непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем и со значениями в $\mathscr{H}$. Тогда нетрудно убедиться, что $i^{-1}d/dt$ самосопряжен в существенном на $C_0^1(\mathbb{R};\ \mathscr{H})$. Так как $\hat{\tilde{V}}$ — ограниченный оператор, то $i^{-1}d/dt+\hat{\tilde{V}}$ также самосопряжен в существенном на $C_0^1(\mathbb{R};\ \mathscr{H})$ и можно показать, что $\exp(-i\sigma(i^{-1}d/dt+\hat{\tilde{V}}))T_\sigma$ действует как умножение на операторнозначную функцию. Следовательно, по упомянутой выше теореме о соответствии, существует сильно непрерывный пропагатор $\tilde{U}(t, s)$ на $\mathscr{H}$, такой, что

$$\left(\exp\left(-i\sigma\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dt}+\hat{\tilde{V}}\right)\right)f\right)(t)=\tilde{U}(t,\ t-\sigma)f(t-\sigma).$$

Легко убедиться в том, что это именно тот пропагатор, который появляется в результате применения разложения Дайсона к $t\mapsto\tilde{V}(t)$. Пусть теперь $\hat{W}$ действует на $L^2(\mathbb{R};\ \mathscr{H})$ как $(\hat{W}f)(t)=e^{-iH_0t}f(t)$. Тогда $\hat{W}$ унитарен, так что

$$\hat{W}\exp\left(-i\sigma\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dt}+\hat{\tilde{V}}\right)\right)\hat{W}^{-1}$$

есть опять сильно непрерывная унитарная группа на $L^2(\mathbb{R};\ \mathscr{H})$ и очевидно, что

$$\left(\hat{W}\exp\left(-i\sigma\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dt}+\hat{\tilde{V}}\right)\right)\hat{W}^{-1}f\right)(t)=$$
$$=e^{-itH_0}\tilde{U}(t,\ t-\sigma)e^{i(t-\sigma)H_0}f(t-\sigma).$$

Таким образом, $U(t,s)=e^{-itH_0}\tilde{U}(t,\ s)e^{isH_0}$ есть пропагатор на $\mathscr{H}$, являющийся формальным решением уравнения

$$\frac{d}{dt}U(t,\ s)=-i(H_0+V(t))U(t,\ s),$$

так как генератором $\hat{W}\exp(-i\sigma(i^{-1}d/dt+\hat{\tilde{V}}))\hat{W}^{-1}$ будет $i^{-1}d/dt+H_0+\hat{\tilde{V}}$.

X.13. Классические нелинейные волновые уравнения

Серьезное обсуждение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных выходит за рамки этой книги. Однако мы хотим описать некоторые методы функционального анализа, полезные при изучении этой классической задачи. В качестве поясняющего примера мы рассмотрим нелинейное уравнение Клейна—Гордона. Предположим, что $m,\ \lambda>0$, и пусть заданы две функции f и g на $\mathbb{R}^3$. Задача состоит в том, чтобы доказать существование и изучить поведение функции

$u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^2 u,\\ u(x, 0) = f(x),\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x).\end{gathered} \tag{X.138}$$

В этом разделе мы рассматриваем существование, единственность и гладкость решений (X.138). В § XII.13 будет построена теория рассеяния для (X.138). Мы рассматриваем задачу Клейна—Гордона для комплекснозначных функций u. Если начальные данные f и g вещественнозначны, то и u будет вещественнозначной при всех t (задача 71) и будет удовлетворять уравнению

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = -\lambda u^3. \tag{X.139}$$

Это уравнение есть классический аналог φ^4-уравнения квантовой теории поля, рассмотренного в § X.7.

Теории классических полей, описываемой уравнением (X.139), формально можно придать вид гамильтоновой теории. Если мы положим

$$H(u, v) = \frac{1}{2}\int \left(v(x)^2 + (\nabla u(x))^2 + m^2 u(x)^2 + \frac{\lambda}{2} u(x)^4\right) d^3x,$$

то (X.139) формально эквивалентно системе

$$u_t(x) = \frac{\delta H}{\delta v(x)} = v(x),$$

$$v_t(x) = -\frac{\delta H}{\delta u(x)} = (\Delta - m^2) u(x) - \lambda (u(x))^3,$$

где мы проинтегрировали по частям, чтобы получить

$$\int (\nabla u(x))^2 d^3x = -\int u(x) \Delta u(x) d^3x.$$

Это наводит на мысль, что, как и в классических гамильтоновых системах с конечным числом степеней свободы, полная энергия должна здесь сохраняться. Иначе говоря, если u—достаточно гладкое решение уравнения (X.139), достаточно быстро убывающее на бесконечности, так что можно интегрировать по частям и дифференцировать под знаком интеграла, то $H(u, u_t)$ не должно зависеть от времени. Этот закон сохранения играет центральную роль в вопросе о существовании *глобальных* решений (X.138) и (X.139) и в различии между случаями $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$. Если $\lambda > 0$, то с течением времени ни u, ни ∇u не могут становиться большими, так как увеличение любой из них приводит к увеличению $H(u, u_t)$. Однако если $\lambda < 0$, то u и ∇u могут одновременно расти при взаимной компенсации их вклада в $H(u, u_t)$. Таким образом, при $\lambda > 0$ можно ожидать существования глобальных решений, и мы действительно докажем это, опираясь на сохранение энергии. Напротив, если $\lambda < 0$, то можно ожидать, что для некоторых начальных данных глобального решения не существует. Это положение подобно ситуации для обыкновенного дифференциального уравнения

$$m\ddot{q}(t) = \lambda q^3(t).$$

Так как энергия $^1/_2 m\dot{q}^2 + {^1/_4}\lambda q^4$ сохраняется, решение не может выйти на бесконечность за конечное время, если $\lambda > 0$, так что глобальное решение существует; но если $\lambda < 0$, то решение обращается в бесконечность за конечное время.

Поскольку техника, развитая в этой главе, применяется к дифференциальным уравнениям первого порядка по t, перепишем (X.138) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^2 u,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = v,$$
$$u(x, 0) = f(x),$$
$$v(x, 0) = g(x),$$

или

$$\dot{\varphi}(t) - \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix} \varphi(t) = J(\varphi(t)), \qquad \varphi(x, 0) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}, \tag{X.140}$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda |u|^2 u \end{pmatrix}.$$

Впредь мы будем писать векторы-столбцы в виде векторов-строк. Мы хотим сформулировать (X.140) как задачу в гильбертовом пространстве и доказать в рамках гильбертова пространства общую теорему, гарантирующую существование и единственность решения. Пусть $B \geqslant mI$ — положительный квадратный корень из строго положительного самосопряжённого оператора B^2 в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. (В нашем случае $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ и $B^2 = -\Delta + m^2$.) Так как B^2 замкнут, то область определения $D(B)$ оператора B есть гильбертово пространство с внутренним произведением (Bu, Bu). Обозначим через $\mathcal{H}_B$ прямую сумму $\mathcal{H}_B \equiv D(B) \oplus \mathcal{H}$ с внутренним произведением

$$(\langle u, v\rangle, \langle u, v\rangle)_B \equiv (Bu, Bu) + (v, v).$$

Пусть

$$A=i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{X.141}$$

Тогда легко проверить, что A — симметрический оператор на $\mathcal{H}_B$ с областью определения $D \equiv D(B^2) \oplus D(B)$ и что A замкнут, так как B и B^2 замкнуты. Определяя теперь с помощью функционального исчисления $\cos(tB)$ и $\sin(tB)$, положим

$$W(t)=\begin{pmatrix} \cos(tB) & B^{-1}\sin(tB) \\ -B\sin(tB) & \cos(tB) \end{pmatrix}.$$

Тогда $W(t)$ — сильно непрерывная унитарная группа на $\mathcal{H}_B$. Далее, если $u \in D$, то сильная производная $W(t)u$ существует в нуле и равна $-iA$ и $W(t)$ переводит D в себя. Следовательно, по теореме VIII.11 генератор группы $W(t)$ самосопряжен в существенном на D. Так как A замкнут, то он самосопряжен на D и является инфинитезимальным генератором $W(t)$. Соберем все сказанное в следующее

Предложение. Пусть B — строго положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда $W(t)$ — сильно непрерывная однопараметрическая группа на $\mathcal{H}_B$, инфинитезимальный генератор которой

$$A=i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix}$$

самосопряжен на $D=D(B^2) \oplus D(B)$.

