$E(\varkappa)$ все конечны и определены в пространстве Фока и

$$H_{\text{ren}}(g, \varkappa) \equiv H_0 + H_I(g, \varkappa) - M(g, \varkappa) - E(\varkappa)$$

самосопряжен при всех $\varkappa$. Более того, можно показать, что $H_{\text{ren}}(g, \varkappa)$ равномерно по $\varkappa$ ограничен снизу некоторым C, что $(H_{\text{ren}}(g, \varkappa) - C + 1)^{-1}$ сильно сходится и что $\{H_{\text{ren}}(g, \varkappa_n)\}_{n=1}^{\infty}$ плотно ограничена. Следовательно, по теореме X.65, $H_{\text{ren}}(g, \varkappa)$ сходится в смысле равномерной резольвентной сходимости к самосопряженному оператору $H(g)$. Этот $H(g)$ и есть «правильный» гамильтониан с пространственным обрезанием. Пространственное обрезание может быть снято другими методами (см. гл. XIX).

X.11. Формула Фейнмана — Каца

Пусть H_0 — свободный квантовомеханический гамильтониан $-\Delta$, и пусть V — такой потенциал, что $-\Delta + V$ самосопряжен в существенном на $D(-\Delta) \cap D(V)$. Тогда формула Троттера говорит нам, как выразить $e^{-it(H_0+V)}$ в виде предела произведений $e^{-(it/n)H_0}$ и $e^{-(it/n)V}$ при $n \to \infty$. Так как мы имеем явное выражение для e^{itH_0} в виде интегрального оператора (см. (IX.31)):

$$(e^{-itH_0}f)(x) = \text{l.i.m.}\,(4\pi i t)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(\frac{i|x-y|^2}{4t}\right) f(y)\,dy, \quad (\text{X}.114)$$

то мы можем выразить $e^{-it(H_0+V)}$ в виде предела интегральных операторов.

Теорема X.66. Пусть $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$(e^{-it(H_0+V)}f)(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4\pi i t}{n}\right)^{-3n/2} \int_{\mathbb{R}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \exp(iS_n(x_0, \ldots, x_n, t)) \times$$
$$\times f(x_n)\,dx_n \ldots dx_1, \quad (\text{X}.115)$$

где

$$S_n(x_0, x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{t}{n}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{|x_i - x_{i-1}|}{t/n}\right)^2 - V(x_i)\right].$$

(Все интегралы берутся в смысле $\int_{\mathbb{R}^3} = \lim_{m\to\infty} \int_{|x|\leqslant m}$, а все пределы берутся в смысле L^2.)

Доказательство. Так как $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$, то $H_0 + V$ самосопряжен на $D(H_0)$ (теорема X.15), и поэтому применима формула Троттера (теорема VIII.30):

$$e^{-it(H_0+V)}f = \lim_{n\to\infty} (e^{-(it/n)H_0} e^{-(it/n)V})^n f.$$

Подстановка явных выражений для $e^{-i(t/n)H_0}$ и $e^{-i(t/n)V}$ завершает доказательство. ∎

Формула (X.115) была установлена Фейнманом в 1948 г. на основе физической интерпретации. Если классическая частица с массой m движется в потенциале V, то говорят, что гладкому пути $\omega(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, отвечает **действие**, равное

$$S(\omega) = \int_0^t \left(\frac{m}{2}|\dot{\omega}(s)|^2 - V(\omega(s))\right) ds. \tag{X.116}$$

Принцип наименьшего действия Лагранжа утверждает, что классическая частица двигается по пути, отвечающему наименьшему значению действия, т. е. классический путь удовлетворяет уравнению Эйлера—Лагранжа

$$m\ddot{\omega}(t) = -\nabla V(\omega(t)),$$

соответствующему (X.116).

