Допустим теперь, что $V \in L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $V \leqslant 0$. Пусть $V_n(x) = \max\{V(x), -n\}$. Тогда V_n есть последовательность убывающих функций из L^∞, такая, что $V_n \xrightarrow{L^2+L^\infty} V$ и $V_n \to V$ поточечно почти всюду. Для каждого n формула (X.124) выполнена, и при $n \to \infty$ последовательность $\int_0^t V_n(\omega(s))\,ds \to \int_0^t V(\omega(s))\,ds$ почти всюду в Ω_α согласно лемме и теореме о монотонной сходимости. Доказательство завершается при помощи тех же рассуждений, что и на втором шаге, и теоремы о монотонной сходимости.

С очевидными изменениями третий шаг может быть сделан и для функций, ограниченных сверху, поэтому, обращаясь еще раз к теореме о монотонной сходимости, завершаем доказательство в общем случае. ∎

Если $V \in L^2+L^\infty$, то из формулы Фейнмана—Каца следует, что

$$\int_\Omega \exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))\,ds\right) f(\omega(t))\,d\mu_x(\omega) < \infty$$

при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$-\int_0^t V(\omega(s))\,ds < \infty$$

для почти всех ω при почти всех x. Так как произвольную функцию $V \in L^2+L^\infty$ можно записать в виде линейной комбинации ее положительных и отрицательных частей, заключаем, что если $V \in L^2+L^\infty$, то

$$\int_0^t |V(\omega(s))|\,ds < \infty$$

для почти всех ω при почти всех x.

X.12. Гамильтонианы, зависящие от времени

В этом разделе мы докажем две теоремы существования для уравнения Шредингера с зависящим от времени гамильтонианом

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\,\varphi(t). \qquad \text{(X.127)}$$

Исследование зависящих от времени задач важно потому, что в ряде случаев приходится рассчитывать изменение квантовой системы в таких ситуациях, когда внешний потенциал включается, а затем выключается через короткое время, или когда включается периодический потенциал. Мы начнем с введения аналога унитарной однопараметрической группы.

Определение. Двухпараметрическое семейство унитарных операторов $U(s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям

(a) $U(r, s)U(s, t) = U(r, t)$,

(b) $U(t, t) = I$,

(c) $U(s, t)$ сильно непрерывен по совокупности переменных s и t,

называется **унитарным пропагатором.**

Теорема X.69 (разложение Дайсона). Пусть $t \mapsto H(t)$ — сильно непрерывное отображение $\mathbb{R}$ во множество *ограниченных* самосопряженных операторов на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда на $\mathcal{H}$ существует такой унитарный пропагатор, что для всех $\psi \in \mathcal{H}$

$$\varphi_s(t) = U(t, s)\psi$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(t) = -iH(t)\varphi_s(t), \qquad \varphi_s(s) = \psi. \tag{X.128}$$

Доказательство. Положим

$$U(t, s)\varphi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \int_s^t \int_s^{t_1} \dots \int_s^{t_{n-1}} H(t_1)\dots H(t_n)\varphi\, dt_n \dots dt_1. \tag{X.129}$$

В силу принципа равномерной ограниченности $H(\tau)$ равномерно ограничен на $[s, t]$, так что n-й член в правой части ограничен величиной

$$\frac{|t-s|^n}{n!}\left(\sup_{\tau \in [s, t]} \|H(\tau)\|\right)^n \|\varphi\|,$$

в силу чего ряд в правой части (X.129) сходится в равномерной операторной топологии к $U(t, s)$. Значит, $U(t, s)$ сильно непрерывен по совокупности переменных s и t, ибо это верно для каждого члена правой части. Убедиться в том, что $U(t, t) = I$ и $U(t, s)^* = U(s, t)$, совсем легко; формула $U(r, s)U(s, t) = U(r, t)$ доказывается перемножением рядов, как в случае унитарных групп, порождаемых ограниченными операторами. Следовательно,

$$U(s, t)U(s, t)^* = I = U(s, t)^* U(s, t),$$

так что $U(t, s)$ унитарен. Первое утверждение (X.128) получается почленным дифференцированием ряда для $U(t, s)$, если заметить, что результирующие ряды сходятся равномерно. ∎

Отметим, что самосопряженность $H(t)$ потребовалась только для доказательства унитарности $U(t, s)$; даже и без самосопряженности мы можем определить $U(t, s)$, как прежде, и применить его для построения сильных решений $\varphi_s(t)$.

