Следовательно,

$$S\Gamma(e^{-tA_n})S^{-1}=\prod_{l=1}^{N}\exp\left(-\frac{ta_l}{2}\left(-\frac{d^2}{dq_l^2}+2q_l\frac{d}{dq_l}\right)\right).$$

Согласно примеру 1, все $\exp(-(ta_l/2)(-d^2/dq_l^2+2q_l d/dq_l))$ сохраняют положительность и

$$\exp\left(-\frac{ta_l}{2}\left(-\frac{d^2}{dq_l^2}+2q_l\frac{d}{dq_l}\right)\right)1=1.$$

Значит, $S\Gamma(e^{-tA_n})S^{-1}$ сохраняет положительность и $S\Gamma(e^{-tA_n})S^{-1}1=1$. Так как e^{-tA_n} сильно сходится к e^{-tA} на $\mathscr{H}$, то $\Gamma(e^{-tA_n})$ сильно сходится к $\Gamma(e^{-tA})$ на $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$. Итак, мы заключаем, что $S\Gamma(e^{-tA})S^{-1}$ сохраняет положительность и удовлетворяет условию $S\Gamma(e^{-tA})S^{-1}1=1$. Следовательно, по теореме X.55, полугруппа $S\Gamma(e^{-tA})S^{-1}$ L^p-сжимающая. ∎

Следствие. Свободный гамильтониан $d\Gamma(\mu)$ теории свободного скалярного поля с массой $m>0$ порождает гиперсжимающую полугруппу $\Gamma(e^{-t\mu})$ на $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$.

Теорема X.62. Гамильтониан $H_0+H_I(g)$ (определенный в § X.7) теории скалярного поля с $(\varphi^4)_2$-самодействием самосопряжен в существенном на $C^\infty(H_0)\cap D(H_I(g))$.

Доказательство. Из теоремы X.45 и приведенного выше следствия вытекает, что SH_0S^{-1} и $SH_I(g)S^{-1}$ удовлетворяют условиям теоремы X.58. ∎

X.10. Граф-пределы

В этом разделе мы продолжим рассмотрение граф-пределов, начатое в § VIII.7, причем будем пользоваться без пояснений введенными там обозначениями. В теореме VIII.26 было показано, что если $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ и A — самосопряженные операторы, то $A_n\longrightarrow A$ в строгом резольвентном смысле тогда и только тогда, когда A есть строгий граф-предел последовательности $\{A_n\}_{n=1}^\infty$. Хотя теорема VIII.26 и интересна, она не очень полезна, так как доказательство существенно опирается на сделанное заранее предположение о существовании самосопряженного предела A. Однако в приложениях часто желательно установить именно самосопряженность этого предела. Если же предположить лишь сильную сходимость $(A_n+i)^{-1}$ и $(A_n-i)^{-1}$ к операторам R_+ и R_-, то сильный резольвентный предел A существует тогда и только тогда, когда R_+ или R_- имеет плотную область значений (теорема VIII.22), а это такое свойство, которое, вообще говоря, трудно доказать. С другой стороны, сильный граф-предел последовательности самосопряженных операторов $\{A_n\}$ может существовать, но не быть самосопряженным, хотя он автоматически оказывается замкнутым и симметрическим (теорема VIII.27). Смысл следующей теоремы в том, что если оба типа пределов существуют, то предельный оператор самосопряжен. По существу, надо просто воспользоваться слабым граф-пределом.

Теорема X.63 (теорема о граф-пределе). Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Допустим, что

(i) $(A_n \pm i)^{-1} \to R_{\pm}$ сильно

и

(ii) слабый граф-предел A последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотно определен.

Тогда A самосопряжен, $(A \pm i)^{-1} = R_{\pm}$ и A_n сходится к A в сильном резольвентном смысле.

