Отсюда $N(t) \leqslant N(0)\exp[(C+\|a\|)t]$ при всех $t>0$. Пусть t_0 — это $t(A)$ для $A=N(0)\exp[(C+\|a\|)T_1]$. Выберем $t \in (T_1-t_0, T_1)$. Тогда можно решить (X.153) с начальным условием $\langle p(t), q(t)\rangle$. Сшивая это решение с уже построенным решением, мы получим решение в интервале $(-T_0, t+t_0)$, что противоречит максимальности. Значит, $T_1=\infty$ и аналогично $T_0=\infty$.

Согласно методам § X.13, ω принадлежит C^1 в области, полученной с помощью однократного применения принципа сжимающих отображений. При помощи тех же рассуждений, что и выше, любое t может быть достигнуто посредством конечнократного применения принципа сжимающих отображений (со все бо́льшими начальными временами). ∎

Следствие. При условиях теоремы X.79 оператор Лиувилля L кососопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$, т. е. $L^{**}=-L^*$.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ X.1. Центральная теорема этого раздела (теорема X.2) была доказана Дж. фон Нейманом в работе: J. von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 49—131. Приведенное нами доказательство заимствовано из книги Н. Данфорда и Дж. Шварца, Линейные операторы, т. II, «Мир», М., 1966, которые отмечают, что их доказательство во многом совпадает с подходом, развитым Калкином в статье: J. Calkin, Abstract symmetric boundary conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 45 (1939), 369—442. В первоначальном подходе фон Неймана важную роль играло преобразование Кэли симметрического оператора A; оно формально определяется как $V=(A-i)(A+i)^{-1}$. Некоторые аспекты доказательства становятся более ясными на языке преобразований Кэли, однако связь с граничной задачей затемняется. Доказательство с использованием преобразования Кэли состоит из следующих главных элементов: (i) V определяется как отображение из $\overline{\operatorname{Ran}(A+i)}$ в $\overline{\operatorname{Ran}(A-i)}$, и можно показать, что V есть частичная изометрия; (ii) индексы дефекта A суть в точности коразмерности начального и конечного подпространства отображения V; (iii) замкнутые симметрические расширения A находятся во взаимно однозначном соответствии с расширениями V, являющимися частичными изометриями. Самосопряженные расширения находятся во взаимно однозначном соответствии с унитарными расширениями V. Унитарные расширения V, очевидно, характеризуются произвольным унитарным отображением из $D(V)^\perp$ в $\operatorname{Ran}(V)^\perp$. Таким образом, мы приходим к выводу, что самосопряженные расширения A существуют только тогда, когда $D(V)=\overline{\operatorname{Ran}(A+i)}$ и $\operatorname{Ran} V=\overline{\operatorname{Ran}(A-i)}$ имеют одинаковые коразмерности n, и что эти расширения естественным способом параметризуются унитарными отображениями из одного n-мерного пространства в другое. Дополнительный материал о теории расширений с точки зрения преобразования Кэли см. в книге Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», М., 1966. Обсуждение «физической важности» самосопряженности содержится в статье: A. S. Wightman, Introduction to some aspects of the relativistic dynamics of quantized fields, in High Energy Electromagnetic Interactions and Field Theory (M. Levy, ed.), Gordon and Breach, New York, 1967. Литературу о проблеме моментов см. в Замечаниях к § X.6.

Имеется другое доказательство теоремы X.3, принадлежащее, по существу, Галиндо (A. Galindo, On the existence of J-self-adjoint extensions of J-symmetric operators with adjoint, *Comm. Pure Appl. Math.*, **15** (1962), 423—425). Мы наметим это доказательство, которое обходится без теории самосопряженных расширений (ценой применения леммы Цорна). Пусть A удовлетворяет условиям теоремы X.3. Тогда по лемме Цорна A имеет расширение B, обладающее такими тремя свойствами:

(i) $CB = BC$,

(ii) $B \subset B^*$,

(iii) B максимален по отношению к условиям (i) и (ii).

Допустим, что $B \neq B^*$. Тогда можно найти такую ненулевую пару $\langle\varphi, \psi\rangle \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, что

(iv) $\langle\varphi, \psi\rangle \in \Gamma(B^*) \cap \Gamma(B)^{\perp}$.

Так как $C \oplus C$ оставляет и $\Gamma(B)$, и $\Gamma(B^*)$ инвариантными (вследствие (i)), то $\langle(I+C)\varphi, (I+C)\psi\rangle$ и $\langle i(I-C)\varphi, i(I-C)\psi\rangle$ лежат в $\Gamma(B^*) \cap \Gamma(B)^{\perp}$ и по крайней мере одна из этих пар ненулевая. Поэтому можно предположить, что

(v) $\langle C\varphi, C\psi\rangle = \langle\varphi, \psi\rangle$.