Теперь мы можем сформулировать абстрактную версию (X.140). Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (уже не обязательно вида (X.141)), и пусть J — нелинейное отображение из $D(A)$ в $\mathcal{H}$. Задача состоит в том, чтобы найти условия на J, обеспечивающие существование при каждом $\varphi_0 \in D(A)$ единственной функции $\varphi(t)$ на $[0, \infty)$, принимающей значения в $\mathcal{H}$ и удовлетворяющей уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -iA\varphi + J(\varphi), \\ \varphi(0) &= \varphi_0. \end{aligned} \tag{X.142}$$

Техника доказательства состоит в переформулировке (X.142) в виде интегрального уравнения

$$\varphi(t)=e^{-iAt}\varphi_0+\int_0^t e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\,ds \tag{X.143}$$

и последующем доказательстве существования единственного локального решения уравнения (X.143) посредством принципа сжимающих отображений. Наши условия на J окажутся достаточно сильными и обеспечат, что любое решение (X.143) есть автоматически также решение (X.142). Можно ослабить условие на J и получать решения (X.143), которые не будут решениями (X.142), ибо такие решения не обязательно сильно дифференцируемы.

Теорема X.72 (локальное существование). Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и J — отображение из $D(A)$ в $D(A)$, удовлетворяющее требованиям

(H_0) $\quad \|J(\varphi)\| \leqslant C(\|\varphi\|)\|\varphi\|$,

(H_1) $\quad \|AJ(\varphi)\| \leqslant C(\|\varphi\|, \|A\varphi\|)\|A\varphi\|$,

(H_0^L) $\quad \|J(\varphi)-J(\psi)\| \leqslant C(\|\varphi\|, \|\psi\|)\|\varphi-\psi\|$,

(H_1^L) $\quad \|A(J(\varphi)-J(\psi))\| \leqslant C(\|\varphi\|, \|A\varphi\|, \|\psi\|, \|A\psi\|)\|A\varphi-A\psi\|$

при всех φ, $\psi \in D(A)$, где каждая константа C есть монотонно возрастающая (всюду конечная) функция указанных норм. Тогда для каждого $\varphi_0 \in D(A)$ существует такое $T>0$, что (X.142) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение при $t\in[0, T)$. Для каждого множества вида $\{\varphi \mid \|\varphi\| \leqslant a, \|A\varphi\| \leqslant b\}$ можно выбрать T равномерно для всех φ_0 из этого множества.

Доказательство. Пусть X_T — множество функций на $[0, T)$ со значениями в $D(A)$, для которых $\varphi(t)$ и $A\varphi(t)$ непрерывны и

$$\|\varphi(\cdot)\|_T \equiv \sup_{t\in[0, T)}\|\varphi(t)\| + \sup_{t\in[0, T)}\|A\varphi(t)\| < \infty.$$

Поскольку A — замкнутый оператор, X_T с нормой $\|\varphi(\cdot)\|_T$ — банахово пространство. Выберем некоторое фиксированное $\varepsilon>0$. Пусть $\varphi_0\in D(A)$ задано, и пусть $X_{T,\varepsilon,\varphi_0}$ состоит из тех $\varphi(\cdot)$ из X_T, для которых $\varphi(0)=\varphi_0$ и $\|\varphi(\cdot)-e^{-iAt}\varphi_0\|_T \leqslant \varepsilon$. Покажем, что отображение

$$(S\varphi)(t) = e^{-iAt}\varphi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\varphi(s))\, ds \qquad \text{(X.144)}$$

является сжимающим на $X_{T,\varepsilon,\varphi_0}$, если T достаточно мало. Обозначим через C_ε любую из констант в условиях теоремы с аргументами $\|\varphi_0\|+\varepsilon$ и $\|A\varphi_0\|+\varepsilon$. Допустим, что $\varphi(\cdot)\in X_{T,\varepsilon,\varphi_0}$; тогда

$$e^{-iA(t-(s+h))}J(\varphi(s+h)) - e^{-iA(t-s)}J(\varphi(s))\| \leqslant$$
$$\leqslant \|J(\varphi(s+h))-J(\varphi(s))\| + \|(e^{-iAh}-I)J(\varphi(s))\| \leqslant$$
$$\leqslant C_\varepsilon\|\varphi(s+h)-\varphi(s)\| + \|(e^{-iAh}-I)J(\varphi(s))\|,$$

так что $e^{-iA(t-s)}J(\varphi(s))$ — непрерывная функция s со значениями в $\mathscr{H}$. Аналогичное рассуждение показывает, что

$Ae^{-iA(t-s)}J(\varphi(s))$ также непрерывна. Значит, правую часть (X.144) можно определить с помощью риманова интеграла, и если

$$\eta_n(t) \equiv \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n} e^{-i(t-(m/n)t)A} J\left(\varphi\left(\frac{m}{n}t\right)\right)$$

и

$$\eta(t) \equiv \int_0^t e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\, ds,$$

то $\eta_n(t) \to \eta(t)$ при $n \to \infty$. Далее, по предположениям о J всякое $\eta_n(t) \in D(A)$, так что

$$A\eta_n(t) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n} e^{-i(t-(m/n)t)A} AJ\left(\varphi\left(\frac{m}{n}t\right)\right) \to$$

$$\to \int_0^t e^{-i(t-s)A} AJ(\varphi(s))\, ds.$$

Следовательно, $\eta(t) \in D(A)$ и

$$A\int_0^t e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\, ds = \int_0^t e^{-i(t-s)A} AJ(\varphi(s))\, ds. \qquad \text{(X.145)}$$

Далее,

$$\|A\eta(t+h) - A\eta(t)\| \leqslant \left\| \int_t^{t+h} e^{-iA(t-s)} e^{-iAh} AJ(\varphi(s))\, ds \right\| +$$

$$+ \left\| \int_0^t (e^{-ihA} - I) e^{-iA(t-s)} AJ(\varphi(s))\, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant hC_\varepsilon \|\varphi\|_T + \int_0^t \|(e^{-ihA} - I) AJ(\varphi(s))\|\, ds.$$

Подынтегральное выражение во втором члене сходится к нулю при $h \to 0$ при каждом s и, по предположениям о J, равномерно ограничено. Значит, по теореме о мажорированной сходимости, правая часть сходится к нулю при $h \to 0$, так что $A\eta(t)$ непрерывно и аналогично $\eta(t)$ непрерывно. Далее, в точности такие же оценки показывают, что для любых $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot) \in X_{T,\varepsilon,\varphi_0}$ выполняются неравенства

$$\|(S\varphi)(t) - e^{-iAt}\varphi_0\| \leqslant C_\varepsilon T \sup_{t\in[0,T)} \|\varphi(t)\|,$$

$$\|A(S\varphi)(t) - Ae^{-iAt}\varphi_0\| \leqslant C_\varepsilon T \sup_{t\in[0,T)} \|A\varphi(t)\|,$$

$$\|(S\varphi)(t) - (S\psi)(t)\| \leqslant C_\varepsilon T \sup_{t\in[0,T)} \|\varphi(t) - \psi(t)\|,$$

$$\|A[(S\varphi)(t) - (S\psi)(t)]\| \leqslant C_\varepsilon T \sup_{t\in[0,T)} \|A\varphi(t) - A\psi(t)\|.$$

Следовательно при достаточно малых T отображение S есть сжатие на $X_{T, \varepsilon, \varphi_0}$, так что, по теореме V.18, S имеет единственную неподвижную точку $\varphi(\cdot)$ в $X_{T, \varepsilon, \varphi_0}$, которая удовлетворяет уравнению (X.143).