Доказательство. Покажем сначала, что $\operatorname{Ker}(R_+) = \{0\}$. Пусть $\chi \in \operatorname{Ker}(R_+)$ и $\varphi \in D(A)$. Тогда существует такая последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\varphi_n \in D(A_n)$, $\varphi_n \to \varphi$ и $A_n\varphi_n \xrightarrow{w} A\varphi$. Следовательно,

$$(\chi, \varphi) = \lim_{n\to\infty} (\chi, \varphi_n) = \lim_{n\to\infty} ((A_n + i)^{-1}\chi, (A_n - i)\varphi_n) =$$
$$= (R_+\chi, A\varphi - i\varphi) = 0.$$

Так как $D(A)$ плотна, $\chi = 0$. Значит, $\operatorname{Ker}(R_+) = \{0\}$. Поскольку $R_- = R_+^*$, имеем $\operatorname{Ran} R_- = (\operatorname{Ker} R_+)^{\perp} = \mathscr{H}$. Следовательно, по теореме VIII.22 существует такой самосопряженный оператор A', что $A_n \to A'$ в сильном резольвентном смысле. Наконец, из теоремы VIII.26 вытекает, что A' есть сильный граф-предел $\{A_n\}$, поэтому $A' \subset A$. Но, по теореме VIII.28, A симметричен, так что $A' = A$. ∎

Важность этой теоремы в том, что она сводит вопрос о самосопряженности к вопросу о сходимости, а такие вопросы иногда удается решать при помощи прямых оценок операторов A_n. Мы сейчас докажем это для условия (i). Позже мы выведем достаточное условие и для (ii). Как можно доказать (i)? Если $\varphi \in \mathscr{H}$, то *формально*

$$(A_n + i)^{-1}\varphi - (A_m + i)^{-1}\varphi = (A_n + i)^{-1}(A_n - A_m)(A_m + i)^{-1}\varphi. \tag{X.105}$$

Это выражение имеет смысл, если $(A_m + i)^{-1}\varphi$ принадлежит и $D(A_n)$, и $D(A_m)$. Значит, если m и n фиксированы и мы хотим, чтобы (X.105) выполнялось на плотном множестве, мы должны потребовать, чтобы $D_{n,m} = (A_m + i)[D(A_n) \cap D(A_m)]$ было плотно.

Далее, если мы хотим перейти к пределу (X.105) при фиксированном φ, мы должны потребовать, чтобы $\varphi \in \bigcap D_{n,m}$. Значит, равенством (X.105) нельзя воспользоваться, если $\bigcap D_{n,m}$ не плотно. Если же такое условие регулярности выполнено, то сходимость резольвенты можно доказать, когда $A_n - A_m$ и $(A_m \pm i)^{-1}$ оцениваются равномерно, например в терминах вспомогательного самосопряженного оператора:

Теорема X.64. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность самосопряженных операторов с общей существенной областью определения D_0. Пусть N — строго положительный самосопряженный оператор, такой, что при некоторых $\alpha > 0$, $\beta > 0$

(i) $\mathscr{D}^{\pm} = \bigcap\limits_n (\operatorname{Ran}(A_n \pm i) \upharpoonright D_0)$ плотны и $\mathscr{D}^{\pm} \subset D(N^{\alpha})$;

(ii) $\|N^{\beta}(A_n \pm i)^{-1} N^{-\alpha}\| \leqslant M$ при всех n;

(iii) N^{β} в существенном самосопряжен на D_0 и

$$\|N^{-\beta}(A_n - A_m) N^{-\beta}\| \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Тогда $\{(A_n \pm i)^{-1}\varphi\}$ при всяком $\varphi \in \mathscr{H}$ есть последовательность Коши в $\mathscr{H}$.

Доказательство. Пусть $\chi \in \mathscr{D}^{+}$. Положим $\varphi_n = (A_n + i)^{-1}\chi$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 &= (\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) = \\
&= \operatorname{Im}(\varphi_n - \varphi_m, (A_n + i)(\varphi_n - \varphi_m)) \leqslant \\
&\leqslant |(\varphi_n - \varphi_m, (A_n + i)(\varphi_n - \varphi_m))| = \\
&= |(\varphi_n - \varphi_m, (A_m - A_n)\varphi_m)| = \\
&= |(N^{\beta}(\varphi_n - \varphi_m), N^{-\beta}(A_m - A_n) N^{-\beta} N^{\beta}\varphi_m)| \leqslant \\
&\leqslant (2 \sup_k \|N^{\beta}(A_k + i)^{-1} N^{-\alpha} N^{\alpha}\chi\|^2) \|N^{-\beta}(A_m - A_n) N^{-\beta}\| \leqslant \\
&\leqslant 2M^2 \|N^{\alpha}\chi\|^2 \|N^{-\beta}(A_m - A_n) N^{-\beta}\| \to \\
&\to 0 \text{ при } n, m \to \infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, $(A_n + i)^{-1}$ — последовательность Коши в сильном смысле на $\mathscr{D}^{+}$. Поскольку $\mathscr{D}^{+}$ плотно и $\{(A_n + i)^{-1}\}$ равномерно ограничена, $(A_n + i)^{-1}\varphi$ сходится при всех $\varphi \in \mathscr{H}$. Доказательство для $(A_n - i)^{-1}$ такое же. ∎

