi_n \equiv e^{-tH_n}\psi \xrightarrow{L^2} \varphi$, заключаем, что $\varphi \in L^4 \subset D(V)$. Далее, так как $V_n \xrightarrow{L^4} V$, имеем $V_n\varphi_n \xrightarrow{L^2} V\varphi$.

Пусть теперь $f_n(t) = e^{-tH_n}$ и $f(t) = e^{-tH}$. Тогда $f_n(t)$ и $f(t)$ аналитичны в открытой правой полуплоскости и, согласно третьему шагу, $\|f_n(t)\| \leqslant e^{E(\mathrm{Re}\, t)}$ равномерно по n. Поскольку $f_n(t) \to f(t)$ на вещественной оси, заключаем по теореме Витали о сходимости (задача 33 из гл. I), что $f_n(t) \to f(t)$ сильно, равномерно на компактных подмножествах открытой правой полуплоскости. Тогда из интегральной теоремы Коши вытекает, что $f_n'(t) \to f'(t)$ сильно, т. е.

$$H_n\varphi_n \to H\varphi.$$

Следовательно,

$$H_0\varphi_n = (H_n - V_n)\varphi_n \to (H - V)\varphi.$$

Значит, $\varphi \in D(H_0)$ и $H\varphi = H_0\varphi + V\varphi$.

Шестой шаг. Оператор $H_0 + V$ *в существенном самосопряжен на* $C^\infty(H_0) \cap D(V)$.

Согласно пятому шагу, $H_0 + V$ в существенном самосопряжен на $D(H_0) \cap L^4$. Пусть $\psi \in D(H_0) \cap L^4$; положим $\psi_n = e^{-H_0/n}\psi$. Тогда, в силу спектральной теоремы, $\psi_n \in C^\infty(H_0)$ и $H_0\psi_n \to H_0\psi$. Но так как e^{-tH_0} — гиперсжимающая полугруппа, то $\psi_n \in L^4$ и $\psi_n \xrightarrow{L^4} \psi$. Значит, $V\psi_n \xrightarrow{L^2} V\psi$. Следовательно,

$$D(H_0) \cap L^4 \subset D(\overline{(H_0+V) \restriction C^\infty(H_0) \cap L^4}).$$

Так как $L^4 \subset D(V)$, то $H_0 + V$ в существенном самосопряжен на $C^\infty(H_0) \cap D(V)$.

Это завершает доказательство теоремы X.58. ∎

Отметим, что если $V \geqslant 0$, то первый и третий шаги (опирающиеся на теорему X.57) тривиальны. Мы доказали более трудную теорему, так как в том главном приложении, которое мы имеем в виду (пример 4), V не положителен. Теорема X.58 имеет следующее расширение:

Теорема X.59. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с конечной мерой и $\mu(M)=1$, пусть H_0 — самосопряженный генератор некоторой гиперсжимающей полугруппы на $L^2(M, d\mu)$. Предположим, что V — вещественнозначная измеримая функция на M, удовлетворяющая условию

(i) $V \in L^p$ при некотором $p>2$ и $\|e^{-tV}\|_1 < \infty$ для всех $t \geqslant 0$

или условию

(ii) $V \in L^2$ и $V \geqslant 0$.

Тогда H_0+V в существенном самосопряжен на $C^\infty(H_0) \cap D(V)$ и ограничен снизу.

Наконец, сформулируем теорему непрерывности, которая может быть доказана с помощью тех же методов, что и теорема X.58.

Теорема X.60. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с конечной мерой, причем $\mu(M)=1$. Предположим, что самосопряженный оператор H_0 порождает гиперсжимающую полугруппу на $L^2(M, d\mu)$. Пусть $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ и V — вещественнозначные функции на M, удовлетворяющие условиям

(i) $V_n,\ V \in \bigcap\limits_{p<\infty} L^p(M, d\mu)$;

(ii) $e^{-V_n},\ e^{-V} \in \bigcap\limits_{p<\infty} L^p(M, d\mu)$;

(iii) существует такое $q \in (2, \infty]$, что

$$V_n \xrightarrow{L^q} V \quad \text{и} \quad \sup_n \|e^{-V_n}\|_q < \infty.$$

Тогда $H_0+V_n \to H_0+V$ в смысле резольвентной нормы.

Пример 2 (ангармонический осциллятор, четвертое доказательство). Пусть $V(x)$ — неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |V(x)|^p e^{-x^2} dx < \infty$ при всех $p \in [1, \infty)$. Рассмотрим оператор $-d^2/dx^2+2x\, d/dx+(V(x)-1)$ на множестве $U[\mathscr{S}]$, где $U\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$ — отображение, определенное в примере 1. В примере 1 мы показали, что $-d^2/dx^2+2x\, d/dx$ порождает гиперсжимающую полугруппу. Значит, поскольку $V(x)-1$ удовлетворяет условиям теоремы X.58, $-d^2/dx^2+2x\, d/dx+V(x)-1$ в существенном самосопряжен на $U[\mathscr{S}]$. Следовательно, $-d^2/dx^2+x^2+V(x)$ в существенном самосопряжен на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. В частности, если мы выберем $V(x)=x^4$, мы получим новое доказательство самосопряженности в существенном оператора ангармонического осциллятора на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Пример 3. Пусть $V \in L^2(\mathbb{R}^n, \pi^{-n/2}e^{-|x|^2}d^nx)$ и $V \geqslant 0$. Из теоремы X.59 следует самосопряженность в существенном оператора $-\Delta+V$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В самом деле, обобщая пример 1, можно показать, что $-\Delta+2x\cdot\nabla$ порождает гиперсжимающую полугруппу на $L^2(\mathbb{R}^n, \pi^{-n/2}e^{-|x|^2}d^nx)$, а затем с помощью теоремы X.59 и методов примера 2 убедиться в том, что $-\Delta+x^2+V$ в существенном самосопряжен на $C^\infty(-\Delta+x^2)\cap D(V)=\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\cap D(V)$. Простое рассуждение показывает, что он самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Наконец, как в примере 6 из § X.2, воспользуемся равенством $[x_i, [x_j, -\Delta]]=\delta_{ij}$ и докажем оценку

$$\|x^2\psi\|^2 \leqslant \|(-\Delta+V+x^2)\psi\|^2+2n\|\psi\|^2.$$

Отсюда с помощью приема Конради получаем, что $-\Delta+V$ в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Этот результат мы уже получили в § X.4 с помощью неравенства Като.

Пример 4 (применения в квантовой теории поля). Мы будем пользоваться обозначениями, введенными в § X.7.

Теорема X.61. Пусть $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство с комплексным сопряжением C. Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$, коммутирующий с C. Тогда

(a) Если $A \geqslant 0$, то $\Gamma(e^{-tA})$ есть L^p-сжимающая полугруппа на Q-пространстве.

(b) Если $A \geqslant cI > 0$, то $\Gamma(e^{-tA})$ — гиперсжимающая полугруппа.

Доказательство. Докажем (a). Доказательство (b) представляет собой бесконечномерный вариант соответствующего доказательства в примере 1 (ссылки на литературу см. в Замечаниях). Пусть $\{A_n\}$ — последовательность ограниченных самосопряженных операторов, спектры которых состоят из конечного числа собственных значений конечной кратности, так что $e^{-tA_n} \to e^{-tA}$ в сильном смысле при $n\to\infty$. Фиксируем n, и пусть $\{a_l\}_{l=1}^N$ обозначает ненулевые собственные значения A_n с соответствующими собственными функциями $\{\psi_l\}_{l=1}^N$. Пусть $\{\psi_l\}_{l=N+1}^\infty$ — ортонормированный базис ядра оператора A_n. Пусть S — унитарное отображение $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ на Q-пространство $L^2(Q, d\mu)$, построенное с помощью базиса $\{\psi_l\}_{l=1}^\infty$ в $\mathscr{H}$. Мы покажем, что SA_nS^{-1} сохраняет положительность. Если $\varphi(\cdot)$ и $\pi(\cdot)$ — канонические поле и сопряженный импульс, отвечающие C, то на подпространстве $\{P(\varphi(\psi_l))\Omega_0 \mid P\text{ — полином}\}$ пространства $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ оператор $d\Gamma(A_n)$ равен $^1/_2(\varphi(\psi_l)^2+\pi(\psi_l)^2-1)$. Значит,

$$Sd\Gamma(A_n)S^{-1}=\sum_{l=1}^{N} {}^1/_2 a_l\left(-\frac{d^2}{dq_l^2}+2q_l\frac{d}{dq_l}\right).$$

Следовательно,

$$S\Gamma(e^{-tA_n})S^{-1}=\prod_{l=1}^{N}\exp\left(-\frac{ta_l}{2}\left(-\frac{d^2}{dq_l^2}+2q_l\frac{d}{dq_l}\right)\right).$$

Согласно примеру 1, все $\exp(-(ta_l/2)(-d^2/dq_l^2+2q_l d/dq_l))$ сохраняют положительность и

$$\exp\left(-\frac{ta_l}{2}\left(-\frac{d^2}{dq_l^2}+2q_l\frac{d}{dq_l}\right)\right)1=1.$$

Значит, $S\Gamma(e^{-tA_n})S^{-1}$ сохраняет положительность и $S\Gamma(e^{-tA_n})S^{-1}1=$ $=1$. Так как e^{-tA_n} сильно сходится к e^{-tA} на $\mathscr{H}$, то $\Gamma(e^{-tA_n})$ сильно сходится к $\Gamma(e^{-tA})$ на $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$. Итак, мы заключаем, что $S\Gamma(e^{-tA})S^{-1}$ сохраняет положительность и удовлетворяет условию $S\Gamma(e^{-tA})S^{-1}1=1$. Следовательно, по теореме X.55, полугруппа $S\Gamma(e^{-tA})S^{-1}$ L^p-сжимающая. ∎

Следствие. Свободный гамильтониан $d\Gamma(\mu)$ теории свободного скалярного поля с массой $m>0$ порождает гиперсжимающую полугруппу $\Gamma(e^{-t\mu})$ на $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$.

Теорема X.62. Гамильтониан $H_0+H_I(g)$ (определенный в § X.7) теории скалярного поля с $(\varphi^4)_2$-самодействием самосопряжен в существенном на $C^\infty(H_0)\cap D(H_I(g))$.

Доказательство. Из теоремы X.45 и приведенного выше следствия вытекает, что SH_0S^{-1} и $SH_I(g)S^{-1}$ удовлетворяют условиям теоремы X.58. ∎

X.10. Граф-пределы

В этом разделе мы продолжим рассмотрение граф-пределов, начатое в § VIII.7, причем будем пользоваться без пояснений введенными там обозначениями. В теореме VIII.26 было показано, что если $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ и A — самосопряженные операторы, то $A_n\to A$ в строгом резольвентном смысле тогда и только тогда, когда A есть строгий граф-предел последовательности $\{A_n\}_{n=1}^\infty$. Хотя теорема VIII.26 и интересна, она не очень полезна, так как доказательство существенно опирается на сделанное заранее предположение о существовании самосопряженного предела A. Однако в приложениях часто желательно установить именно самосопряженность этого предела. Если же предположить лишь сильную сходимость $(A_n+i)^{-1}$ и $(A_n-i)^{-1}$ к операторам R_+ и R_-, то сильный резольвентный предел A существует тогда и только тогда, когда R_+ или R_- имеет плотную область значений (теорема VIII.22), а это такое свойство, которое, вообще говоря, трудно доказать. С другой стороны, сильный граф-предел последовательности самосопряженных операторов $\{A_n\}$ может