Пусть $\tilde{\Gamma} = \Gamma(B) \oplus \{\alpha\langle\varphi, \psi\rangle \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$. Так как $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma(B^*)$, то $\tilde{\Gamma}$ — график оператора $\tilde{B}$. Поскольку $C \oplus C$ оставляет $\tilde{\Gamma}$ поточечно инвариантным, $\tilde{B}$ удовлетворяет (i). Более того, так как $\langle\varphi, \psi\rangle \in \Gamma(B)^{\perp}$, то получаем, что для любого $\eta \in D(B)$

$$(\varphi+\eta, \tilde{B}(\varphi+\eta)) = (\varphi, \psi) + (\eta, B\eta).$$

В силу (v), (φ, ψ) вещественно, а в силу (ii), $(\eta, B\eta)$ вещественно, поэтому $\tilde{B}$ симметричен. А так как это находится в противоречии с (iii), то заключаем, что $B = B^*$ и A имеет самосопряженные расширения.

Кстати, из приведенного доказательства видно, что в предположениях теоремы X.3 A имеет самосопряженные расширения, коммутирующие с C; это следует также из более детального изучения расширений A. Существование таких расширений важно потому, что отсюда следует, что *в вещественном гильбертовом пространстве каждый симметрический оператор имеет самосопряженные расширения*. Действительно, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \oplus \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ можно рассматривать как комплексное гильбертово пространство с $i\langle\varphi, \psi\rangle = \langle -\psi, \varphi\rangle$. Положив $C\langle\varphi, \psi\rangle = \langle\varphi, -\psi\rangle$, мы видим, что каждый комплексный линейный оператор в $\mathcal{H}$, коммутирующий с C, имеет вид $A \oplus A$, где $A: \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Это обстоятельство вместе с теоремой X.3 в сильной форме приводит к указанному результату о симметрических операторах в вещественных гильбертовых пространствах. Дальнейшие рассуждения см. в задаче 81.

Изложение в дополнении к этому разделу следует в общих чертах неопубликованным лекциям Нельсона. Дальнейшее рассмотрение самосопряженности обыкновенных дифференциальных операторов можно найти в книге: Э. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958, и в гл. XIII указанной выше книги Данфорда и Шварца.

Обширные заметки об истории развития теории самосопряженности можно найти во втором томе книги Данфорда и Шварца; мы ограничимся только упоминанием, что теория предельных точек — предельных окружностей (теоремы X.6 и X.7) принадлежит Г. Вейлю, который высказал множество идей, важных для теории расширения неограниченных операторов, за много лет до построения фон Нейманом общей теории. См. H. Weyl, Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* (1909), 37—63; (1910), 442—467; Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **68** (1910), 220—269. Эти статьи можно найти также в Gesammelte Abhandlungen, B. I, Springer-Verlag, Berlin, 1968. Терминология предельных точек—предельных окружностей происходит из идеи рассматривать задачу самосопряженности для оператора $-d^2/dx^2+V(x)$ на (a, ∞) как предел соответствующих задач на интервалах (a, b) при $b \longrightarrow \infty$. Пусть φ и ψ—решения уравнения $-\varphi''(x)+V(x)\varphi(x)=i\varphi(x)$ на (a, ∞), удовлетворяющие условиям $\varphi(a)=\psi'(a)=0$, $-\varphi'(a)=\psi(a)=1$. При фиксированном b множество тех $z \in \mathbb{C}$, для которых $\eta=\varphi+z\psi$ удовлетворяет условию $(\cos\alpha)\,\eta(b)+(\sin\alpha)\,\eta'(b)=0$ с некоторым $\alpha \in [0, 2\pi)$, образует окружность C_b. При $b \longrightarrow \infty$ эта окружность либо сходится к некоторой предельной окружности, либо стягивается в некоторую предельную точку. В первом случае оба решения уравнения $-\varphi''(x)+V(x)\varphi(x)=i\varphi(x)$ принадлежат L^2 вблизи ∞; в последнем случае—только одно. Этот подход подробно рассматривается в книге Коддингтона и Левинсона.

