УКАЗАНИЯ ЧИТАТЕЛЮ

В этой главе развита техника доказательства существования решений основных динамических уравнений для широкого круга разнообразных физических задач. Мы интересуемся приложениями к квантовой механике и квантовой теории поля, а в этих случаях существование динамики «эквивалентно» самосопряженности гамильтониана. Таким образом, техника здесь сводится к методам доказательства самосопряженности заданного оператора. В следующей таблице перечислены разделы, где доказывается самосопряженность разных физических операторов.

	Разделы
Гамильтонианы атомов	2
Гамильтонианы эффекта Штарка	5, 1 (дополнение) для одномерного случая
Гамильтонианы эффекта Зеемана	4
Ангармонический осциллятор	2, 4, 6, 9, 10
Квантовополевые гамильтонианы	7, 9
Квантовополевые операторы	5, 6, 7

Читателю не обязательно знать весь материал гл. IX, прежде чем приступать к изучению гл. X. Однако он должен быть знаком с основными свойствами преобразования Фурье, изложенными в § IX.1 и IX.2, и свойствами свободного гамильтониана, которые обсуждаются в § IX.7, так как этот материал все время привлекается в гл. X без каких-либо пояснений. Остальные теоремы о преобразовании Фурье (например, теоремы Пэли—Винера и интерполяционные теоремы) тоже применяются, но читатель в случае необходимости может легко вернуться к соответствующим местам гл. IX.

Ниже мы опишем содержание гл. X раздел за разделом, а пока дадим общее резюме. Основные свойства самосопряженных операторов обсуждаются в § VIII.3 и § X.1 и X.2. Читатель, интересующийся квантовой механикой, должен знать еще содержание § VIII.11 и § 1 (дополнение), 2, 3, 4, 5, 11 и 12 гл. X. Основные понятия квантовой теории поля рассмотрены в § IX.8 и X.7. Читатель, интересующийся квантовой теорией поля, должен познакомиться также с математическими методами, изложенными в § 5, 6, 9, 10 и 11 гл. X. Приемы установления самосопряженности можно применять для доказательства существования и регулярности решений некоторых типов дифференциальных уравнений в частных производных. Эти приложения рассматриваются в § 3, 8, 12 и 13 гл. X. Дополнение к § 1 содержит приложения к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

В § 1 описаны с помощью теории индексов дефекта замкнутые симметрические расширения симметрических операторов. Доказана теорема фон Неймана о том, что симметрический оператор, коммутирующий с оператором сопряжения, имеет самосопряженные расширения. В дополнении к § 1 рассмотрены критерии Вейля (предельная окружность—предельная точка) и проведено сравнение квантового и классического движений на полупрямой.

В § 2 доказана теорема Като—Реллиха о малых возмущениях самосопряженных операторов и теорема КЛМН о малых возмущениях форм. Теорема Като—Реллиха затем применяется для доказательства самосопряженности гамильтонианов атомов.

В § 3 и 4 применяются два различных понятия положительности. В § 3 изучаются положительные квадратичные формы и обсуждаются свойства расширения по Фридрихсу. В § 4 выводится неравенство Като для обобщенных функций, а затем оно применяется для доказательства того, что оператор $-\Delta+V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, если V локально принадлежит L^2 и ограничен снизу. Далее эта техника применяется к доказательству самосопряженности гамильтониана эффекта Зеемана.

В § 5 показано, что если A мажорируется строго положительным оператором N и коммутатор $[A, N]$ достаточно мал, то A самосопряжен в существенном на любой существенной области оператора N. Затем этот результат применяется при доказательстве самосопряженности гамильтониана эффекта Штарка.

В § 6 доказан критерий Нельсона самосопряженности оператора в терминах аналитических векторов.

В § 7 определено свободное скалярное эрмитово бозе-поле с массой $m > 0$ и доказано, что оно удовлетворяет аксиомам Гординга—Вайтмана. Этот раздел следует читать совместно с § IX.8. Здесь вводится также Q-пространство и гамильтониан с пространственным обрезанием для теории поля с $(\varphi^4)_2$-взаимодействием. В дополнении к этому разделу показано, что для разных m свободные эрмитовы поля порождают неэквивалентные представления канонических коммутационных соотношений.

В § 8 рассмотрены естественные обобщения многих методов доказательства самосопряженности операторов на банаховы пространства. Описаны генераторы сжимающих полугрупп (теоремы Хилле—Иосиды и Люмера—Филлипса) и введены голоморфные полугруппы. Эта техника применяется для доказательства различных свойств решений уравнения теплопроводности.

В § 9 рассмотрен специальный класс полугрупп—гиперсжимающие полугруппы и доказана самосопряженность в существенном гамильтониана с пространственным обрезанием для квантовой теории поля с $(\varphi^4)_2$-взаимодействием.

В § 10 продолжается рассмотрение методов доказательства самосопряженности, связанных с понятием граф-предела, которое было начато в § VIII.7.

В § 11 рассмотрены интегралы Фейнмана по путям, интегрирование в функциональном пространстве и доказана формула Фейнмана—Каца.

В § 12 доказано существование решений уравнения $U'(t) = -A(t)U(t)$, где $A(t)$—соответствующее семейство операторов в банаховом пространстве. Этот результат применяется к решению уравнения Шредингера с зависящими от времени потенциалами и уравнения теплопроводности с зависящими от времени источниками и стоками.

В § 13 доказаны существование, гладкость и конечность скорости распространения решений нелинейного уравнения $(\Box^2 + m^2)\, u = \lambda u^3$.

В § 14 совсем кратко описана переформулировка классической механики как некоторой задачи в гильбертовом пространстве.