Допустим теперь, что $\tilde{\varphi}$ — непрерывно дифференцируемое $D(A)$-значное решение уравнения (X.142) на интервале $[0, \tilde{T})$, причем $\tilde{\varphi}(0) = \varphi_0$. В силу дифференциального уравнения $A\tilde{\varphi}(t)$ непрерывна, так что $\tilde{\varphi}(t) \in X_{T, \varepsilon, \varphi_0}$ при t в некотором интервале $[0, T_0)$. Так как $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет (X.143), то $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t)$ при $t < T_0$. Пусть T_1 — точная верхняя грань таких T_0. Тогда, поскольку $X_{T, \varepsilon, \varphi_0}$ замкнуто, $\tilde{\varphi}(T_1) \in X_{T, \varepsilon, \varphi_0}$. Далее, если $T_1 < \tilde{T}$, то, так как $\tilde{\varphi}(T_1) = \varphi(T_1)$, те же рассуждения показывают, что $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$ в некотором малом интервале $T_1 \leqslant t < T_2 < T$, что противоречит максимальности T_1. Значит, $T_1 \geqslant T$ и $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$ при $t \in [0, T)$, т. е. всякое сильное решение (X.142) на $[0, T)$ равно $\varphi(t)$.

Для доказательства сильной дифференцируемости $\varphi(t)$ напишем

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \left(\frac{e^{-iAh} - I}{h}\right) e^{-iAt} \varphi_0 + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-iA(t-s)} e^{-iAh} J(\varphi(s))\, ds + $$
$$+ \int_0^t e^{-iA(t-s)} \left(\frac{e^{-ihA} - I}{h}\right) J(\varphi(s))\, ds. \qquad \text{(X.146)}$$

Так как $\varphi_0 \in D(A)$, то первый член сходится к $-iAe^{-iAt}\varphi_0$ при $h \to 0$, а так как подынтегральное выражение во втором члене непрерывно, то второй член сходится к $J(\varphi(t))$. Подынтегральное выражение в третьем члене сходится к $e^{-iA(t-s)}(-iAJ(\varphi(s)))$ при всяком s и

$$\left\| \frac{e^{-ihA} - I}{h} J(\varphi(s)) \right\| \leqslant \| AJ(\varphi(s)) \| \leqslant C \| A\varphi_0 \| + \varepsilon,$$

так что подынтегральное выражение равномерно ограничено. Значит, в силу теоремы о мажорированной сходимости третий член сходится при $h \to 0$ к $\int_0^t e^{-iA(t-s)}(-iAJ(\varphi(s)))\, ds$, что по (X.145) равно $-iA\int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\varphi(s))\, ds$. Следовательно, $\varphi(t)$ сильно дифференцируема при $t \in [0, T)$ и удовлетворяет (X.142). ∎

Единственность, доказанная в этой теореме, на деле имеет место в гораздо более сильном смысле (задача 72). Заметим, что условия H_j в предыдущей и следующей теоремах следуют из условий H_j^1. Мы их формулируем по отдельности для того, чтобы легче было сравнить с условиями теоремы X.74.

Теорема X.73 (локальная гладкость).

(a) Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, а J — отображение, переводящее $D(A^j)$ в $D(A^j)$ при всех j и удовлетворяющее (при $j=0, 1, \ldots, n$) условиям

(H_j) $\|A^j J(\varphi)\| \leqslant C(\|\varphi\|, \ldots, \|A^j(\varphi)\|)\|A^j(\varphi)\|$,

(H_j^1) $\|A^j(J(\varphi) - J(\psi))\| \leqslant C(\|\varphi\|, \|\psi\|, \ldots$
$\ldots, \|A^j\varphi\|, \|A^j\psi\|)\|A^j\varphi - A^j\psi\|$

для всех $\varphi, \psi \in D(A^j)$, причем каждая константа C есть монотонно возрастающая (всюду конечная) функция всех своих переменных. Тогда для каждой $\varphi_0 \in D(A^n)$, $n \geqslant 1$, существует такое T_n, что (X.142) имеет единственное решение $\varphi(t)$ для $t \in [0, T_n)$ и $\varphi(t) \in D(A^n)$ при всех $t \in [0, T_n)$. Для каждого множества $\{\varphi \mid \|A^j\varphi\| \leqslant a_j,\ j=0, \ldots, n\}$ можно выбрать T равномерно для φ_0 из этого множества.

(b) В дополнение к условиям в (a) предположим, что для каждого $j < n$ отображение J обладает таким свойством: если решение φ сильно дифференцируемо j раз и $\varphi^{(k)}(t) \in D(A^{n-k})$ и $A^{n-k}\varphi^{(k)}(t)$ непрерывна при всех $k \leqslant j$, то $J(\varphi(t))$ дифференцируема j раз, $d^jJ(\varphi(t))/dt^j \in D(A^{n-j-1})$ и $A^{n-j-1}d^jJ(\varphi(t))/dt^j$ непрерывна. Тогда решение, определяемое в части (a), n раз сильно дифференцируемо по t и $d^j\varphi(t)/dt^j \in D(A^{n-j})$.

Доказательство. Доказательство части (a) в основном совпадает с доказательством теоремы X.72, за исключением того, что теперь мы вводим $X^{(n)}_{T_n, \varepsilon, \varphi_0}$ как множество таких функций $\varphi(\cdot)$ на $[0, T_n)$, что $\varphi(t), \ldots, A^n\varphi(t)$ сильно непрерывны и

$$\sum_{j=0}^{n} \sup_{t \in [0, T)} \|A^j\varphi(t) - e^{-iAt}A^j\varphi_0\| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда так же, как прежде, устанавливается, что S — сжатие.

Часть (b) доказывается по индукции. Мы знаем из части (a), что $\varphi(t)$ сильно непрерывно дифференцируема и $\varphi'(t) = -iA\varphi(t) + J(\varphi(t))$. В силу тех же доводов, что в теореме X.72,

$$A\varphi(t) = Ae^{-iAt}\varphi_0 + A\int_0^t e^{-iA(t-s)}J(\varphi(s))\,ds =$$
$$= e^{-iAt}A\varphi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)}AJ(\varphi(s))\,ds,$$

а отсюда следует (в силу других рассуждений из теоремы X.72, см. (X.146)), что $A\varphi(t)$ сильно непрерывно дифференцируема. Следовательно, в силу допущений о J, $J(\varphi(t))$ сильно непрерывно дифференцируема, $dJ(\varphi(t))/dt \in D(A^{n-2})$ и $A^{n-2}dJ(\varphi(t))/dt$ непрерывна. Значит, $\varphi'(t)$ сильно дифференцируема,

$$\varphi''(t) = -A\varphi'(t) + \frac{d}{dt}J(\varphi(t)) =$$

$$= (-iA)^2\varphi(t) - iAJ(\varphi(t)) + \frac{d}{dt}J(\varphi(t)),$$

$\varphi''(t) \in D(A^{n-2})$ и $A^{n-2}\varphi''(t)$ непрерывна. Далее мы повторяем еще раз те же рассуждения ($dJ(\varphi(t))/dt$ дифференцируема по условию, так как теперь нам известно, что $\varphi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема) и заключаем, что $\varphi(t)$ трижды сильно дифференцируема, и т. д. ∎

Заметим, что решение $\varphi(t)$, которое обеспечивается теоремой X.73, существует, вообще говоря, на меньших интервалах, чем решение из теоремы X.72, так как $T_n \leqslant T$. Однако в силу единственности эти решения обязаны совпадать на $[0, T_n)$. Теперь мы подходим к вопросу, существует ли это решение при всех $t \geqslant 0$. В общем случае это зависит от конкретных свойств нелинейных членов, а не просто от оценок; в конце этого раздела мы приведем пример, когда глобального решения не существует. Ниже мы покажем, что если $\|\varphi(t)\|$ a priori ограничена и в нашем распоряжении имеются несколько более сильные оценки, то глобальное решение существует. Позже мы увидим, что сохраняющаяся энергия для нелинейного уравнения Клейна—Гордона равна $\frac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2 + \frac{1}{4}\lambda\int|u(t,x)|^4 d^3x$, т. е. $\|\varphi(t)\|$ a priori ограничена.