Теорема X.8 появилась в статье: N. Levinson, Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators, *Časopis Pěst. Math. Fys.*, 74 (1949), 17—20. Заметим, что теорема X.7 имеет аналог для более общих интервалов, чем $[0, \infty)$; именно, если $V(x)$ непрерывен на (a, b), причем $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, то $-d^2/dx^2+V(x)$ отвечает случаю предельной точки и в a, и в b тогда и только тогда, когда $-d^2/dx^2+V(x)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(a, b)$. В частности, можно воспользоваться теоремой X.8 и получить другое доказательство в задаче 24 для одномерного случая. Теорема X.9 доказана А. Винтнером в статьях: A. Wintner, On the Normalization of Characteristic Differentials in Continuous Spectra, *Phys. Rev.*, **72** (1947), 516—517, и The Schwartzian derivative and the approximation method of Brillouin, *Quart. Appl. Math.*, **16** (1958), 82—86. Доказательство критерия Винтнера и многие другие критерии можно найти во втором томе Данфорда и Шварца. Случай предельной точки в теореме X.10 принадлежит Фридрихсу (K. Friedrichs, Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **112** (1935/36), 1—23), а случай предельной окружности—Сирсу (D. Sears, On the solutions of a linear second order differential equation which are of integrable square, *J. London Math. Soc.*, **24** (1949), 207—215). Наше доказательство родственно одному общему методу Курса (H. Kurss, A limit-point criterion for non-oscillatory Sturm—Liouville differential operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 445—449 (см. задачу 8)).

Первые примеры потенциалов, которые классически не полны, но квантовомеханически полны, были даны в цитированной выше статье Сирса 1949 г. Приведенные здесь примеры взяты из статьи: J. Rauch and M. Reed, Two examples illustrating the differences between classical and quantum mechanics, *Comm. Math. Phys.*, **29** (1973), 105—111, и основаны на советах Нельсона. X. Кальф любезно предоставил авторам свой детальный анализ примера Сирса. Пусть V_{ab}—потенциал на $(0, \infty)$, заданный в виде

$$V_{ab}(x)=\frac{2}{x^2}-9x^4(a-2b\cos(2x^3)),$$

где a и b лежат в интервале $(0, \infty)$. Тогда $-\varphi''+V_{ab}\varphi=0$ есть уравнение Матье, общее решение которого имеет вид

$$\frac{1}{x}\left(c_1 e^{\mu x^3}\varphi_{ab}(x^3)+c_2 e^{-\mu x^3}\varphi_{ab}(-x^3)\right),$$

где показатель μ зависит от a и b, а $\varphi_{ab}(x)$ есть C^∞-функция с периодом π, кроме тех случаев, когда $\langle a, b\rangle$ отвечает точке на одной из кривых на рис. X.9.

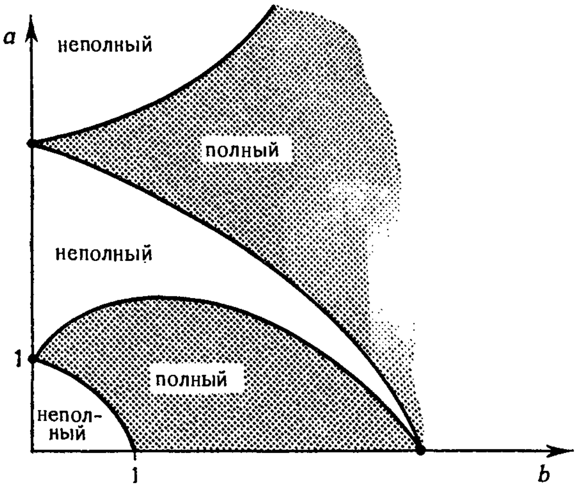

Рис. X.9. Полнота V_{ab} в квантовомеханическом случае.

Показатель μ чисто мнимый, если $\langle a, b\rangle$ принадлежит светлым областям на рисунке, и вещественный, если $\langle a, b\rangle$ лежит в темных областях. Ясно, что V_{ab} в нуле полон и в классическом, и в квантовомеханическом смысле. На бесконечности V_{ab} полон в квантовомеханическом смысле, если $\langle a, b\rangle$ попадает в темную область, так как в этом случае μ вещественно и, следовательно, одно из решений не лежит в L^2 вблизи бесконечности. Однако если $\langle a, b\rangle$ попадает в светлую область, то V_{ab} квантовомеханически не полон, так как оба решения принадлежат L^2 вблизи бесконечности. В классическом случае если $2b < a$, то $V_{ab}(x) \leqslant -bx^4$ вблизи бесконечности, так что классическая частица может уходить на бесконечность за конечное время, т. е. V_{ab} классически не полон. Но, с другой стороны, если $2b > a$, то пики потенциала становятся все выше и выше, так что V классически полон. С функциями Матье можно познакомиться по книгам: N. McLachlan, Theory and Applications of Mathieu functions, Oxford Univ. