Если n четно, то, выбирая $u_0(x) \leqslant 0$, $v_0(x) \leqslant 0$ (т. е. обеспечивая выполнение (B)) и считая u_0 достаточно большим по абсолютной величине, мы можем получить $E(0) \leqslant 0$, и тогда решение уйдет на бесконечность за конечное время. Если, с другой стороны, n нечетно, то $E(t)$ всегда больше или равно нулю, так что предыдущее рассуждение не проходит. Но это и не удивительно, так как случай $-u^3$ есть как раз одномерный аналог с нулевой массой уравнения (X.138), для которого мы доказали существование глобального решения.

X.14. Методы гильбертова пространства в классической механике

В этом последнем разделе, посвященном вопросу о существовании динамики, мы хотим кратко описать подход к классической механике, основанный на методах пространства L^2, сравнить его с квантовой механикой и рассмотреть его недостатки. Здесь мы будем иметь дело с системами, фазовое пространство которых есть $\mathbb{R}^{6N}$ (или $\mathbb{R}^{6N}$ с некоторыми исключенными сингулярными множествами); обсуждение более общих симплектических многообразий отложим до Замечаний.

Начнем с формальных элементов этой теории. В $\mathbb{R}^{6N}$ имеется избранная система координат p_i, q_i $(i = 1, \ldots, 3N)$, и точка в этом **фазовом пространстве** движется в соответствии с уравнениями движения

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{X.153}$$

где H — энергия. В частности, консервативная ньютонова система

$$m_i \ddot{q}_i(t) = F_i(q_1, \ldots, q_{3N})$$

с

$$F_i(q) = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

имеет форму (X.153), если $H = \sum_{i=1}^{3N} (2m_i)^{-1} p_i^2 + V$.

В общем случае (X.153) есть нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение в конечномерном векторном пространстве. Существует стандартный метод представления такой системы в виде *линейного* уравнения в бесконечномерном пространстве. Суть в том, что действие переносится с точек на функции. Пусть $\omega(q_0, p_0, t) = \langle q(t), p(t) \rangle$, где $\langle q(t), p(t) \rangle$ есть решение уравнения (X.153) с начальными данными $q(0)=q_0$, $p(0)=p_0$. Тогда ω отображает $\mathbb{R}^{6N+1}$ в $\mathbb{R}^{6N}$. Положим

$$(U_t f)(q, p) = f(\omega(q, p; t)), \tag{X.154}$$

где f — комплекснозначная функция на $\mathbb{R}^{6N}$. Имеем $U_t U_s = U_{t+s}$. Мы можем формально вычислить инфинитезимальный генератор $i\, dU_t/dt$:

$$\left.\frac{d(U_t f)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \{f, H\} \tag{X.155}$$

согласно (X.153), где

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

есть скобка Пуассона. Очевидно, что

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \tag{X.156}$$

а интегрирование по частям показывает, что

$$\int h \{f, g\}\, d^{3N}p\, d^{3N}q = \int \{h, f\}\, g d^{3N}p\, d^{3N}q, \tag{X.157}$$

если $f, g, h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{6N})$.

Эти предварительные формальные манипуляции подсказывают следующее

Определение. Для данной произвольной локально интегрируемой функции $H(p, q)$ на $\mathbb{R}^{6N}$ назовем **формой Лиувилля** квадратичную форму на $L^2(\mathbb{R}^{6N}, d^{3N}p\, d^{3N}q)$ с областью определения $Q(l) = C_0^\infty(\mathbb{R}^{6N})$, заданную формулой

$$l(f, g) = \int \{\bar{f}, g\}\, H d^{3N}p\, d^{3N}q. \tag{X.158}$$

Если H есть C^1-функция, определим **оператор Лиувилля** на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{6N})$, полагая

$$Lf = \{f, H\}. \tag{X.159}$$

Пользуясь (X.156) и (X.157), легко доказать (задача 78) следующее

Предложение.

(a) Форма Лиувилля кососимметрична, т. е.

$$l(f, g) = -\overline{l(g, f)}. \tag{X.160}$$

(b) Если $H \in C^1$ и $f, g \in D(L)$, то

$$(f, Lg) = l(f, g).$$

(c) $-iL$ есть симметрический оператор.