Лемма 1. Пусть A и J удовлетворяют условиям части (a) теоремы X.73, за исключением того, что условие (H_j) заменяется несколько более сильным условием

(H_j') $\|A^jJ(\varphi)\| \leqslant C(\|\varphi\|, \ldots, \|A^{j-1}\varphi\|)\|A^j\varphi\|$

при $1 \leqslant j \leqslant n$ (т. е. константа не зависит от $\|A^j\varphi\|$). Пусть $[0, T_n)$ — конечный интервал, на котором существует решение φ уравнения (X.142), причем $A^j\varphi(t)$ сильно непрерывна на $[0, T_n)$ при всяком $0 \leqslant j \leqslant n$. Тогда если $\|\varphi(t)\|$ ограничена на $[0, T_n)$, то и $\|A^j\varphi(t)\|$ ограничена при всех $0 < j \leqslant n$.

Доказательство. Так как $\varphi(t)$ удовлетворяет указанному дифференциальному уравнению на $[0, T_n)$, для $t \in [0, T_n)$

$$\varphi(t) = e^{-iAt}\varphi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)}J(\varphi(s))\,ds.$$

Как и прежде, можно ввести A под знак интеграла и получить

$$A\varphi(t)=e^{-iAt}A\varphi_0+\int_0^t e^{-iA(t-s)}AJ(\varphi(s))\,ds,$$

откуда

$$\|A\varphi(t)\|\leqslant\|A\varphi_0\|+\int_0^t C(\|\varphi(s)\|)\|A\varphi(s)\|\,ds.$$

Согласно допущению, $\|\varphi(s)\|$ ограничена на $[0, T_n)$, поэтому существует такая константа K_1, что

$$\|A\varphi(t)\|\leqslant\|A\varphi_0\|+K_1\int_0^t\|A\varphi(s)\|\,ds$$

при всех $t\in[0, T_n)$. Отсюда с помощью итераций заключаем, что

$$\|A\varphi(t)\|\leqslant\|A\varphi_0\|e^{K_1t}$$

при всех $t\in[0, T_n)$, так что $\|A\varphi(t)\|$ ограничена на $[0, T_n)$. Теперь, когда мы знаем, что $\|\varphi(t)\|$ и $\|A\varphi(t)\|$ ограничены, мы можем применить (H_2') и, воспользовавшись прежней аргументацией, заключить, что $\|A^2\varphi(t)\|$ ограничена, и т. д. ∎

Пусть $\overline{T}_n$ — точная верхняя грань чисел T_n, для которых решение $\varphi(t)$ уравнения (X.142) существует на $[0, T_n)$ и $A^j\varphi(t)$ непрерывны при всех $j=0, 1, \ldots, n$. В силу локальной единственности, каждые два таких решения совпадают, если пересекаются соответствующие интервалы существования, так что решение, задаваемое частью (a) теоремы X.73, может быть продолжено на полуинтервал $[0, \overline{T}_n)$, который называется A^n**-максимальным интервалом** существования этого решения.

Теорема X.74 (глобальное существование и гладкость). Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и n — положительное целое число. Пусть J — отображение, которое переводит $D(A^j)$ в $D(A^j)$ при всех $1\leqslant j\leqslant n$ и удовлетворяет (при всех $0\leqslant j\leqslant n$) условиям

(H_0) $\|J(\varphi)\|\leqslant C(\|\varphi\|)\|\varphi\|$,

(H_j') $\|A^jJ(\varphi)\|\leqslant C(\|\varphi\|, \ldots, \|A^{j-1}\varphi\|)\|A^j\varphi\|$, $j=1, \ldots, n$,

(H_j'') $\|A^j(J(\varphi)-J(\psi))\|\leqslant C(\|\varphi\|, \|\psi\|, \ldots$
$\ldots, \|A^j\varphi\|, \|A^j\psi\|)\|A^j\varphi-A^j\psi\|$, $j=0, \ldots, n$,

при всех $\varphi, \psi\in D(A^j)$, где каждая константа C есть монотонно возрастающая (всюду конечная) функция всех своих аргументов. Пусть $\varphi_0\in D(A^n)$, и допустим, что на каждом конечном интервале существования решение $\varphi(t)$, даваемое частью (a) теоремы

X.73, таково, что $\|\varphi(t)\|$ ограничена сверху. Тогда существует сильно дифференцируемая $D(A^n)$-значная функция $\varphi(t)$ на $[0, \infty)$, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -iA\varphi(t) + J(\varphi(t)), \\ \varphi(0) &= \varphi_0. \end{aligned} \tag{X.142}$$

Если при этом J удовлетворяет условиям части (b) теоремы X.73, то $\varphi(t)$ сильно дифференцируема n раз и $d^j\varphi(t)/dt^j \in D(A^{n-j})$.

Доказательство. Пусть $[0, \overline{T}_n)$ есть A^n-максимальный интервал существования решения $\varphi(t)$, и пусть $\overline{T}_n < \infty$. По условию $\|\varphi(t)\|$ ограничена на $[0, \overline{T}_n)$. По лемме 1 отсюда следует, что $\|A^j\varphi(t)\|$ ограничена на $[0, \overline{T}_n)$ при всех $0 \leqslant j \leqslant n$. Далее, длина интервала T_n, на котором применим принцип сжимающих отображений, зависит лишь от констант $C(\|\varphi_0\|+\varepsilon, \ldots, \|A^n\varphi_0\|+\varepsilon)$. Поскольку эти константы ограничены на $[0, \overline{T}_n)$, мы можем продолжить решение $\varphi(t)$ через $\overline{T}_n$, если выберем начальную точку t_0 достаточно близко к $\overline{T}_n$. Но это находится в противоречии с максимальностью $\overline{T}_n$, поэтому $\overline{T}_n = \infty$. Остальные утверждения теоремы немедленно вытекают из теоремы X.73. ∎

Следствие. Пусть A и J удовлетворяют условиям предыдущей теоремы при каждом $n = 0, 1, \ldots$, и пусть J удовлетворяет еще условиям части (b) теоремы X.73. Тогда при всяком $\varphi_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} D(A^j)$ уравнение (X.142) имеет единственное решение $\varphi(t)$, такое, что $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема в сильном смысле и каждая производная лежит в $\bigcap_{j=1}^{\infty} D(A^j)$.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, так как e^{itA} — группа и все наши оценки не зависят от знака t, теорема X.74 показывает, что решение существует и для отрицательных t, коль скоро $\|\varphi(t)\|$ a priori ограничена также и на конечных отрицательных интервалах. Допустим, что выполнено условие

$$(\mathscr{H}_0^1)\ \|J(\varphi) - J(\psi)\| \leqslant C(\|\varphi\|, \|\psi\|)\|\varphi - \psi\|, \quad \varphi, \psi \in \mathscr{H},$$

и условие априорной ограниченности из теоремы X.74. Тогда, по предыдущему, можно построить глобальные решения интегрального уравнения (X.143). Пусть M_t — отображение

$$M_t:\ \varphi(0) \longmapsto \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — решение (X.143). Тогда $\{M_t\}_{t \in (-\infty, \infty)}$ — однопараметрическая группа всюду определенных нелинейных отображений пространства $\mathscr{H}$. Она сильно непрерывна, так как $\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \to 0$

при $t \to 0$. Бывает важно знать, что M_t при каждом t есть непрерывный оператор в $\mathscr{H}$, так как в приложениях это означает, что решения дифференциальных уравнений непрерывно зависят от своих начальных данных. Заметим, что, поскольку M_t, вообще говоря, нелинейно, недостаточно доказать, что M_t ограничено на ограниченных множествах.

Теорема X.75. Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и J — нелинейное отображение пространства $\mathscr{H}$, удовлетворяющее условию $(\mathscr{H}_0^{\mathrm{L}})$. Предположим, что для всех k и T решения (X.143) a priori ограничены равномерно для всех $\|\varphi(0)\| \leqslant k$, $0 < t < T$. Тогда каждое M_t равномерно непрерывно на шарах в $\mathscr{H}$.