Хотя для разложения Дайсона требуется, чтобы $H(t)$ был ограниченным, мы можем перейти к «представлению взаимодействия» и рассмотреть некоторые случаи, когда

$$H(t)=H_0+V(t),$$

где H_0—(возможно, неограниченный) самосопряженный оператор и $t\mapsto V(t)$ удовлетворяет условиям теоремы X.69. Определим

$$\tilde{V}(t)=e^{iH_0t}V(t)\,e^{-iH_0t}.$$

В этом случае $t\mapsto \tilde{V}(t)$ также удовлетворяет условиям теоремы X.69. Обозначим соответствующий пропагатор через $\tilde{U}(t, s)$. Если теперь положить

$$U(t, s)=e^{-itH_0}\tilde{U}(t, s)\,e^{isH_0},$$

то, по крайней мере *формально*, $U(t, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}U(t, s)=-iH_0e^{-itH_0}\tilde{U}(t, s)\,e^{isH_0}+e^{-itH_0}(-i\tilde{V}(t))\tilde{U}(t,s)\,e^{isH_0}=$$
$$=(-iH_0-iV(t))U(t, s),$$

так что $\varphi_s(t)=U(t, s)\psi$ должно быть сильным решением уравнения

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(t)=-i(H_0+V(t))\,\varphi_s(t),\qquad \varphi_s(s)=\psi.$$

Трудность состоит в том, что $H_0U(t, s)\psi=H_0e^{-itH_0}\tilde{U}(t, s)\,e^{isH_0}\psi$ может не иметь смысла, так как $\tilde{U}(t, s)\psi$ может не лежать в области определения H_0, даже когда ψ лежит в ней. Можно показать (задача 66), что если $t\mapsto[H_0, V(t)]$ сильно непрерывно, то $\varphi_s(t)$ есть на самом деле сильное решение. Это допущение есть частный случай более общих условий теоремы X.70 (ниже); последние приводят к сильным решениям, поэтому мы больше не будем обсуждать здесь эту проблему. Однако заметим, что $\psi_s(t)=e^{-iH_0t}\tilde{U}(t, s)\,e^{isH_0}\psi$ для любого $\psi\in\mathcal{H}$ всегда есть «слабое» решение в том смысле, что при любом $\eta\in D(H_0)$ функция $(\eta, \psi_s(t))$ дифференцируема и

$$\frac{d}{dt}(\eta,\ \psi_s(t))=-i(H_0\eta,\ \psi_s(t))-i(V(t)\,\eta,\ \psi_s(t)).$$

Пример 1. Разложение Дайсона важно также и для практических вычислений. Пусть H_0—гамильтониан некоторой квантовой системы и ψ_k, ψ_l—собственные функции H_0 с соответствующими собственными значениями λ_k и λ_l. Если система находится вначале в состоянии ψ_k, то в отсутствие какого-либо внешнего потенциала она останется в этом состоянии, так как $e^{itH_0}\psi_k=e^{i\lambda_kt}\psi_k$. Однако если на какое-то время включается внешний потенциал $V(t)$, то динамика задается законом $e^{-itH_0}\tilde{U}(t, 0)\psi_k$, и если нас интересует система в момент времени t, то вероятность того, что система будет наблюдена в состоянии ψ_l, равна $|(\psi_l, e^{-itH_0}\tilde{U}(t, 0)\psi_k)|^2$ — вероятности перехода из ψ_k в ψ_l. Применяя разложение Дайсона, находим

$$(\psi_l, e^{-itH_0}\tilde{U}(t, 0)\psi_k) = (\psi_l, e^{-itH_0}\psi_k) - i\int_0^t (\psi_l, e^{-itH_0}\tilde{V}(t_1)\psi_k)\,dt_1 + \ldots =$$

$$= -i\int_0^t e^{-i\lambda_l t} e^{-i(\lambda_k-\lambda_l)t_1}(\psi_l, V(t_1)\psi_k)\,dt_1 + O(t^2).$$

Для константы в члене порядка t^2 легко найти верхнюю границу путем оценки хвоста разложения Дайсона, так что для малых t полученное выражение позволяет сосчитать верхнюю и нижнюю границу вероятности перехода. Читателю предлагается рассчитать один специальный пример в задаче 67.