Если нам известен факт *глобального* существования и единственности решений классического обыкновенного дифференциального уравнения (X.153), то можно сказать больше:

Теорема X.78. Пусть H есть C^1-функция. Допустим, что для любых q_0, p_0 существует единственная C^1-функция $\omega(q_0, p_0; t)$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^{6N}$, удовлетворяющая (X.153) с начальным условием $\omega(q_0, p_0; 0) = \langle q_0, p_0 \rangle$. Допустим, что $\omega: \mathbb{R}^{6N+1} \to \mathbb{R}^{6N}$ есть C^1-функция. Тогда U_t — унитарная однопараметрическая группа с инфинитезимальным генератором $-i\bar{L}$. Более того, $-iL$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{6N})$.

Утверждение об унитарности U_t называется **теоремой Лиувилля**.

Доказательство. Пусть $D = C_0^1(\mathbb{R}^{6N})$. При помощи рассуждений, основанных на использовании аппроксимативной единицы (см. обсуждение в § VIII.1), легко показать, что $D \subset D(\bar{L})$ и что $\bar{L}f = \{f, H\}$ для любого $f \in D$. Поэтому $\bar{L}$ кососимметричен на D. Далее, так как ω по условию лежит в C^1, то $U_t f$ лежит в C^1 при каждом фиксированном t. Так как $\omega(\cdot, \cdot; t)$ — однопараметрическая группа отображений $\mathbb{R}^6$ в $\mathbb{R}^6$, то

$$\{\langle p, q \rangle \mid \omega(p, q; t) \in \operatorname{supp} f\} = \{\omega(p, q; -t) \mid \langle p, q \rangle \in \operatorname{supp} f\}$$

компактно для $f \in D$ как непрерывный образ компактного множества. Значит, семейство отображений U_t, определенных на D, есть однопараметрическая группа операторов из D в D. Более того, для любой f из D

$$\frac{d}{dt} U_t f \Big|_{t=0} = \{f, H\} = \bar{L}f. \tag{X.161}$$

Чтобы в этом убедиться, заметим, что

$$t^{-1}[U_t f(q, p) - f(q, p)] - \{f, H\}(q, p) = \\ = \frac{f(\omega(p, q; t)) - f(\omega(p, q; 0))}{t} - \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

сходится к нулю поточечно в силу правила дифференцирования сложных функций. Более того, так как f имеет компактный носитель и обе функции f и ω равномерно удовлетворяют условию Липшица на компактных множествах, можно мажорировать $t^{-1}(U_t f - f)$ функцией из L^2. Тогда по теореме о мажорированной сходимости

$$\| t^{-1}(U_t f - f) - \{f, H\} \|_2 \to 0,$$

откуда получаем (X.161).

Из кососимметричности L следует, что $\frac{d}{dt} \| U_t f \|^2 = 0$, поэтому U_t ограничен на D и $\| U_t f \| = \| f \|$. Значит, U_t продолжается до унитарного оператора на $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^{6N})$. Далее, U_t задается посредством (X.154) на D и каждая $f\in\mathscr{H}$ может быть аппроксимирована функциями $f_n\in D$ так, что $f_n\to f$ поточечно почти всюду; поэтому U_t задается с помощью (X.154) на всем $\mathscr{H}$. Так как функция $t\to U_tf$ непрерывна для $f\in C_0^1$, она непрерывна на $\mathscr{H}$. Наконец, в силу инвариантности D относительно U_t, равенства (X.161) и теоремы VIII.11, $-i\bar{L}$ самосопряжен в существенном на D и является инфинитезимальным генератором группы U_t. ∎