Пример (ангармонический осциллятор, пятое доказательство). Пусть

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)$$

в $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$ и $V = x^4$. В обозначениях примера 2 из § X.6 $H_0 = A^{\dagger}A + 1/2$ и $V = {}^1/_4 (A + A^{\dagger})^4$. Пусть E_n — спектральный проектор H_0, отвечающий интервалу $[0, n]$. Область значений E_n

конечномерна и порождается n первыми функциями Эрмита. Выберем в качестве D_0 множество конечных линейных комбинаций функций Эрмита и положим $A_n = N + V_n$, где $V_n = E_n V E_n$ и $N = H_0$. Мы покажем, что A_n, N и D_0 удовлетворяют условиям теоремы X.64 с $\beta = 2$ и $\alpha = 1$. Множество D_0 есть существенная область для H_0 и, поскольку каждый $E_n V E_n$ ограничен, D_0 — общая существенная область для $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Чтобы доказать (i), заметим, что $\operatorname{Ran}[(A_n \pm i) \restriction (E_n \mathscr{H})] = E_n \mathscr{H}$, так как A_n оставляет $E_n \mathscr{H}$ инвариантным, $A_n \restriction E_n \mathscr{H}$ самосопряжен и $E_n \mathscr{H}$ конечномерно. С другой стороны, спектральная теорема показывает, что $\operatorname{Ran}[(A_n \pm i) \restriction (D_0 \cap (I - E_n) \mathscr{H})] = D_0 \cap (I - E_n) \mathscr{H}$, так как $A_n = H_0$ на $(I - E_n) \mathscr{H}$. Итак, $\operatorname{Ran}(A_n \pm i) \restriction D_0 \supset D_0$. Обратное включение выполняется тривиально, так что $\mathscr{D}^{\pm} = \bigcap_n \operatorname{Ran}(A_n \pm i) \restriction D_0 = D_0$. Далее, в силу спектральной теоремы, все степени $N = H_0$ самосопряжены в существенном на D_0. Оценка в (iii) немедленно следует из того, что $V = {}^1/_4 (A^\dagger + A)^4$, и из оценок (X.61). Остается доказать оценку в (ii), т. е. что для $\varphi \in D_0$

$$\| N^2 (A_n \pm i)^{-1} N^{-1} \varphi \| \leqslant M \| \varphi \|, \tag{X.106}$$

или, иначе говоря, что

$$N^4 \leqslant M_1 (A_n \mp i) N^2 (A_n \pm i) + M_2 \tag{X.107}$$

в смысле квадратичных форм на D_0. Чтобы доказать (X.107), проделаем следующее разложение:

$$\begin{aligned}
(A_n \mp i) N^2 (A_n \pm i) &= (N + V_n \mp i) N^2 (N + V_n \pm i) = \\
&= N^4 + V_n N^3 + N^3 V_n + (V_n \mp i) N^2 (V_n \pm i) = \\
&= N^4 + N^{3/2} V_n N^{3/2} + [N^{3/2}, [N^{3/2}, V_n]] + \\
&\quad + (V_n \mp i) N^2 (V_n \pm i) \geqslant \\
&\geqslant N^4 + [N^{3/2}, [N^{3/2}, V_n]],
\end{aligned} \tag{X.108}$$

где учтена положительность V_n и N. Пользуясь оценкой (X.61) и свойствами коммутации $A^\dagger$ и A, можно доказать (см. задачу 62), что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое b, что

$$\| [N^{3/2}, [N^{3/2}, V_n]] \varphi \| \leqslant \varepsilon \| N^4 \varphi \| + b \| \varphi \|$$

при всех $\varphi \in D_0$ и всех n. Выбирая ε столь малым, чтобы $2\varepsilon < 1$, можем заключить по теореме X.18, что

$$[N^{3/2}, [N^{3/2}, V_n]] \leqslant 2\varepsilon N^4 + M_2 \tag{X.109}$$

в смысле квадратичных форм на D_0. Из (X.108) и (X.109) следует (X.107), что и доказывает оценку в (ii).