Доказательство. Пусть k, T заданы, и пусть $b_T(k)$ — соответствующая равномерная граница. Предположим, что $\|\varphi_1(0)\| \leqslant k$, $\|\varphi_2(0)\| \leqslant k$, и пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — соответствующие решения (X.143). Тогда для $t < T$

$$\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\| \leqslant \|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)\| + \int_0^t \|J(\varphi_1(s)) - J(\varphi_2(s))\|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)\| + C(b(k), b(k)) \int_0^t \|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)\|\,ds,$$

откуда

$$\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\| \leqslant \|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)\| \exp(C(b(k), b(k))\,t). \blacksquare$$

При более сильных условиях на J можно получить более сильные заключения; см. задачу 80.

Вернемся теперь к нашему руководящему примеру — нелинейному уравнению Клейна — Гордона на $\mathbb{R}^3$. В этом случае $B = (-\Delta + m^2)^{1/2}$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$, $\mathscr{H} = D(B) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ и

$$A = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем символ $\|\cdot\|$ будет всюду обозначать норму

$$\|\langle u, v\rangle\|^2 = \|Bu\|_2^2 + \|v\|_2^2$$

на $\mathscr{H}$, а $\|\cdot\|_p$ — обычную L^p-норму на $\mathbb{R}^3$. Мы переписали уравнение Клейна — Гордона (X.138) в виде

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -iA\varphi(t) + J(\varphi(t)), \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \end{aligned} \tag{X.147}$$

где $\varphi(t) = \langle u(t), v(t)\rangle$, $\varphi_0 = \langle f(x), g(x)\rangle$, $J(\varphi(t)) = \langle 0, -\lambda |u(t)|^2 u(t)\rangle$, и показали в предложении, что A самосопряжен на $D(B^2) \oplus D(B)$.

Чтобы применить к этому случаю абстрактную теорию, следует удостовериться, что J обладает необходимыми свойствами. Никакая новая техника здесь не потребуется; достаточно будет применять в нужных случаях неравенство Гёльдера, теорему Планшереля и соболевские оценки. Мы изложим все это в ряде лемм. В последующих вычислениях различные общие константы будут обозначаться через K.

Лемма 2. Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда $\|u\|_6 \leqslant K\|Bu\|_2$.

Доказательство. Обозначим $\partial u(x)/\partial x_i$ через u_{x_i}. Тогда, по основной теореме анализа,

$$|u(x)|^4 \leqslant 4\int |u_{x_i}u^3|\,dx_i,$$

где интеграл берется по прямой, вдоль которой x_j постоянны, если $j \neq i$. Поэтому

$$|u(x)|^6 \leqslant K\left(\int |u_{x_1}u^3|\,dx_1\right)^{1/2}\left(\int |u_{x_2}u^3|\,dx_2\right)^{1/2}\left(\int |u_{x_3}u^3|\,dx_3\right)^{1/2},$$

откуда, проинтегрировав обе части (итерацией интегралов) и воспользовавшись неравенством Шварца, находим

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6\,dx \leqslant K\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_1}u^3|\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_2}u^3|\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_3}u^3|\,dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant K\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6\,dx\right)^{3/4}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_1}|^2 dx\right)^{1/4}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_2}|^2 dx\right)^{1/4}\times$$

$$\times\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_3}|^2 dx\right)^{1/4}.$$

Отсюда легко получаем

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6\,dx\right)^{1/6} \leqslant K\left(\|u_{x_1}\|_2 + \|u_{x_2}\|_2 + \|u_{x_3}\|_2\right) =$$

$$= K\left(\|k_1\hat{u}\|_2 + \|k_2\hat{u}\|_2 + \|k_3\hat{u}\|_2\right) \leqslant$$

$$\leqslant K\left\|\left(\sum k_i^2 + m^2\right)^{1/2}\hat{u}\right\|_2 = K\|Bu\|_2. \blacksquare$$

Лемма 3. **Предположим, что u_1, u_2, $u_3 \in D(B)$. Тогда**

$$\|u_1u_2u_3\|_2 \leqslant K\|Bu_1\|_2\|Bu_2\|_2\|Bu_3\|_2. \qquad \text{(X.148)}$$

Доказательство. Пусть $u \in D(B)$. Так как B самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, мы можем найти последовательность $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$-функций u_n, таких, что $u_n \xrightarrow{L^2} u$ и $Bu_n \xrightarrow{L^2} Bu$; переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно предположить, что

u_n также поточечно сходится к u. Но

$$\|u_n^3-u_m^3\|_2=\|(u_n-u_m)(u_n^2+u_nu_m+u_m^2)\|_2\leqslant$$
$$\leqslant K\|u_n-u_m\|_6\|u_n^2+u_nu_m+u_m^2\|_3\leqslant$$
$$\leqslant K\|u_n-u_m\|_6(\|u_n\|_6^2+\|u_n\|_6\|u_m\|_6+\|u_m\|_6^2)\leqslant$$
$$\leqslant K\|Bu_n-Bu_m\|_2(\|Bu_n\|_2^2+\|Bu_n\|_2\|Bu_m\|_2+\|Bu_m\|_2^2),$$

так что $\{u_n^3\}$ — последовательность Коши в L^2, и так как она сходится поточечно к u^3, то $u^3\in L^2$. Переходя к пределу в неравенстве, находим

$$\|u\|_6^3=\|u^3\|_2\leqslant K\|Bu\|_2^3.$$

Утверждение леммы получается отсюда двукратным применением неравенства Гёльдера. ∎

Лемма 4. При всех φ_1, $\varphi_2\in\mathscr{H}$ выполняются неравенства

$$\|J(\varphi_1)\|\leqslant K\|\varphi_1\|^3,$$
$$\|J(\varphi_1)-J(\varphi_2)\|\leqslant C(\|\varphi_1\|,\ \|\varphi_2\|)\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_i=\langle u_i, v_i\rangle$. Тогда по лемме 3

$$\|J(\varphi_1)\|=\|\lambda u_1^2\bar{u}_1\|_2\leqslant K\|Bu_1\|_2^3\leqslant K\|\varphi_1\|^3$$

и (в соответствии с вычислениями в лемме 3)

$$\|J(\varphi_1)-J(\varphi_2)\|=\|\lambda(u_1^2\bar{u}_1-\bar{u}_2^2u_2)\|_2\leqslant$$
$$\leqslant K\|B(u_1-u_2)\|_2(\|Bu_1\|_2^2+\|Bu_1\|_2\|Bu_2\|_2+\|Bu_2\|_2^2)\leqslant$$
$$\leqslant K\|\varphi_1-\varphi_2\|(\|\varphi_1\|^2+\|\varphi_1\|\|\varphi_2\|+\|\varphi_2\|^2),$$

что и требовалось доказать. ∎

Лемма 5. Пусть φ_1, $\varphi_2\in D(A)$; тогда

$$\|AJ(\varphi_1)\|\leqslant K\|\varphi_1\|^2\|A\varphi_1\|,$$
$$\|A(J(\varphi_1)-J(\varphi_2))\|\leqslant C(\|\varphi_1\|,\ \|\varphi_2\|,\ \|A\varphi_1\|,\ \|A\varphi_2\|)\|A\varphi_1-A\varphi_2\|.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_i=\langle u_i, v_i\rangle$, где $u_i\in D(B^2)$, $v_i\in D(B)$. Проведем вычисление:

$$\|Bu_{x_i}\|_2^2=\|(\sum k_i^2+m^2)^{1/2}k_i\hat{u}\|_2^2\leqslant\|(\sum k_i^2+m^2)\hat{u}\|_2^2=\|B^2u\|_2^2;$$

отсюда по лемме 3

$$\|(u^2\bar{u})_{x_i}\|_2=\|2uu_{x_i}\bar{u}+u^2\bar{u}_{x_i}\|_2\leqslant K\|Bu\|_2^2\|Bu_{x_i}\|_2\leqslant K\|Bu\|_2^2\|B^2u\|_2.$$

Следовательно,

$$\|AJ(\varphi_1)\|^2=\lambda^2\|Bu_1^2\bar{u}_1\|_2^2=\lambda^2\sum_{i=1}^{3}\|(u_1^2\bar{u}_1)_{x_i}\|_2^2+\lambda^2m^2\|u_1^2\bar{u}_1\|_2^2\leqslant$$
$$\leqslant K(\|Bu_1\|_2^4\|B^2u_1\|_2^2+m^2\|Bu_1\|_2^6)\leqslant$$
$$\leqslant K\|Bu_1\|_2^4\|B^2u_1\|_2^2\leqslant K\|\varphi_1\|^4\|A\varphi_1\|^2,$$

что доказывает первое неравенство. Чтобы доказать второе, проведем вычисление при помощи леммы 3 и сделанного выше:

$$\frac{1}{4}\|(u_1^2\bar{u}_1-u_2^2\bar{u}_2)_{x_i}\|_2^2\leqslant\|u_1^2(\bar{u}_1-\bar{u}_2)_{x_i}\|_2^2+\|(u_1^2-u_2^2)(\bar{u}_2)_{x_i}\|_2^2+$$
$$+\|2(u_1)_{x_i}(|u_1|^2-|u_2|^2)\|_2^2+\|2(u_1-u_2)_{x_i}|u_2|^2\|_2^2\leqslant$$
$$\leqslant K(\|Bu_1\|_2^4\|B^2(u_1-u_2)\|_2^2+\|B^2u_2\|_2^2\|B(u_1+u_2)\|_2^2\|B^2(u_1-u_2)\|_2^2)\leqslant$$
$$\leqslant K(\|\varphi_1\|^4\|A(\varphi_1-\varphi_2)\|^2+\|A\varphi_2\|^2(\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|)\|A(\varphi_1-\varphi_2)\|^2).$$

Следовательно,

$$\|A(J(\varphi_1)-J(\varphi_2))\|^2=\lambda^2\|B(u_1^2\bar{u}_1-u_2^2\bar{u}_2)\|_2^2=$$
$$=\lambda^2\sum_{i=1}^{3}\|(u_1^2\bar{u}_1-\bar{u}_2u_2^2)_{x_i}\|_2^2+m^2\lambda^2\|u_1^2\bar{u}_1-u_2^2\bar{u}_2\|_2^2\leqslant$$
$$\leqslant C(\|\varphi_1\|,\ \|\varphi_2\|,\ \|A\varphi_2\|)\|A(\varphi_1-\varphi_2)\|^2+C(\|\varphi_1\|,\ \|\varphi_2\|)\|A(\varphi_1-\varphi_2)\|^2,$$

что и доказывает лемму. Мы здесь несколько раз пользовались неравенством $\|Bu\|_2\leqslant K\|B^2u\|_2$. ∎

Последние две леммы и теорема X.72 обеспечивают локальное существование решения уравнения (X.138). Для доказательства глобального существования потребуется

Лемма 6. Пусть $u(x, t)$ есть решение уравнения (X.138) на интервале $[0, T)$, причем $u(x, 0)=f(x)\in D(B^2)$ и $u_t(x, 0)=g(x)\in D(B)$. Тогда

$$E(t)\equiv\frac{1}{2}\int\left\{|Bu(x, t)|^2+|u_t(x, t)|^2+\frac{\lambda}{2}|u(x, t)|^4\right\}d^3x$$

не зависит от t.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)=\langle u(x, t), u_t(x, t)\rangle$. Так как $\varphi(t)\in D(A)$ при каждом $t\in[0, T)$, то $u(\cdot, t)\in D(B^2)$ и $u_t(\cdot, t)\in D(B)$ при каждом $t\in[0, T)$. Далее, так как $\varphi(t)$ сильно дифференцируема, u и u_t сильно дифференцируемы как функции со значениями в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и

$$\left\|B\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-u_t(t)\right)\right\|_2\to 0,$$
$$\left\|\frac{u_t(t+h)-u_t(t)}{h}-u_{tt}(t)\right\|_2\to 0 \tag{X.149}$$

при $h\to 0$. Отсюда следует, что первые два члена в $E(t)$ дифференцируемы. Чтобы убедиться в дифференцируемости третьего члена, применим лемму 2 и неравенство Гёльдера; получим

$$\left\|u\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-u_t(t)\right)\right\|_2\leqslant$$
$$\leqslant\|u\|_2^{1/2}\|Bu\|_2^{1/2}\left\|B\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-u_t(t)\right)\right\|_2.$$

Отсюда и из (X.149) следует, что $u(t, x)^2$ сильно дифференцируема. Следовательно, внутреннее произведение

$$\int |u(t, x)|^4 dx = (u^2(t), u^2(t))_2$$

дифференцируемо. Таким образом, $E(t)$ дифференцируема и

$$E'(t) = \frac{1}{2}(Bu_t, Bu) + \frac{1}{2}(u_{tt}, u_t) + \frac{\lambda}{2}(uu_t, u^2) + \\ + \frac{1}{2}(Bu, Bu_t) + \frac{1}{2}(u_t, u_{tt}) + \frac{\lambda}{2}(u^2, uu_t) = \\ = \frac{1}{2}(u_t, B^2u + u_{tt} + \lambda|u|^2 u) + \frac{1}{2}(B^2u + u_{tt} + \lambda|u|^2 u, u_t) = 0$$

на основании дифференциального уравнения для u. ∎

Теорема X.76а. Пусть $\lambda > 0$, $m > 0$ и

$$f \in D(-\Delta + m^2), \qquad g \in D((-\Delta + m^2)^{1/2}).$$

Тогда существует единственная функция $u(x, t)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, такая, что $t \mapsto u(\cdot, t)$ есть дважды сильно дифференцируемая функция t со значениями из $L^2(\mathbb{R}^3)$, $u(\cdot, t) \in D(-\Delta + m^2)$ при всех t, $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$ и

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^2 u. \qquad (X.138)$$

Кроме того, при всяком t отображение $\langle f, g\rangle \mapsto \langle u(\cdot, t), u_t(\cdot, t)\rangle$ непрерывно.

Доказательство. Леммы 4 и 5 показывают, что J удовлетворяет условиям (H_0'), (H_1'), (H_0^L) и (H_1^L) теоремы X.72. Значит, единственное локальное решение $\varphi(t) = \langle u(x, t), u_t(x, t)\rangle$ существует на некотором интервале $[0, T)$. По лемме 6, $E(t)$ постоянна, так что для всех $t \in [0, T)$

$$\frac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2 + \frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^4 d^3x = E(t) = E(0).$$

Значит, $\|\varphi(t)\|$ ограничена на $[0, T)$ и, следовательно, по теореме X.74 решение существует при всех $t \geqslant 0$. Решая уравнение с начальными данными $\langle f, -g\rangle$, получим решение при $t \leqslant 0$. Другие утверждения тоже немедленно следуют из части (а) теоремы X.73 и из теоремы X.75. В связи с проверкой допущений теоремы X.75 необходимо отметить, что нелинейный член в энергии ограничен квадратом свободной энергии. ∎

С классической точки зрения теорема X.75 еще не вполне удовлетворительна. Хотелось бы, чтобы в случае, когда начальные данные обладают определенной степенью гладкости, эта гладкость сохранялась в решениях. Вот для чего нужна теорема X.73. Здесь мы наметим доказательство такого результата для C^∞.

Теорема X.76b. Допустим, что в теореме X.76a начальные данные f и g принадлежат $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда решение $u(x, t)$ уравнения (X.138) принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^4)$.