Мы пришли теперь к главной теореме этого раздела. Так как доказательство для случая, когда $A(t)$ порождает сжимающую полугруппу на банаховом пространстве X, такое же, мы и проведем его в этой более общей постановке. Идея доказательства очень проста и непосредственна. Для каждого целого положительного k определим приближенный пропагатор $U_k(t, s)$ на $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ равенством

$$U_k(t, s) = \exp\left(-(t-s)A\left(\frac{i-1}{k}\right)\right), \quad \text{если } \frac{i-1}{k} \leqslant s \leqslant t \leqslant \frac{i}{k}$$
$$(\text{где } 1 \leqslant i \leqslant k), \qquad (\text{X}.130\text{a})$$

и

$$U_k(t, r) = U_k(t, s)U_k(s, r), \qquad \text{если } 0 \leqslant r \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \quad (\text{X}.130\text{b})$$

Таким образом, $U_k(t, s)$ определен постоянным генератором $A((i-1)/k)$ при s и t в малых интервалах $[(i-1)/k, i/k]$ и формулой произведения, если обе переменные s и t не попадают в один малый интервал вместе. Мы покажем, что при соответствующих предположениях $U_k(t, s)$ сходится к такому пропагатору $U(t, s)$, что $\varphi_s(t) = U(t, s)\psi$ оказывается решением уравнения $d\varphi_s(t)/dt = -A(t)\varphi_s(t)$. Чтобы понять, какими должны быть эти дополнительные предположения, проведем формальное вычисление:

$$(U_k(t, 0) - U_n(t, 0))A(0)^{-1}\varphi = [U_n(t, s)U_k(s, 0)A(0)^{-1}\varphi]_{s=0}^{s=t} =$$

$$= \int_0^t \frac{d}{ds}(U_n(t, s)U_k(s, 0)A(0)^{-1}\varphi)\,ds =$$

$$= \int_0^t U_n(t, s)\left\{A\left(\frac{[ns]}{n}\right) - A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\right\} A\left(\frac{[ks]}{s}\right)^{-1} A\left(\frac{[ks]}{k}\right) \times$$
$$\times U_k(s, 0)A(0)^{-1}\varphi\,ds, \qquad (\text{X}.131)$$

где $[r]$ означает наибольшее целое, меньшее или равное r. То, что $A([ns]/n)$ может быть написано справа от $U_n(t, s)$, следует из записи $U_n(t, s)$ в виде произведения, когда t и s не попадают в один малый интервал. Следовательно, для того чтобы показать, что левая часть (X.131) мала, достаточно убедиться, что разность $A(t)A(s)^{-1}-I$ мала, когда мала $|t-s|$, и что $A(t)U_k(t, 0)A(s)^{-1}$ ограничено. Итак, определим

$$C(t, s)=A(t)A(s)^{-1}-I$$

и сформулируем такую теорему:

Теорема X.70. Пусть X — банахово пространство, и пусть J — открытый интервал в $\mathbb{R}$. При каждом $t \in J$ пусть $A(t)$ — генератор сжимающей полугруппы на X, такой, что $0 \in \rho(A(t))$ и

(a) Все $A(t)$ имеют общую область определения D (откуда в силу теоремы о замкнутом графике следует, что $A(t)A(s)^{-1}$ ограничено).

(b) При всяком $\varphi \in X$ величина $(t-s)^{-1}C(t, s)\varphi$ равномерно сильно непрерывна и равномерно ограничена по s и t, если $t \neq s$ и s и t лежат в любом фиксированном компактном подынтервале из J.

(c) При всяком $\varphi \in X$ существует $C(t)\varphi \equiv \lim\limits_{s \uparrow t}(t-s)^{-1}C(t, s)\varphi$ равномерно по t в каждом компактном подынтервале, и $C(t)$ ограничена и сильно непрерывна по t.

Тогда для всех $s \leqslant t$ в любом компактном подынтервале интервала J и любого $\varphi \in X$ существует

$$U(t, s)\varphi=\lim_{k\to\infty} U_k(t, s)\varphi$$

равномерно по s и t. Далее, если $\psi \in D$, то $\varphi_s(t) \equiv U(t, s)\psi$ лежит в D при всех t и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(t)=-A(t)\varphi_s(t), \qquad \varphi_s(s)=\psi,$$

причем $\|\varphi_s(t)\| \leqslant \|\psi\|$ при всех $t \geqslant s$.

Сделаем два замечания. Во-первых, допущение $0 \in \rho(A(t))$ обычно не является сильным ограничением. Если можно найти $z_0 \in \rho(A(t))$ при всех t и если операторы $B(t)=A(t)-z_0$ удовлетворяют этому допущению, то $\tilde{U}(t, s)=U(t, s)e^{(s-t)z_0}$ будет пропагатором для $A(t)$ всякий раз, когда $U(t, s)$ — пропагатор для $B(t)$. В частности, мы можем применить этот прием, когда $A(t)$ есть самосопряженный оператор, умноженный на i. Во-вторых, достаточно доказать существование пропагатора для $s, t \in [0, 1]$, поскольку тогда можно воспользоваться этим приемом, чтобы расширить его на $[1, 2]$, и т. д. Покажем сначала, что из сделанных допущений вытекает ограниченность оператора $A(t)\,U(t, s)\,A(s)^{-1}$.

Лемма. При $s, t \in [0, 1]$ положим $W_k(t, s) = A(t)\,U_k(t, s)\,A(s)^{-1}$. Тогда $\|W_k(t, s)\| \leqslant M_1$, где M_1 не зависит от s, t и k.

Доказательство. Фиксируем s, t и k. Поскольку $U_k(t, s)\colon D \to D$, оператор $W_k(t, s)$ корректно определен на X. Пусть $\psi \in X$; запишем $W_k(t, s)$ в виде

$$
\begin{aligned}
&W_k(t, s)\,\psi = \\
&= A(t)\,U_k\left(t, \frac{[kt]}{k}\right) U_k\left(\frac{[kt]}{k}, \frac{[kt]-1}{k}\right) \cdots U_k\left(\frac{[ks]+1}{k}, s\right) A(s)^{-1}\psi = \\
&= A(t)\,A\left(\frac{[kt]}{k}\right)^{-1} U_k\left(t, \frac{[kt]}{k}\right) A\left(\frac{[kt]}{k}\right) A\left(\frac{[kt]-1}{k}\right)^{-1} \cdots \\
&\qquad \cdots A\left(\frac{[ks]}{k}\right)^{-1} U_k\left(\frac{[ks]+1}{k}, s\right) A\left(\frac{[ks]}{k}\right) A(s)^{-1}\psi = \\
&= \left(I + C\left(t, \frac{[kt]}{k}\right)\right) \left\{ U_k(t, s) + \sum_{ku=[ks]+1}^{[kt]} U_k(t, u)\, C\left(u, u - \frac{1}{k}\right) U_k(u, s) + \right. \\
&+ \sum_{kv=[ks]+1}^{[kt]} U_k(t, v)\, C\left(v, v - \frac{1}{k}\right) \sum_{ku=[ks]+1}^{[kt]} U_k(v, u) \times \\
&\qquad \left. \times C\left(u, u - \frac{1}{k}\right) U_k(u, s) + \cdots \right\} \left(I + C\left(\frac{[ks]}{k}, s\right)\right) \psi = \\
&= \left(I + C\left(t, \frac{[tk]}{k}\right)\right) \{U_k(t, s) + W_k^1(t, s) + W_k^2(t, s) + \ldots\} \times \\
&\qquad \times \left(I + C\left(\frac{[ks]}{k}, s\right)\right) \psi,
\end{aligned}
$$

где

$$
W_k^1(t, s) = \sum_{ku=[ks]+1}^{[kt]} U_k(t, s)\, C\left(u, u - \frac{1}{k}\right) U_k(u, s)
$$

и

$$
W_k^{m+1}(t, s) = \sum_{ku=[ks]+1}^{[kt]} U_k(t, s)\, C\left(u, u - \frac{1}{k}\right) W_k^m(u, s). \qquad (X.132)
$$

Пусть

$$
M_2 = \sup_{t \neq s} \|(t-s)^{-1} C(t, s)\|.
$$

Тогда

$$
\left\| C\left(u, u - \frac{1}{k}\right) \psi \right\| \leqslant \frac{M_2}{k} \|\psi\|,
$$