Чтобы понять, как интерпретировать (X.115) в терминах действия, возьмем $m = 1/2$, чтобы было $H_0 = -(2m)^{-1}\Delta = -\Delta$. Для данных $x_0, x_1, \ldots, x_n$ рассмотрим классическую частицу с массой 1/2, двигающуюся по ломаной (рис. X.7) с постоянной скоростью на каждом сегменте. Классическое действие для этого пути есть

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{t}{n}\right)\frac{1}{4}\left(\frac{|x_i - x_{i-1}|}{t/n}\right)^2 - \int_0^t V(\omega(t))\,dt,$$

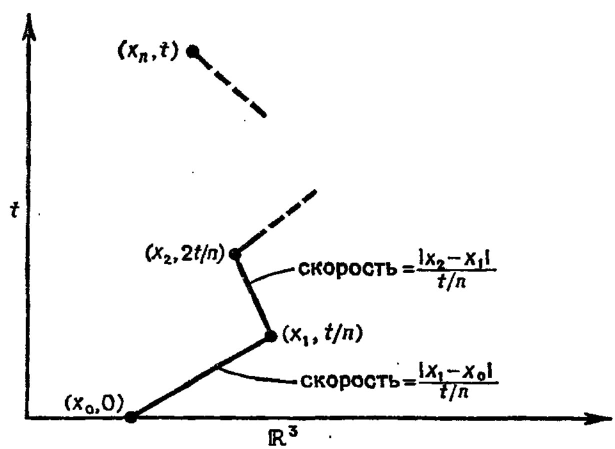

Рис. X.7. Кусочно-линейный путь между x_0 и x_n.

что приближенно равно

$$S_n(x_0, x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t}{n}\right) \left[\frac{1}{4}\left(\frac{|x_i - x_{i-1}|}{t/n}\right)^2 - V(x_i)\right],$$

если V непрерывна, а точки $x_0, \ldots, x_n$ выбраны достаточно близко друг к другу. Значит,

$$(4\pi i t/n)^{-3n/2} \int \ldots \int e^{iS_n(x_0, \ldots, x_n, t)} f(x_n)\, dx_n\, dx_{n-1} \ldots dx_1$$

можно понимать как интеграл по всем ломаным, где S_n аппроксимирует действие классической частицы, двигающейся по пути, изображенному на рис. X.7. Интуитивно ясно, что при $n \to \infty$ множество ломаных становится множеством всех путей, и для данного пути ω действие $S_n(x_0, \ldots, x_n, t)$ приближается к $S(\omega)$, если $\omega(0) = x_0$, $\omega(t) = x_n$ и все x_i лежат на ω. Итак, интуитивно кажется, что для $(e^{-it(H_0+V)} f)(x_0)$ можно найти формулу типа

$$(e^{-it(H_0+V)} f)(x_0) = \int_{\Omega_{x_0}} e^{iS(\omega)} f(\omega(t))\, d\omega, \qquad (X.117)$$

где Ω_{x_0} есть множество всех путей с $\omega(0) = x_0$, $S(\omega)$ — классическое действие на пути ω и $d\omega$ — мера на Ω_{x_0}. Пользуясь этой формулой, можно очень естественно перейти к классическому пределу. Если мы восстановим в гамильтониане постоянную Планка, то формула станет такой:

$$(e^{(-it/\hbar)(H_0+V)} f)(x_0) = \int_{\Omega_{x_0}} e^{iS(\omega)/\hbar} f(\omega(t))\, d\omega. \qquad (X.118)$$

Если мы теперь перейдем к классическому пределу, устремив $\hbar$ к нулю, то осциллирующие фазы в $e^{iS(\omega)/\hbar}$ будут взаимно сокращаться всюду, кроме как вокруг тех путей, на которых действие $S(\omega)$ стационарно. Это означает, что наибольший вклад в динамику при $\hbar \to 0$ вносят пути, ближайшие к классическим.

Это рассуждение поясняет, в чем прелесть эвристической формулы (X.117). Существует математическое понятие интегрирования по путям, введенное Винером, однако, к сожалению, это понятие *нельзя* применить для придания смысла правой части (X.118). Но им можно воспользоваться, чтобы вывести аналогичную формулу для $(e^{-t(H_0+V)} f)(x_0)$, называемую формулой Фейнмана — Каца. Прежде чем вывести ее, мы должны обсудить меру Винера. Наше построение меры Винера (которое мы выполним, так сказать, «голыми руками») является наиболее прямым. Подчеркнем, что существует и другой подход, основанный на гауссовых случайных переменных и теории марковских процессов. Такой более естественный подход позволяет накопить интуицию, бесценную для дальнейшего развития теории, однако необходимость вводить вероятностный аппарат увела бы нас сейчас слишком далеко от цели. В то же время мы чувствуем, что обсуждение существования динамики было бы неполно без формулы Фейнмана—Каца.