Тем самым мы убедились, что для последовательности $H_0 + V_n$

выполнены условия теоремы X.64. Значит, $(H+V_n\pm i)^{-1}$ сильно сходится на $\mathscr{H}$. Далее, чтобы применить теорему X.63, следует только показать, что область $D^s_\infty=\{\psi \mid \langle\psi, \varphi\rangle\in\Gamma^s_\infty$ при каком-либо $\varphi\}$ плотна. В нашем случае это тривиально, так как для всех $\psi\in D_0$ имеем $(H_0+V_n)E_n\psi\longrightarrow H_0\psi+x^4\psi$. Следовательно, по теореме X.63, H_0+V_n сходится в сильном резольвентном смысле к самосопряженному оператору C, область определения которого содержит D_0, и $C\restriction D_0={}^1/_2(-d^2/dx^2+x^2)+x^4$.

Этот результат, носящий характер теоремы существования, сам по себе не слишком интересен, потому что из теоремы X.3 можно было немедленно заключить, что ${}^1/_2(-d^2/dx^2+x^2+2x^4)\restriction D_0$ имеет самосопряженное расширение. Однако следующее построение, опирающееся на резольвентную сходимость, позволяет доказать самосопряженность на $D(H_0)\cap D(x^4)$. Сначала, разлагая $(H_0+V_n)^2$, найдем, что

$$\begin{aligned}(H_0+V_n)^2&=H_0^2+V_n^2+H_0V_n+V_nH_0=\\&=H_0^2+V_n^2+2H_0^{1/2}V_nH_0^{1/2}+[H_0^{1/2},[H_0^{1/2},V_n]]\geqslant\\&\geqslant H_0^2+V_n^2+[H_0^{1/2},[H_0^{1/2},V_n]]\end{aligned}$$

в смысле квадратичных форм на D_0, ибо $V_n\geqslant 0$. Прием, подобный указанному в задаче 62 в связи с доказательством (X.109), может быть применен и для доказательства существования такой константы b (не зависящей от n), что при любом $\varepsilon>0$

$$0\leqslant\varepsilon H_0^2+[H_0^{1/2},[H_0^{1/2},V_n]]+b. \tag{X.110}$$

Значит, существуют такие постоянные c_1 и c_2, что для $\varphi\in D_0$ и для всех n

$$\|H_0\varphi\|^2+\|V_n\varphi\|^2\leqslant c_1\|(H_0+V_n)\varphi\|^2+c_2\|\varphi\|^2. \tag{X.111}$$

Пусть теперь $\psi\in D(C)$. Тогда $\psi=(C+i)^{-1}\chi$ для некоторого χ из $\mathscr{H}$. Положим $\psi_n=(H_0+V_n+i)^{-1}\chi$; тогда $\psi_n\longrightarrow\psi$. Значит, при всяком $\theta\in D_0$

$$|(V\theta,\psi)|\leqslant\|V\theta\|\|\psi-\psi_n\|+\|(V-V_n)\theta\|\|\psi_n\|+|(\theta,V_n\psi_n)|. \tag{X.112}$$

Но из (X.111) следует, что

$$\begin{aligned}\|V_n\psi_n\|&\leqslant d_1\|(H_0+V_n)\psi_n\|+d_2\|\psi_n\|\leqslant\\&\leqslant(d_1+d_2)\|(H_0+V_n+i)\psi_n\|=(d_1+d_2)\|\chi\|.\end{aligned}$$

Так как первые два члена в (X.112) стремятся к нулю при $n\longrightarrow\infty$, мы заключаем, что $|(V\theta,\psi)|\leqslant(d_1+d_2)\|\theta\|\|\chi\|$ при всех $\theta\in D_0$. Значит, $\psi\in D((V\restriction D_0)^*)=D(V)$, так что $D(C)\subset D(V)$. Аналогичное построение доказывает, что $D(C)\subset D(H_0)$. Следовательно, $C={}^1/_2(-d^2/dx^2+x^2)+x^4$ самосопряжен на $D(-d^2/dx^2+x^2)\cap D(x^4)$.

Этот пример отражает основные идеи доказательства самосопряженности гамильтониана $(\varphi^4)_2$-модели с пространственным обрезанием в квантовой теории поля. В случае теории поля доказательства оценок (X.109) и (X.110) труднее, но часто опираются на те же самые идеи (задача 62).

Обратимся теперь к задаче доказательства условия (ii) теоремы X.63. Поскольку часто бывает трудно прямо убедиться в его справедливости, полезно запастись одним следствием теоремы X.63. Но прежде дадим такое

Определение. Последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных самосопряженных операторов называется **плотно ограниченной**, если существует такое плотное множество $D_b \subset \mathscr{H}$, что при каждом $\psi \in D_b$ существует последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям

(i) $\psi_n \xrightarrow{\mathscr{H}} \psi$,

(ii) $\psi_n \in Q(A_n)$,

(iii) $\sup\limits_n (\psi_n, A_n\psi_n) < \infty$.

Теорема X.65. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность положительных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть

(i) $(A_n+1)^{-1}$ сильно сходится к R,

(ii) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотно ограничена.

Тогда существует такой самосопряженный оператор A, что $R=(A+1)^{-1}$ и $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле.

Доказательство. Пусть $B_n=(A_n+1)^{1/2}$. Тогда $B_n^{-2} \longrightarrow R$ сильно, и так как B_n^{-2} — равномерно ограниченные положительные операторы, то из непрерывности, в смысле функционального исчисления, квадратного корня (теорема VIII.20 и задача VI.14) следует, что $B_n^{-1} \longrightarrow R^{1/2}$ сильно. Если нам удастся показать, что существует подпоследовательность $\{B_{n_k}\}$ последовательности $\{B_n\}$, для которой граф-предел $\{B_{n_k}\}$ плотно определен, то мы сможем заключить, при помощи небольшой модификации теоремы X.63, что $R^{1/2}=B^{-1}$ с некоторым положительным самосопряженным B. Если мы затем положим $A=B^2-1$, мы получим равенство $R=(A+1)^{-1}$, доказывающее теорему.

Построим подпоследовательность $\{B_{n_k}\}$ следующим образом. Пусть $\{\psi^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — тотальное множество векторов в D_b. Поскольку $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотно ограничена, для каждого k найдется такая последовательность $\{\psi_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$, что $\psi_n^{(k)} \in Q(A_n)=D(B_n)$, $\psi_n^{(k)} \longrightarrow \psi^{(k)}$ и $\sup\limits_n \|B_n\psi_n^{(k)}\| < \infty$. Рассмотрим теперь последовательность $B_n\psi_n^{(1)}$.

Поскольку все $B_n\psi_n^{(1)}$ содержатся в фиксированном шаре в $\mathcal{H}$, можно найти слабо сходящуюся подпоследовательность $B_{n(1,j)}\psi_{n(1,j)}^{(1)}$ (так как все шары слабо секвенциально компактны). Выберем далее последовательность $\psi_{n(1,j)}^{(2)} \to \psi^{(2)}$ и извлечем из $B_{n(1,j)}$ такую подпоследовательность $B_{n(2,j)}$, что $B_{n(2,j)}\psi_{n(2,j)}^{(2)}$ слабо сходится. Действуя дальше таким способом и пользуясь приемом диагонализации, мы составим подпоследовательность $\{B_{n(j,j)}\}_{j=1}^{\infty}$, которая обладает тем свойством, что для каждого k существует такая последовательность $\psi_{n(j,j)}^{(k)}$, что $\psi_{n(j,j)}^{(k)} \in D(B_{n(j,j)})$, $\psi_{n(j,j)}^{(k)} \to \psi^{(k)}$ и $B_{n(j,j)}\psi_{n(j,j)}^{(k)}$ слабо сходится. Значит, каждый $\psi^{(k)}$ принадлежит D_{∞}^{w} для последовательности $B_{n(j,j)}$. Так как D_{b} плотно и $\{\psi^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ тотально в D_{b}, то D_{∞}^{w} плотно, что и доказывает (по теореме XIII.28) существование слабого граф-предела последовательности $\{B_{n(j,j)}\}_{j=1}^{\infty}$. ∎

Эта теорема была применена к доказательству существования гамильтониана с пространственным обрезанием в двумерной полевой теории со взаимодействием Юкавы. Детальное доказательство потребовало бы привлечения теории свободных фермионных полей и целого ряда довольно сложных оценок. Если же эти оценки уже получены, то идея состоит в следующем. Прежде всего рассматривается гамильтониан со взаимодействием $H(g, \varkappa) = H_0 + H_I(g, \varkappa)$, содержащий пространственное и ультрафиолетовое обрезания. Пространственное обрезание вводится так же, как и в теории поля с $(\varphi^4)_2$-взаимодействием, рассмотренной в § X.7. Ультрафиолетовое обрезание означает, что интегралы в пространстве импульсов, выражающие H_I через операторы рождения и уничтожения, берутся только по области $|k| \leqslant \varkappa$. Хотя $H(g, \varkappa)$ имеет смысл в пространстве Фока, $H(g, \varkappa)$ «расходится» при $\varkappa \to \infty$. Соображения формальной теории возмущений подсказывают, что $H(g, \varkappa)$ *должен* расходиться (!), так как мы ввели массу в свободной теории как некий свободный начальный параметр, а не как физически измеримую массу m в теории со взаимодействием, а также потому, что основное состояние системы без взаимодействия должно отличаться от основного состояния системы со взаимодействием на бесконечную энергию. Таким образом, теория возмущений предлагает рассматривать «правильный» гамильтониан в виде

$$H = H_0 + H_I - M - E, \qquad \text{(X.113)}$$

где E задается расходящимся интегралом, а M есть корректно определенный оператор, домноженный на другой расходящийся интеграл. И хотя H_I, M и E бесконечны в пространстве Фока, H в результате сокращения расходимостей оказывается корректно определенным. Если мы вводим пространственное и импульсное обрезание, как это описано выше, то H_0, $H_I(g, \varkappa)$, $M(g, \varkappa)$ и

$E(\varkappa)$ все конечны и определены в пространстве Фока и

$$H_{\text{ren}}(g, \varkappa) \equiv H_0 + H_I(g, \varkappa) - M(g, \varkappa) - E(\varkappa)$$

самосопряжен при всех $\varkappa$. Более того, можно показать, что $H_{\text{ren}}(g, \varkappa)$ равномерно по $\varkappa$ ограничен снизу некоторым C, что $(H_{\text{ren}}(g, \varkappa) - C + 1)^{-1}$ сильно сходится и что $\{H_{\text{ren}}(g, \varkappa_n)\}_{n=1}^{\infty}$ плотно ограничена. Следовательно, по теореме X.65, $H_{\text{ren}}(g, \varkappa)$ сходится в смысле равномерной резольвентной сходимости к самосопряженному оператору $H(g)$. Этот $H(g)$ и есть «правильный» гамильтониан с пространственным обрезанием. Пространственное обрезание может быть снято другими методами (см. гл. XIX).

X.11. Формула Фейнмана — Каца

Пусть H_0 — свободный квантовомеханический гамильтониан $-\Delta$, и пусть V — такой потенциал, что $-\Delta + V$ самосопряжен в существенном на $D(-\Delta) \cap D(V)$. Тогда формула Троттера говорит нам, как выразить $e^{-it(H_0+V)}$ в виде предела произведений $e^{-(it/n)H_0}$ и $e^{-(it/n)V}$ при $n \to \infty$. Так как мы имеем явное выражение для e^{itH_0} в виде интегрального оператора (см. (IX.31)):

$$(e^{-itH_0}f)(x) = \text{l.i.m.}\,(4\pi i t)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(\frac{i|x-y|^2}{4t}\right) f(y)\,dy, \quad (\text{X.114})$$

то мы можем выразить $e^{-it(H_0+V)}$ в виде предела интегральных операторов.

Теорема X.66. Пусть $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$(e^{-it(H_0+V)}f)(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4\pi i t}{n}\right)^{-3n/2} \int_{\mathbb{R}^3} \dots \int_{\mathbb{R}^3} \exp(iS_n(x_0, \dots, x_n, t)) \times$$
$$\times f(x_n)\,dx_n \dots dx_1, \quad (\text{X.115})$$

где

$$S_n(x_0, x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{t}{n}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{|x_i - x_{i-1}|}{t/n}\right)^2 - V(x_i)\right].$$

(Все интегралы берутся в смысле $\int_{\mathbb{R}^3} = \lim_{m\to\infty} \int_{|x| \le m}$, а все пределы берутся в смысле L^2.)

Доказательство. Так как $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$, то $H_0 + V$ самосопряжен на $D(H_0)$ (теорема X.15), и поэтому применима формула Троттера (теорема VIII.30):

$$e^{-it(H_0+V)}f = \lim_{n\to\infty} (e^{-(it/n)H_0} e^{-(it/n)V})^n f.$$