так что из (X.132) получаем

$$
\|W_k^1(t, s)\,\psi\| \leqslant (t-s)\, M_2 \|\psi\| \quad \text{и} \quad \|W_k^m(t, s)\,\psi\| \leqslant \frac{(t-s)^m}{m!} M_2^m \|\psi\|.
$$

Следовательно,

$$\|W_k(t, s)\psi\| \leqslant \left(1+\frac{M_2}{k}\right)^2\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(t-s)^m}{m!}M_2^m\right)\|\psi\|.$$

Мы всякий раз пользовались тем, что $\|U_k(r_1, r_2)\psi\| \leqslant \|\psi\|$, поскольку каждый $A(t)$ порождает сжимающую полугруппу. ■

Доказательство теоремы X.70. Пусть $\varphi \in D$. Так как $U_k(r, s)\varphi \in D$ при $r \geqslant s$ и

$$U_k(t, s)\varphi = e^{-(t-[kt]/k)\,A([kt]/k)}U_k\left(\frac{[kt]}{k}, s\right)\varphi,$$

то $U_k(t, s)$ сильно дифференцируем по t везде, кроме точек $t=j/k$, поэтому, положив $A(0)\varphi=\psi$, получим

$$\frac{d}{dt}U_k(t, s)\varphi = -A\left(\frac{[kt]}{k}\right)U_k(t, s)\varphi =$$
$$= -A\left(\frac{[kt]}{k}\right)A(t)^{-1}A(t)U_k(t, s)A(s)^{-1}A(s)A(0)^{-1}\psi =$$
$$= -A\left(\frac{[kt]}{k}\right)A(t)^{-1}W_k(t, s)A(s)A(0)^{-1}\psi.$$

Следовательно, так как семейство $\|W_k(t, s)\|$ равномерно ограничено и $C(t, s)$ сильно непрерывна, мы видим, что $dU_k(t, s)\varphi/dt$ ограничена и сильно непрерывна везде, кроме точек $t=j/k$. Аналогичное доказательство показывает, что те же заключения имеют место для

$$\frac{d}{ds}U_k(t, s)\varphi = -U_k(t, s)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\varphi,$$

когда $s \neq j/k$. Значит, если $k>n$, то

$$(U_k(t, s)-U_n(t, s))A(0)^{-1}\psi = [U_n(t, r)U_k(r, s)]_{r=s}^{r=t}A(0)^{-1}\psi =$$
$$= \int_s^t \frac{d}{dr}\{U_n(t, r)U_k(r, s)A(0)^{-1}\psi\}\,dr =$$
$$= \int_s^t U_n(t, r)\left\{A\left(\frac{[rn]}{n}\right)-A\left(\frac{[rk]}{k}\right)\right\}\times$$
$$\times A\left(\frac{[rn]}{n}\right)^{-1}A\left(\frac{[rn]}{n}\right)U_k(r, s)A(0)^{-1}\psi\,dr =$$
$$= \int_s^t U_n(t, r)C\left(\frac{[rn]}{n}, \frac{[rk]}{k}\right)\left\{1+C\left(\frac{[rn]}{n}, r\right)\right\}\times$$
$$\times W_k(r, s)\{1+C(s, 0)\}\psi\,dr. \qquad \text{(X.133)}$$

Так как

$$\left\|C\left(\frac{[rk]}{k}, \frac{[rn]}{n}\right)\right\| \leqslant 2\left|\frac{[rk]}{k}-\frac{[rn]}{n}\right|\sup_{s\neq t}|t-s|^{-1}\|C(t, s)\|$$

и $U_n(t, r)$, $C([rn]/n, r)$, $C(s, 0)$ и $W_k(r, s)$ (по лемме) все равномерно ограничены независимо от r, s, t, n и k, то мы видим, что сильный предел $U_k(t, s)$ существует равномерно по t и s. Так как $U_k(t, s)$ равномерно ограничен, то

$$U(t, s)\varphi \equiv \lim_{k\to\infty} U_k(t, s)\varphi$$

существует при всех $\varphi \in X$ и $U(t, s)$ — ограниченная операторнозначная функция, равномерно сильно непрерывная по совокупности переменных. Заметим, что интеграл (X.133) есть на самом деле сумма интегралов по тем интервалам, где существует производная.

Аналогичное доказательство показывает, что предел

$$W(t, s)\varphi \equiv \lim_{k\to\infty} W_k(t, s)\varphi$$

существует равномерно по t и s и что $W(t, s)$ есть ограниченная операторнозначная функция, сильно непрерывная по совокупности переменных. Следовательно, если $\varphi \in D$, то $U_k(t, s)\varphi \longrightarrow U(t, s)\varphi$ и

$$A(t)U_k(t, s)\varphi = W_k(t, s)A(s)\varphi \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} W(t, s)A(s)\varphi.$$

Так как $A(t)$ замкнут, то отсюда следует, что $U(t, s)\varphi \in D$ и $A(t)U(t, s)\varphi = W(t, s)A(s)\varphi$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
\dot{U}(t, s)\varphi - \varphi &= \lim_{k\to\infty}(U_k(t, s)\varphi - \varphi) = \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_s^t \frac{d}{dr}U_k(r, s)\varphi\,dr = \\
&= \lim_{k\to\infty}\left\{-\int_s^t A\left(\frac{[rk]}{k}\right)U_k(r, s)\varphi\,dr\right\} = \\
&= -\lim_{k\to\infty}\int_s^t A\left(\frac{[rk]}{k}\right)A(r)^{-1}A(r)U_k(r, s)A(s)^{-1}A(s)\varphi\,dr = \\
&= -\int_s^t W(r, s)A(s)\varphi\,dr.
\end{aligned}$$

Так как $W(r, s)$ сильно непрерывен, то

$$\frac{d}{dt}U(t, s)\varphi = -W(t, s)A(s)\varphi = -A(t)U(t, s)\varphi,$$

что и завершает доказательство теоремы X.70. ∎

Пример 2. Легко применить этот результат к уравнению теплопроводности с источниками, зависящими от времени, и стоками, пропорциональными температуре. Пусть $q(x, t)$ — ограниченная вещественнозначная непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^{n+1}$, такая, что $\partial q(x, t)/\partial t$ ограничена. Пусть M — грань q. Положим

$$A(t) = -\Delta + q(x, t) + (M+1)$$

на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Из примеров 3 и 4 в § X.8 мы знаем, что $A(t)$ есть генератор сжимающей полугруппы на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ и что $D(A(t)) = D(-\Delta)$ при всех t. Читатель может легко проверить (задача 68), что вследствие допущений о $q+M+1$ выполнены условия теоремы X.70. Значит, для каждой $\psi \in D(-\Delta)$ существует такая функция $\tilde{\varphi}(x, t)$, что $\tilde{\varphi}(x, t) \in D(-\Delta)$ при всяком t и

$$\frac{d}{dt}\tilde{\varphi}(x, t) = \Delta\tilde{\varphi}(x, t) - q(x, t)\tilde{\varphi}(x, t) - (M+1)\tilde{\varphi}(x, t),$$
$$\tilde{\varphi}(x, 0) = \psi(x).$$

Положим теперь $\varphi(x, t) = e^{(M+1)t}\tilde{\varphi}(x, t)$; тогда $\varphi(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\varphi(x, t) = \Delta\varphi(x, t) - q(x, t)\varphi(x, t),$$
$$\varphi(x, 0) = \psi(x).$$

Заметим, что $U_k(t, s)$ сохраняет положительность при всяком k, так как является произведением сохраняющих положительность преобразований (см. пример 4 в § X.8). Значит, и $U(t, s)$, будучи сильным пределом $U_k(t, s)$, сохраняет положительность. Следовательно, если заданы любые неотрицательные начальные данные $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R})$, то решение $\varphi(x, t) = e^{(M+1)t}U(t, s)\psi$ будет оставаться неотрицательным в соответствии с нашими интуитивными представлениями о распространении тепла.

Применим теперь теорему X.70 в квантовомеханическом случае.

Теорема X.71. Пусть $H_0 = -\Delta$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$. Предположим, что $t \mapsto V_1(t)$ и $t \mapsto V_2(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции со значениями в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ соответственно. Пусть $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$. Положим $H(t) = H_0 + V(t)$. Тогда существует такой унитарный пропагатор $U(t, s)$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$, что $\varphi_s(t) = U(t, s)\psi$ сильно дифференцируема при всех $\psi \in D(H_0)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(t) = -iH(t)\varphi_s(t), \qquad \varphi_s(s) = \psi. \qquad \text{(X.134)}$$