Доказательство. Сначала доказываются высшие оценки (H'_n) и (H_n^{L}) для всех $n > 1$. Доказательство прямое и основано на тех же приемах, которые применялись для случаев $n=0$ и $n=1$ в леммах 5 и 6. Затем для каждого n проверяются условия на J из части (b) теоремы X.73. Чтобы понять, в чем здесь сложность, рассмотрим случай $n=2$. Допустим, что $\varphi(t)$ есть решение (X.147), $\varphi(t) \in D(A^2)$, $\varphi'(t) \in D(A)$ и $A\varphi'(t)$ непрерывна по t. Нам надо доказать, что $J(\varphi(t))$ сильно дифференцируема. Поскольку $\varphi(t) = \langle u(t), u'(t)\rangle$, то, согласно предположениям о φ, $u(t) \in D(B^3)$ и $u'(t) \in D(B^2)$. Величину

$$\frac{1}{h}(J(\varphi(t+h)) - J(\varphi(t))) = -\lambda\left\langle 0, \frac{|u(t+h)|^2 u(t+h) - |u(t)|^2 u(t)}{h}\right\rangle$$

можно записать в виде суммы трех членов, один из которых

$$-\lambda\left\langle 0, |u(t)|^2\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right)\right\rangle,$$

а два других аналогичны. По лемме 4

$$\left\| |u(t)|^2 \left[\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right) - u'(t)\right]\right\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant K \|Bu(t)\|_2^2 \left\| B\left[\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - u'(t)\right]\right\|_2.$$

Но, так как $\varphi(t)$ сильно дифференцируема, правая часть сходится к нулю. Та же аргументация применима и к остальным двум членам, и мы заключаем, что $J(\varphi(t))$ сильно дифференцируема,

$$(J(\varphi(t)))' = -\lambda\langle 0, 2u\bar{u}u' + u^2\bar{u}'\rangle,$$

$(J(\varphi(t)))' \in D(A^{2-1-1}) = \mathscr{H}$ (опять по лемме 4) и $(J(\varphi(t)))'$ непрерывна. С помощью точно таких же построений удостоверяемся в том, что выполнены условия части (b) теоремы X.73.

Далее, так как $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_0 = \langle f, g\rangle$ лежит в $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$. Отсюда, согласно следствию теоремы X.73, $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема в сильном смысле и j-я производная $\varphi^{(j)}(t)$ при всяком j лежит в $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ при всех t. Все, что осталось доказать,— это существование функции u, лежащей в C^∞ в классическом смысле и такой, что $\varphi(t) = \langle u(x, t), u_t(x, t)\rangle$, где $u(\cdot, t)$ рассматривается как векторнозначная функция t. Но $u(t)$, первая компонента $\varphi(t)$, локально есть элемент $L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3)) = L^2(\mathbb{R}^4)$ (см. § II.4). L^2-производные u по времени суть производные в смысле обобщенных функций (так как $C_0^\infty \subset L^2$) и, поскольку в силу предыдущего рассуждения $\partial^k u/\partial t^k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(B^n)$, производные u всех порядков в смысле обобщенных функций лежат в L^2. В силу леммы Соболева (теорема IX.24), u бесконечно дифференцируема в классическом смысле. ∎

Наконец, чтобы завершить наш анализ нелинейного уравнения Клейна—Гордона, покажем, что решение распространяется с единичной скоростью. В частности, решение u из последней теоремы обладает тем свойством, что $u(\cdot, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ при всех t.

Теорема X.77. Пусть $f \in D(-\Delta+m^2)$ и $g \in D((-\Delta+m^2)^{1/2})$. Предположим, что носители f и g лежат в компактном множестве $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ (т. е. f и g обращаются в нуль почти всюду вне Σ). Тогда решение (X.138), даваемое теоремой X.76а, обладает тем свойством, что носитель $u(\cdot, t)$ лежит в

$$\mathscr{C}(\Sigma, t) = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{dist}(x, \Sigma) \leqslant t\}.$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение теоремы для *линейного* уравнения

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0, \\ &u(x, 0) = f(x), \\ &u_t(x, 0) = g(x). \end{aligned} \tag{X.150}$$

Предположим, что f и g имеют носители в шаре S_R^0 радиуса R с центром в нуле. Тогда решение (X.150) задается формулой

$$u(t) = \cos(tB) f + B^{-1} \sin(tB) g,$$

или, после выполнения преобразования Фурье,

$$\hat{u}(k, t) = \cos\left(t\sqrt{k^2+m^2}\right)\hat{f}(k) + (k^2+m^2)^{-1/2} \sin\left(t\sqrt{k^2+m^2}\right)\hat{g}(k).$$

По теореме Пэли—Винера (для распределений), $\hat{f}$ и $\hat{g}$—целые аналитические функции и существуют такие постоянные C_i и целые числа N_i, что

$$|\hat{f}(k)| \leqslant C_1 (1+|k|^2)^{N_1} e^{|\operatorname{Im} k| R},$$
$$|\hat{g}(k)| \leqslant C_2 (1+|k|^2)^{N_2} e^{|\operatorname{Im} k| R}.$$

Далее, поскольку корни разложимы в степенные ряды, функции $\cos\left(t\sqrt{k^2+m^2}\right)$ и $(k^2+m^2)^{-1/2} \sin\left(t\sqrt{k^2+m^2}\right)$ тоже целые и удовлетворяют неравенствам

$$\left|\cos\left(t\sqrt{k^2+m^2}\right)\right| \leqslant C_3 e^{|\operatorname{Im} k| t},$$
$$\left|(k^2+m^2)^{-1/2} \sin\left(t\sqrt{k^2+m^2}\right)\right| \leqslant C_4 e^{|\operatorname{Im} k| t}.$$

Значит, $\hat{u}(k, t)$ — целая функция k, и существуют такие константа C и целое число N, что

$$|\hat{u}(k, t)| \leqslant C(1+|k|^2)^N e^{|\operatorname{Im} k|(R+t)}.$$

Тогда вследствие обратной теоремы Пэли — Винера $u(x, t)$ имеет носитель в $S^0_{R+t} = \mathscr{C}(S^0_R, t)$. Из трансляционной инвариантности уравнения немедленно следует, что если f и q имеют носители в произвольной сфере S, то $u(x, t)$ имеет носитель в $\mathscr{C}(S, t)$. Наконец, если f и q имеют носители в Σ, то можно для любого данного $\varepsilon > 0$ найти конечное число таких сфер $S_1, \ldots, S_M$, что $\Sigma \subset \bigcup_{i=1}^{M} S_i$ и $\bigcup_{i=1}^{M} S_i \subset \mathscr{C}(\Sigma, \varepsilon)$. Опять опираясь на то, что решение линейно зависит от начальных данных, легко заключаем, что носитель $u(x, t)$ лежит в множестве $\bigcup_{i=1}^{M} \mathscr{C}(S_i, t)$, которое содержится в $\mathscr{C}(\Sigma, t+\varepsilon)$. Так как ε было выбрано произвольным, то $u(x, t)$ имеет носитель в $\mathscr{C}(\Sigma, t)$.

Обратимся теперь к нелинейной задаче. Допустим, что при доказательстве теоремы X.72 мы выбрали $\tilde{X}_{T, \varepsilon, \varphi_0} = \{\varphi(\cdot) \in X_{T, \varepsilon, \varphi_0} \mid \operatorname{supp} \varphi(t) \subset \mathscr{C}(\Sigma, t)\}$ вместо $X_{T, \varepsilon, \varphi_0}$. Тогда все оценки по-прежнему останутся в силе, и мы должны убедиться только в том, что

$$(S\varphi)(t) = e^{-itA}\varphi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\varphi(s))ds$$

отображает $\tilde{X}_{T, \varepsilon, \varphi_0}$ в себя (в смысле свойств носителя). Из доказанного выше для линейного уравнения видно, что $e^{-iAt}\varphi_0$ имеет носитель в $\mathscr{C}(\Sigma, t)$. Далее, если $\operatorname{supp} \varphi(s) \subset \mathscr{C}(\Sigma, s)$, то

$$\operatorname{supp} J(\varphi(s)) = \operatorname{supp} \langle 0, -\lambda |u(s)|^2 u(s)\rangle \subset \operatorname{supp} \varphi(s) \subset \mathscr{C}(\Sigma, s),$$

так что в силу результата, относящегося к линейному случаю,

$$\operatorname{supp} \{e^{-iA(t-s)} J(\varphi(s))\} \subset \mathscr{C}(\Sigma, s+(t-s)) = \mathscr{C}(\Sigma, t).$$

Итак, $\int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\varphi(s))\, ds$ есть интеграл от функции со значениями в $L^2(\mathscr{C}(\Sigma, t))$, и потому он сам имеет носитель в $\mathscr{C}(\Sigma, t)$. Значит, S отображает $\tilde{X}_{T, \varepsilon, \varphi_0}$ в себя, так что единственная неподвижная точка $\varphi(t) = \langle u(x, t), u_t(x, t)\rangle$, являющаяся нашим решением, имеет носитель в $\mathscr{C}(\Sigma, t)$ при всяком t. ∎

В заключение этого раздела мы покажем, что в целом ряде случаев глобального решения не существует.