К сожалению, обычно нелегко доказать, что классические уравнения движения имеют глобальные решения, хотя если потенциал V гладкий и уходит на $+\infty$ при $|x|\to\infty$, то ясно, что кривые, изображающие решение, должны оставаться ограниченными, так что глобальные решения существуют. Мы сейчас увидим, как доказать глобальное существование для гладких V, которые не слишком плохо ведут себя на бесконечности. Однако многие представляющие интерес потенциалы V обладают сингулярностями при конечных q, и уравнения движения нарушаются из-за «столкновений». В таких случаях естественно требовать глобального существования для почти всех начальных условий, но такая задача не решена даже для чисто кулоновых сил при $N\geqslant 4$. Потерпев здесь неудачу, можно было бы попробовать доказать самосопряженность в существенном оператора $-iL$ на каком-нибудь подходящем множестве, скажем $C_0^\infty(M)$, где M — плотное множество, полученное выкидыванием из $\mathbb{R}^n$ сингулярных точек. Но и эта задача не решена!

Интересно выяснить, почему задачи самосопряженности настолько легче решаются в квантовой механике. К тому есть несколько оснований; мы начнем с самого главного.

(1) В обычном случае, когда $H=p^2+V(q)$, $-iL$ *никогда* не ограничен снизу (или сверху). В самом деле, положим

$$(\theta f)(p,\ q)=f(-p,\ q).$$

Тогда

$$\theta L\theta^{-1}=-L.$$

Это в точности отражает тот факт, что $\omega(-p,\ q;\ t)=\omega(p,\ q;\ -t)$ («инвариантность относительно обращения времени»), или $\theta(iL)\theta^{-1}=-iL$. Но раз $-iL$ не ограничен, он не может быть и полуограниченным. Если мы определим C формулой

$$Cf=\overline{\theta f},$$

то C есть комплексное сопряжение и $C(-iL)C^{-1}=-iL$, так что $-iL$ имеет самосопряженные расширения в силу теоремы фон Неймана (теорема X.3).

Сравним это положение с квантовой механикой, где $Cf=\bar{f}$ и $CHC^{-1}=H$, но где не существует вещественной линейной θ со свойством $\theta H\theta^{-1}=-H$, вынуждающим H быть неограниченным одновременно и сверху и снизу.

Заметим, что в обоих случаях $CqC^{-1}=q$, $CpC^{-1}=-p$.

(2) Между p и q нет никакой зависимости. Поэтому если V не ограничен снизу, то этим свойством обладает и $H(p, q)$, тогда как в квантовой теории оператор энергии может быть ограниченным снизу вследствие принципа неопределенности.

(3) В оператор энергии $-\Delta+V$ входит только V, тогда как в L входят производные V. Поэтому сингулярности в L становятся только хуже, так что, например, в кулоновом случае $C_0^\infty\subset \subset D(H_{\text{quantum}})$, но $C_0^\infty \not\subset D(L)$.

В заключение приведем одну элементарную теорему существования для системы (X.153), из которой следует кососопряженность L в некоторых случаях; ее основная идея уже применялась нами не раз (см. дополнение к § X.1 и § X.13) и является классическим аналогом коммутаторной теоремы Нельсона (см. пример 4 в § X.5).

Теорема X.79. Пусть V есть C^2-функция на $\mathbb{R}^{3N}$ и $|\operatorname{grad} V(q)|\leqslant \leqslant C(q^2+1)^{1/2}$ с подходящей константой C. Пусть $H(p, q)= = \sum_{i,j=1}^{3N} a_{ij}p_ip_j+V(q)$, где a — строго положительно определенная матрица. Тогда для любого $\langle p_0, q_0\rangle\in\mathbb{R}^{6N}$ существует единственная C^1-функция $\omega(p_0, q_0; t)$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^{6N}$, удовлетворяющая (X.153) с начальным условием $\langle p_0, q_0\rangle$. Более того, $\omega(p_0, q_0; t)$ есть C^1-отображение $\mathbb{R}^{6N+1}$ в $\mathbb{R}^{6N}$.