Доказательство. Мы построим унитарный пропагатор для каждого конечного интервала $[-T, T]$. По теореме X.15 оператор $H_0+V(t)$ при всех t самосопряжен на $D(-\Delta)$. Далее, поскольку $V_1(t)$ и $V_2(t)$ равномерно ограничены по норме в L^2 и в L^∞ соответственно, можно найти такую постоянную $D \geqslant 0$, что $H_0+V(t)+D \geqslant 1/2$ при всех $t \in [-T, T]$. Поэтому $i(H_0+V(t)+D)$ и $-i(H_0+V(t)+D)$ порождают сжимающие полугруппы при каждом t и $[\pm i(H_0+V(t)+D)]^{-1}$ существует при $t \in [-T, T]$. Далее из предположений о $t \mapsto V_1(t)$ и о $t \mapsto V_2(t)$ следует, что $i(H_0+V(t)+D)$ и $-i(H_0+V(t)+D)$ удовлетворяют условиям (b) и (c) теоремы X.70. Пусть $U^+(t, s)$ и $U^-(t, s)$ — соответствующие пропагаторы. Поскольку U_k^+ и U_k^- унитарны при каждом k, U^+ и U^- тоже унитарны. Положим теперь

$$\tilde{U}(t, s) = \begin{cases} U^+(t, s), & s \leqslant t, \\ U^-(t, s), & t \leqslant s, \end{cases}$$

и

$$U(t, s) = e^{iD(t-s)}\tilde{U}(t, s). \blacksquare$$

В заключение опишем кратко метод Д. Хауленда превращения зависящей от времени задачи в задачу, не зависящую от времени. В классической механике уравнения Гамильтона для системы с гамильтоновой функцией $H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t)$ имеют вид

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad -\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{X.135}$$

Если H зависит от времени, то в такой системе энергия не сохраняется, но мы можем построить соответствующую систему, в которой энергия сохраняется, вводя t в качестве новой координаты, а энергию E внешнего источника — в качестве сопряженного ей импульса. Новый гамильтониан таков:

$$h(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, E) = E + H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t),$$

так что если мы обозначим новую временнýю переменную через σ, то гамильтоновы уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\frac{dq_i}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad -\frac{dp_i}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \\ &\frac{dt}{d\sigma} = \frac{\partial h}{\partial E} = 1, \qquad -\frac{dE}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \tag{X.136}$$

Эта система уравнений эквивалентна (X.135).

Так же можно переформулировать и квантовомеханическую задачу. Пусть $H(t)$ — семейство самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть $\mathscr{H}_1 = L^2(\mathbb{R}; \mathscr{H})$ — гильбертово пространство сильно измеримых функций $f(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{H}$, таких, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|^2_{\mathcal{H}}\, dt < \infty$. Если мы теперь определим h в $\mathcal{H}$ формулой

$$(hf)(t) = -i\frac{d}{dt} f(t) + H(t) f(t),$$

то (согласно классической аналогии) должно иметь место соответствие между решениями уравнения

$$\frac{d}{d\sigma}\varphi(\sigma) = -ih\varphi(\sigma)$$

в $\mathcal{H}_1$ и решениями зависящей от времени задачи (X.134) в $\mathcal{H}$. Допустим, что $U(t, s)$—унитарный пропагатор на $\mathcal{H}$. Тогда

$$(\hat{U}(\sigma) f)(t) \equiv U(t, t-\sigma) f(t-\sigma) \qquad \text{(X.137)}$$

является сильно непрерывной унитарной группой на $\mathcal{H}_1$ (задача 69). Это означает, что если T_σ—группа на $\mathcal{H}_1$, действующая как $(T_\sigma f)(t) = f(t+\sigma)$, то $\hat{U}(\sigma) T_\sigma$ действует на $\mathcal{H}_1$ как умножение на операторнозначную функцию. Обратно, можно показать, что всякой сильно непрерывной унитарной группе $\hat{U}(\sigma)$ на $\mathcal{H}$, такой, что $\hat{U}(\sigma) T_\sigma$ есть умножение на операторнозначную функцию, отвечает единственный унитарный пропагатор $U(t, s)$ на $\mathcal{H}$, такой, что выполняется (X.137). Итак, имеется соответствие между унитарными пропагаторами на $\mathcal{H}$ и некоторыми сильно непрерывными однопараметрическими унитарными группами на $\mathcal{H}_1$. Заметим, что $\hat{U}(\sigma)$ в силу теоремы Стоуна всегда окажется сильно дифференцируемой на плотном множестве в $\mathcal{H}_1$, но что $U(t, s)$ не обязательно сильно дифференцируема на $\mathcal{H}$. Значит, у нас есть метод доказательства существования пропагаторов в тех случаях, когда мы не можем ожидать сильной дифференцируемости, т. е. в случаях, когда неприменима теорема X.70. Этот пропагатор формально разрешает уравнение