Чтобы пояснить нашу конструкцию винеровой меры на $\mathbb{R}^n$, заметим сначала, что, как это видно из формулы Троттера, для подходящего V

$$e^{-t(H_0+V)}f = \lim_{m\to\infty} (e^{-(t/m)H_0} e^{-(t/m)V})^m f,$$

причем

$$(e^{-(t/m)H_0} e^{-(t/m)V})^m f = \int \dots \int p\left(x_0, x_1; \frac{t}{m}\right) e^{-(t/m)V(x_1)} \dots$$
$$\dots p\left(x_{m-1}, x_m; \frac{t}{m}\right) e^{-(t/m)V(x_m)} f(x_m)\, dx_1 \dots dx_m, \qquad \text{(X.119)}$$

где

$$p(x, y; t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x-y|^2/4t}.$$

Есть две проблемы, связанные с переходом к бесконечному m в правой части (X.119). Первая состоит в том, что бесконечное произведение мер Лебега не дает никакой разумной меры. Вторая—та, что произведение ядер p в интуитивном смысле стремится к

$$\exp\left(-\int \dot\omega(t)^2\, dt\right), \qquad \text{(X.120)}$$

а для произвольных путей $\dot\omega(t)$ весьма сингулярна. По счастью, эти две трудности при их совместном рассмотрении взаимно уничтожаются. Поэтому наш план состоит в том, чтобы построить меру μ_{x_0} в пространстве путей, начинающихся в x_0, так, чтобы правая часть (X.119) равнялась бы именно

$$\int_\Omega \prod_{j=1}^{m} e^{-(t/m)V(\omega(jt/m))}\, d\mu_{x_0}(\omega). \qquad \text{(X.121)}$$

Поскольку величина (X.120), равная «нулю», служит делу сокращения «бесконечности» в бесконечном произведении лебеговых мер, то не удивительно, что процедура определения (X.121) не проходит, если (X.120) заменяется на $\exp\left(-i\int \dot\omega(t)^2\, dt\right)$. В этом можно убедиться непосредственно (задача 64). После этих пояснений перейдем к построению меры Винера.

Пусть $\dot{\mathbb{R}}^n$ есть одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$, и пусть $\Omega = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{0\leqslant t} \dot{\mathbb{R}}^n$—произведение несчетного множества экземпляров $\dot{\mathbb{R}}^n$. Тогда Ω есть в точности множество всех путей в $\dot{\mathbb{R}}^n$ при $t \geqslant 0$; это такие же пути, что и в $\mathbb{R}^n$, с той лишь разницей, что они могут проходить через бесконечность. Мы всегда будем рассматривать Ω с топологией произведения; при этом оно будет компактным хаусдорфовым пространством в силу теоремы Тихонова. Это пространство столь обширно, что борелевы и бэровы множества в нем различаются. Мы будем рассматривать только регулярные борелевы меры. Пусть теперь $F(x_1, \ldots, x_m)$ — непрерывная функция на $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{m} \mathbb{R}^n$. Фиксируем $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_m$. Тогда $\varphi(\omega) = F(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_m))$ есть непрерывная функция на Ω. Обозначим множество таких непрерывных функций на Ω для произвольного m через $C_{\text{fin}}(\Omega)$ и для таких φ *определим* функционал

$$L_{x_0}(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \ldots \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(x_1, \ldots, x_m)\, p(x_0, x_1; t_1)\, p(x_1, x_2; t_2 - t_1) \ldots$$
$$\ldots p(x_{m-1}, x_m; t_m - t_{m-1})\, dx_1 \ldots dx_m. \qquad (X.122)$$

Это корректно определенный линейный функционал на $C_{\text{fin}}(\Omega)$, так как если F не зависит от x_k, то можно воспользоваться полугрупповым свойством уравнения теплопроводности