Пример. Применяя теоремы этого раздела, легко доказать локальное существование, единственность и гладкость решений такого уравнения на $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} &u_{tt}-u_{xx}=u^n, \\ &u(x,\ 0)=u_0(x), \\ &u_t(x,\ 0)=v_0(x), \end{aligned} \tag{X.151}$$

где $x\in\mathbb{R}$ и $n>1$. Далее, если u_0 и v_0 вещественнозначны, то и u вещественнозначно и, в силу прежних рассуждений, если u_0 и v_0 имеют компактный носитель, то и u при всех t имеет компактный носитель. Итак, пусть u — локальное решение (X.151), где u_0 и $v_0\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Мы покажем, что если u_0 и v_0 правильно выбраны, то

$$F(t)\equiv\int_{\mathbb{R}} u(x,\ t)^2\,dx$$

уходит на бесконечность за конечное время. Допустим, что $\alpha>0$ и начальные данные u_0 и v_0 таковы, что

(A) $\qquad (F(t)^{-\alpha})''\leqslant 0$ при всех $t\geqslant 0$,

(B) $\qquad (F(t)^{-\alpha})'<0$ при $t=0$.

Тогда $F(t)^{-\alpha}$ обратится в нуль за конечное время; см. рис. X.8. Условие (B) автоматически будет выполнено, если мы выберем u_0 и v_0 одного знака на $(-\infty,\ \infty)$, ибо

$$(F(0)^{-\alpha})'=-\alpha F(0)^{-1-\alpha}F'(0)=-2\alpha F(0)^{-1-\alpha}\int u_0v_0\,dx,$$

так что остается позаботиться о том, чтобы выполнялось (A).

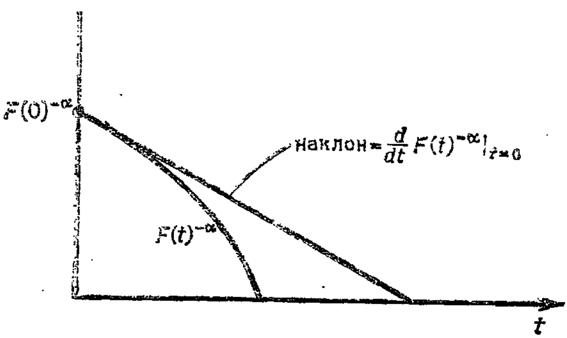

Рис. X.8. График $F(t)^{-\alpha}$.

Так как $F(t) \geqslant 0$, это равносильно тому, чтобы доказать неравенство $Q(t) \geqslant 0$, где

$$Q(t) \equiv (-\alpha)^{-1} F^{\alpha+2} (F^{-\alpha})'' = F''F - (\alpha+1)(F')^2.$$

Но

$$F'(t) = 2\int uu_t\,dx,$$

$$F''(t) = 2\int (uu_{tt} + u_t^2)dx =$$
$$= 4(\alpha+1)\int u_t^2 dx + 2\int (uu_{tt} - (2\alpha+1)u_t^2)\,dx,$$

так что

$$Q(t) = 4(\alpha+1)\left\{\left(\int u^2\,dx\right)\left(\int u_t^2\,dx\right) - \left(\int uu_t\,dx\right)^2\right\} +$$
$$+ 2F(t)\left\{\int uu_{tt}\,dx - \int (2\alpha+1)\,u_t^2\,dx\right\}.$$

Первый член в правой части положителен в силу неравенства Шварца, так что надо позаботиться лишь о том, чтобы было $H(t) \geqslant 0$, где

$$H(t) \equiv \int uu_{tt}\,dx - (2\alpha+1)\int u_t^2\,dx =$$
$$= \int u^{n+1}\,dx + \int uu_{xx}\,dx - (2\alpha+1)\int u_t^2\,dx =$$
$$= \int u^{n+1}\,dx - \int u_x^2\,dx - (2\alpha+1)\int u_t^2\,dx.$$

Сохраняющаяся энергия для (X.151) есть

$$E(t) = \frac{1}{2}\int (u_x^2 + u_t^2)\,dx - \frac{1}{n+1}\int u^{n+1}\,dx.$$

Значит, $E(t)$ не зависит от t. Поэтому, выбрав α таким, что $2(2\alpha+1) = n+1$, получим

$$H(t) = -(n+1)\,E(t) + 2\alpha\int u_x^2\,dx =$$
$$= -(n+1)\,E(0) + 2\alpha\int u_x^2\,dx. \qquad \text{(X.152)}$$

Значит, если $E(0) < 0$, то H всегда строго положительно, так как $\alpha = (n-1)/4 \geqslant 0$. Выбирая теперь $u_0 \geqslant 0$, $v_0 \geqslant 0$ так, чтобы выполнялось (B), мы затем изменим шкалу u_0, умножая ее на положительную константу, чтобы стало $E(0) < 0$ (это должно произойти, так как $n+1 > 2$). Для всех таких начальных данных $F(t)$ обращается в бесконечность за конечное время.

Если мы теперь рассмотрим другое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = -u^n,$$

то $H(t)$ снова удовлетворяет (X.152), но теперь сохраняющаяся энергия есть

$$E(t) = \frac{1}{2}\int (u_x^2 + u_t^2)\,dx + \frac{1}{n+1}\int u^{n+1}\,dx.$$

Если n четно, то, выбирая $u_0(x) \leqslant 0$, $v_0(x) \leqslant 0$ (т. е. обеспечивая выполнение (B)) и считая u_0 достаточно большим по абсолютной величине, мы можем получить $E(0) \leqslant 0$, и тогда решение уйдет на бесконечность за конечное время. Если, с другой стороны, n нечетно, то $E(t)$ всегда больше или равно нулю, так что предыдущее рассуждение не проходит. Но это и не удивительно, так как случай $-u^3$ есть как раз одномерный аналог с нулевой массой уравнения (X.138), для которого мы доказали существование глобального решения.

X.14. Методы гильбертова пространства в классической механике

В этом последнем разделе, посвященном вопросу о существовании динамики, мы хотим кратко описать подход к классической механике, основанный на методах пространства L^2, сравнить его с квантовой механикой и рассмотреть его недостатки. Здесь мы будем иметь дело с системами, фазовое пространство которых есть $\mathbb{R}^{6N}$ (или $\mathbb{R}^{6N}$ с некоторыми исключенными сингулярными множествами); обсуждение более общих симплектических многообразий отложим до Замечаний.

Начнем с формальных элементов этой теории. В $\mathbb{R}^{6N}$ имеется избранная система координат p_i, q_i $(i=1, \ldots, 3N)$, и точка в этом **фазовом пространстве** движется в соответствии с уравнениями движения

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{X.153}$$

где H—энергия. В частности, консервативная ньютонова система

$$m_i \ddot{q}_i(t) = F_i(q_1, \ldots, q_{3N})$$

с

$$F_i(q) = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

имеет форму (X.153), если $H = \sum_{i=1}^{3N} (2m_i)^{-1} p_i^2 + V$.

В общем случае (X.153) есть нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение в конечномерном векторном пространстве. Существует стандартный метод представления такой системы в виде *линейного* уравнения в бесконечномерном пространстве. Суть в том, что действие переносится с точек на функции. Пусть $\omega(q_0, p_0, t) = \langle q(t), p(t) \rangle$, где $\langle q(t), p(t) \rangle$ есть решение урав-