$$\frac{d}{dt} U(t, s)\psi = -iH(t) U(t, s)\psi.$$

Пример 3. Рассмотрим еще раз случай $H(t) = H_0 + V(t)$, где H_0—самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, а $t \mapsto V(t)$—сильно непрерывное отображение из $\mathbb{R}$ во множество ограниченных операторов на $\mathcal{H}$. Для простоты предположим, что семейство $\{\|V(t)\|\}$ равномерно ограничено на всем $\mathbb{R}$. Как и прежде, положим $\tilde{V}(t) = e^{itH_0} V(t) e^{-itH_0}$. Пусть $\hat{\tilde{V}}$—оператор на $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$, действующий как $(\hat{\tilde{V}} f)(t) = \tilde{V}(t) f(t)$, и пусть $C_0^1(\mathbb{R}; \mathcal{H})$—пространство непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем и со значениями в $\mathscr{H}$. Тогда нетрудно убедиться, что $i^{-1}d/dt$ самосопряжен в существенном на $C_0^1(\mathbb{R}; \mathscr{H})$. Так как $\hat{\tilde{V}}$ — ограниченный оператор, то $i^{-1}d/dt + \hat{\tilde{V}}$ также самосопряжен в существенном на $C_0^1(\mathbb{R}; \mathscr{H})$ и можно показать, что $\exp(-i\sigma(i^{-1}d/dt + \hat{\tilde{V}}))T_\sigma$ действует как умножение на операторнозначную функцию. Следовательно, по упомянутой выше теореме о соответствии, существует сильно непрерывный пропагатор $\tilde{U}(t, s)$ на $\mathscr{H}$, такой, что

$$\left(\exp\left(-i\sigma\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dt} + \hat{\tilde{V}}\right)\right)f\right)(t) = \tilde{U}(t, t-\sigma)f(t-\sigma).$$

Легко убедиться в том, что это именно тот пропагатор, который появляется в результате применения разложения Дайсона к $t \mapsto \tilde{V}(t)$. Пусть теперь $\hat{W}$ действует на $L^2(\mathbb{R}; \mathscr{H})$ как $(\hat{W}f)(t) = e^{-iH_0 t}f(t)$. Тогда $\hat{W}$ унитарен, так что

$$\hat{W}\exp\left(-i\sigma\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dt} + \hat{\tilde{V}}\right)\right)\hat{W}^{-1}$$

есть опять сильно непрерывная унитарная группа на $L^2(\mathbb{R}; \mathscr{H})$ и очевидно, что

$$\left(\hat{W}\exp\left(-i\sigma\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dt} + \hat{\tilde{V}}\right)\right)\hat{W}^{-1}f\right)(t) = \\ = e^{-itH_0}\tilde{U}(t, t-\sigma)e^{i(t-\sigma)H_0}f(t-\sigma).$$

Таким образом, $U(t, s) = e^{-itH_0}\tilde{U}(t, s)e^{isH_0}$ есть пропагатор на $\mathscr{H}$, являющийся формальным решением уравнения

$$\frac{d}{dt}U(t, s) = -i(H_0 + V(t))U(t, s),$$

так как генератором $\hat{W}\exp(-i\sigma(i^{-1}d/dt + \hat{\tilde{V}}))\hat{W}^{-1}$ будет $i^{-1}d/dt + H_0 + \hat{V}$.

X.13. Классические нелинейные волновые уравнения

Серьезное обсуждение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных выходит за рамки этой книги. Однако мы хотим описать некоторые методы функционального анализа, полезные при изучении этой классической задачи. В качестве поясняющего примера мы рассмотрим нелинейное уравнение Клейна—Гордона. Предположим, что $m, \lambda > 0$, и пусть заданы две функции f и g на $\mathbb{R}^3$. Задача состоит в том, чтобы доказать существование и изучить поведение функции