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} p(x_{k-1}, x_k; t_k - t_{k-1})\, p(x_k, x_{k+1}; t_{k+1} - t_k)\, dx_k =$$
$$= p(x_{k-1}, x_{k+1}; t_{k+1} - t_{k-1})$$

и проинтегрировать по переменной x_k. Итак, $L_{x_0}(\varphi)$ не зависит от представления для φ. Далее, $L_{x_0}(1) = 1$ и $L_{x_0}(\varphi) \geqslant 0$, если $\varphi \geqslant 0$, так как p положительно. Следовательно, в силу предложения перед теоремой IV.14,

$$|L_{x_0}(\varphi)| \leqslant \sup_{\omega \in \Omega} |\varphi(\omega)|.$$

Значит, L_{x_0} — положительный линейный функционал с единичной нормой на $C_{\text{fin}}(\Omega)$. Но по теореме Стоуна — Вейерштрасса $C_{\text{fin}}(\Omega)$ плотно в $C(\Omega)$, так что L_{x_0} имеет единственное продолжение, которое мы тоже будем обозначать L_{x_0}, до положительного линейного функционала с единичной нормой на $C(\Omega)$. Наконец, по теореме Рисса — Маркова существует единственная регулярная мера Бореля μ_{x_0} на Ω, такая, что $\mu_{x_0}(\Omega) = 1$ и

$$L_{x_0}(\varphi) = \int\limits_{\Omega} \varphi\, d\mu_{x_0} \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C(\Omega).$$

При каждом x_0 мера μ_{x_0} называется **мерой Винера** на Ω. Иногда так называется все семейство мер $\{\mu'_x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Мера, которую мы построили, борелева. Многие интересные множества путей оказываются борелевыми подмножествами Ω. Так, например, имеет место следующая

Лемма. При $0<\alpha\leqslant 1$ множество Ω_α путей, непрерывных по Гёльдеру порядка α, есть борелево подмножество в Ω.

Доказательство. Путь ω принадлежит Ω_α тогда и только тогда, когда для всех $m<\infty$ существует такое M, что

$$|\omega(s)-\omega(t)|\leqslant M|s-t|^\alpha, \qquad 0\leqslant s,\ t\leqslant m.$$

Следовательно,

$$\Omega_\alpha=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{0\leqslant s,\,t\leqslant m}\left\{\omega\,\middle|\,|\omega(s)-\omega(t)|\leqslant n|s-t|^\alpha\right\}.$$

Поскольку $\left\{\omega\,\middle|\,|\omega(s)-\omega(t)|\leqslant n|s-t|^\alpha\right\}$ замкнуто, а произвольные пересечения замкнутых множеств замкнуты, то Ω_α борелево, ибо две последние операции счетны. ∎

Следующая теорема показывает, что мера μ_{x_0}, построенная на слишком обширном пространстве Ω, имеет носитель на непрерывных путях, но не на непрерывно дифференцируемых путях. Ссылки на литературу см. в Замечаниях.

Теорема X.67. Если $0<\alpha<1/2$, то $\mu_{x_0}(\Omega_\alpha)=1$ при всех $x_0\in\mathbb{R}^n$. Если $1/2\leqslant\alpha\leqslant 1$, то $\mu_{x_0}(\Omega_\alpha)=0$ при всех $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Мы сформулировали теорему X.67 потому, что она нужна для доказательства (намеченного в задаче 65) следующей леммы:

Лемма. Пусть S — борелево множество нулевой лебеговой меры в $\mathbb{R}^n$, и пусть Ω_S — множество таких путей в Ω_α, что $\{t\,|\,\omega(t)\in S\}$ имеет меру Лебега нуль. Тогда $\mu_x\{\Omega_S\}=1$ для всякого $x\in\mathbb{R}^n$.