Доказательство. Поскольку $V\in C^2$, функции в левой части (X.153) равномерно удовлетворяют условию Липшица и равномерно ограничены на компактных подмножествах $\mathbb{R}^{6N}$. Значит, для каждого A существует такое $t(A)>0$, что если $p_0^2+q_0^2+1\leqslant A$, то (X.153) можно решить для $|t|<t(A)$; см. § V.6. Фиксируем теперь начальные условия $\langle p_0, q_0\rangle$. Пусть $(-T_0, T_1)$ — максимальный интервал, на котором можно решить (X.153) с начальным условием $\langle p_0, q_0\rangle$. Мы покажем, что T_1 есть ∞. В самом деле, допустим, что это не так. Для $0\leqslant t<T_1$ положим

$$N(t)=p(t)^2+q(t)^2+1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot N(t)&=2\dot pp+2\dot qq\leqslant\\ &\leqslant 2|p(t)||\operatorname{grad} V(q(t))|+2\|a\||p(t)||q(t)|\leqslant\\ &\leqslant 2(C+\|a\|)(q(t)^2+1)^{1/2}|p(t)|\leqslant (C+\|a\|)N(t).\end{aligned}$$

Отсюда $N(t) \leqslant N(0)\exp[(C+\|a\|)t]$ при всех $t>0$. Пусть t_0 — это $t(A)$ для $A=N(0)\exp[(C+\|a\|)T_1]$. Выберем $t \in (T_1-t_0, T_1)$. Тогда можно решить (X.153) с начальным условием $\langle p(t), q(t)\rangle$. Сшивая это решение с уже построенным решением, мы получим решение в интервале $(-T_0, t+t_0)$, что противоречит максимальности. Значит, $T_1=\infty$ и аналогично $T_0=\infty$.

Согласно методам § X.13, ω принадлежит C^1 в области, полученной с помощью однократного применения принципа сжимающих отображений. При помощи тех же рассуждений, что и выше, любое t может быть достигнуто посредством конечнократного применения принципа сжимающих отображений (со все бо́льшими начальными временами). ∎

Следствие. При условиях теоремы X.79 оператор Лиувилля L кососопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$, т. е. $L^{**}=-L^*$.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ X.1. Центральная теорема этого раздела (теорема X.2) была доказана Дж. фон Нейманом в работе: J. von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 49—131. Приведенное нами доказательство заимствовано из книги Н. Данфорда и Дж. Шварца, Линейные операторы, т. II, «Мир», М., 1966, которые отмечают, что их доказательство во многом совпадает с подходом, развитым Калкином в статье: J. Calkin, Abstract symmetric boundary conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 45 (1939), 369—442. В первоначальном подходе фон Неймана важную роль играло преобразование Кэли симметрического оператора A; оно формально определяется как $V=(A-i)(A+i)^{-1}$. Некоторые аспекты доказательства становятся более ясными на языке преобразований Кэли, однако связь с граничной задачей затемняется. Доказательство с использованием преобразования Кэли состоит из следующих главных элементов: (i) V определяется как отображение из $\overline{\operatorname{Ran}(A+i)}$ в $\overline{\operatorname{Ran}(A-i)}$, и можно показать, что V есть частичная изометрия; (ii) индексы дефекта A суть в точности коразмерности начального и конечного подпространства отображения V; (iii) замкнутые симметрические расширения A находятся во взаимно однозначном соответствии с расширениями V, являющимися частичными изометриями. Самосопряженные расширения находятся во взаимно однозначном соответствии с унитарными расширениями V. Унитарные расширения V, очевидно, характеризуются произвольным унитарным отображением из $D(V)^\perp$ в $\operatorname{Ran}(V)^\perp$. Таким образом, мы приходим к выводу, что самосопряженные расширения A существуют только тогда, когда $D(V)=\overline{\operatorname{Ran}(A+i)}$ и $\operatorname{Ran} V=\overline{\operatorname{Ran}(A-i)}$ имеют одинаковые коразмерности n, и что эти расширения естественным способом параметризуются унитарными отображениями из одного n-мерного пространства в другое. Дополнительный материал о теории расширений с точки зрения преобразования Кэли см. в книге Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», М., 1966. Обсуждение «физической важности» самосопряженности содержится в статье: A. S. Wightman, Introduction to some aspects of the relativistic dynamics of quantized fields, in High Energy Electromagnetic Interactions and Field Theory (M. Levy, ed.), Gordon and Breach, New York, 1967. Литературу о проблеме моментов см. в Замечаниях к § X.6.