Вернемся теперь к обсуждению полугрупп e^{-tH_0} и $e^{-t(H_0+V)}$. По построению μ_x мы знаем, что для всякой непрерывной функции f на $\mathbb{R}^n$ при фиксированном $\alpha\in(0,1/2)$ выполняется равенство

$$\int_{\Omega_\alpha} f(\omega(t))\,d\mu_x(\omega)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,p(x,y;t)\,dy. \qquad \text{(X.123)}$$

Если f — любая измеримая функция на $\mathbb{R}^n$, такая, что интегрируема $f(\cdot)\,p(x,\cdot;t)$, можно аппроксимировать f непрерывными функциями. Тогда, применяя теорему о мажорированной сходимости, убедимся, что (X.123) выполняется и для таких f. В частности, (X.123) выполняется для всех $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Но по (IX.31) правая часть (X.123) есть в точности $(e^{-tH_0}f)(x)$, поэтому мы получаем

$$(e^{-tH_0}f)(x)=\int_\Omega f(\omega(t))\,d\mu_x(\omega) \quad \text{при всех} \quad f\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Это интеграл по путям, который задает свободную полугруппу. Установим теперь формулы интегрирования по путям в $\mathbb{R}^3$ при наличии взаимодействия. Заменяя L^2 на L^p, $p > n/2$, легко получить формулу Фейнмана—Каца на $\mathbb{R}^n$.

Теорема X.68 (формула Фейнмана—Каца). Пусть V—вещественнозначная функция в $L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$, и пусть $H=H_0+V$, где $H_0=-\Delta$. Тогда для всех $f\in L^2(\mathbb{R}^3)$

$$(e^{-tH} f)(x)=\int_{\Omega_\alpha} f(\omega(t))\exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))\,ds\right)d\mu_x(\omega). \quad (X.124)$$

Доказательство. Разобьем доказательство на четыре этапа. Сначала докажем эту формулу для непрерывных V с компактным носителем, затем для V из $L^\infty(\mathbb{R}^3)$, далее для $V\in L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $V\leqslant 0$, и, наконец, для V общего вида. Итак, допустим, что V непрерывна и имеет компактный носитель. Пользуясь (X.119) и (X.122), получим

$$\begin{aligned}
&[(e^{-(t/m)H_0}e^{-(t/m)V})^m f](x)=\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^3}\dots\int_{\mathbb{R}^3} p(x, x_m; t/m)\dots p(x_2, x_1; t/m)\cdot\\
&\quad\quad\cdot f(x_1)\exp\left(-\sum_{j=1}^m \frac{t}{m}V(x_j)\right)dx_1\dots dx_m=\\
&\quad=\int_{\Omega_\alpha}\exp\left(-\frac{t}{m}\sum_{j=1}^m V\left(\omega\left(\frac{jt}{m}\right)\right)\right)f(\omega(t))\,d\mu_x(\omega). \quad (X.125)
\end{aligned}$$

В силу допущения о V оператор H_0+V самосопряжен на $D(H)=D(H_0)\cap D(V)$, так что по формуле Троттера для произведения $(e^{-(t/m)H_0}e^{-(t/m)V})^m f$ сходится к $e^{-tH}f$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$. Значит, существует такая подпоследовательность $\{m_j\}$, что $(e^{-(t/m_j)H_0}e^{-(t/m_j)V})^{m_j} f$ сходится к $e^{-tH}f$ почти всюду. С другой стороны, если ω—непрерывный путь, то $V(\omega(t))$ непрерывно по t и

$$\frac{t}{m}\sum_{j=1}^m V\left(\omega\left(\frac{jt}{m}\right)\right)\to\int_0^t V(\omega(s))\,ds$$

при $m\to\infty$. Так как для всякого x почти все (относительно μ_x) пути непрерывны, то

$$f(\omega(t))\exp\left(-\frac{t}{m}\sum_{j=1}^m V\left(\omega\left(\frac{jt}{m}\right)\right)\right)\to f(\omega(t))\exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))\,ds\right)$$

поточечно почти всюду на Ω_α при $m \to \infty$. Далее,

$$\int_{\Omega_\alpha} \left| f(\omega(t)) \exp\left(-\frac{t}{m}\sum_{j=1}^{m} V\left(\omega\left(\frac{jt}{m}\right)\right)\right)\right| d\mu_x(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant e^{t \max |V|} \int_{\Omega_\alpha} |f(\omega(t))|\, d\mu_x(\omega) = e^{t\max |V|}(e^{-tH_0}|f|)(x) < \infty$$

при почти всех x. Следовательно, по теореме о мажорированной сходимости правая часть (X.125) сходится к

$$\int_{\Omega} f(\omega(t)) \exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))\,ds\right) d\mu_x(\omega)$$

при почти всех x. Это доказывает (X.124) в предположении, что V непрерывна и имеет компактный носитель.

Допустим теперь, что $V \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, и пусть V_n — последовательность непрерывных функций с компактным носителем, таких, что $|V_n(x)| \leqslant \|V\|_\infty$ для всех x и $V_n(x) \to V(x)$ поточечно почти всюду. Тогда (H_0+V_n) сходится к H_0+V в сильном резольвентном смысле, так что, по теореме VIII.20, $e^{-t(H_0+V_n)}$ сильно сходится к $e^{-t(H_0+V)}$ при каждом $t \geqslant 0$. По первому шагу доказательства

$$(e^{-t(H_0+V_n)} f)(x) = \int_{\Omega_\alpha} f(\omega(t)) \exp\left(-\int_0^t V_n(\omega(s))\,ds\right) d\mu_x(\omega) \qquad \text{(X.126)}$$

при почти всех x и всех n. Так как $V_n \to V$ поточечно почти всюду, то из леммы следует, что для почти всех $\omega \in \Omega_\alpha$

$$V_n(\omega(t)) \to V(\omega(t)) \text{ поточечно при почти всех } t.$$

Следовательно, так как V_n и V равномерно ограничены, $\int_0^t V_n(\omega(s))\,ds \to \int_0^t V(\omega(s))\,ds$ поточечно почти всюду в Ω_α. Итак,

$$f(\omega(t)) \exp\left(-\int_0^t V_n(\omega(s))\,ds\right) \to f(\omega(t)) \exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))\,ds\right)$$

поточечно почти всюду в Ω_α, и теперь теорема о мажорированной сходимости, так же как на первом шаге, позволяет заключить, что правая часть (X.126) сходится к правой части (X.124). С другой стороны, как и прежде, подпоследовательность из левой части (X.126) сходится поточечно почти всюду к $e^{-t(H_0+V)}f$ вследствие сильной сходимости. Значит, (X.124) выполнено и во втором случае.

Допустим теперь, что $V \in L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $V \leqslant 0$. Пусть $V_n(x) = \max\{V(x), -n\}$. Тогда V_n есть последовательность убывающих функций из L^∞, такая, что $V_n \xrightarrow{L^2+L^\infty} V$ и $V_n \longrightarrow V$ поточечно почти всюду. Для каждого n формула (X.124) выполнена, и при $n \longrightarrow \infty$ последовательность $\int\limits_0^t V_n(\omega(s))\,ds \longrightarrow \int\limits_0^t V(\omega(s))\,ds$ почти всюду в Ω_α согласно лемме и теореме о монотонной сходимости. Доказательство завершается при помощи тех же рассуждений, что и на втором шаге, и теоремы о монотонной сходимости.

С очевидными изменениями третий шаг может быть сделан и для функций, ограниченных сверху, поэтому, обращаясь еще раз к теореме о монотонной сходимости, завершаем доказательство в общем случае. ■

Если $V \in L^2 + L^\infty$, то из формулы Фейнмана—Каца следует, что

$$\int\limits_\Omega \exp\left(-\int\limits_0^t V(\omega(s))\,ds\right) f(\omega(t))\,d\mu_x(\omega) < \infty$$

при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$-\int\limits_0^t V(\omega(s))\,ds < \infty$$

для почти всех ω при почти всех x. Так как произвольную функцию $V \in L^2+L^\infty$ можно записать в виде линейной комбинации ее положительных и отрицательных частей, заключаем, что если $V \in L^2+L^\infty$, то

$$\int\limits_0^t |V(\omega(s))|\,ds < \infty$$

для почти всех ω при почти всех x.

X.12. Гамильтонианы, зависящие от времени

В этом разделе мы докажем две теоремы существования для уравнения Шредингера с зависящим от времени гамильтонианом

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\,\varphi(t). \qquad \text{(X.127)}$$

Исследование зависящих от времени задач важно потому, что в ряде случаев приходится рассчитывать изменение квантовой системы в таких ситуациях, когда внешний потенциал включается, а затем выключается через короткое время, или когда включается периодический потенциал. Мы начнем с введения аналога унитарной однопараметрической группы.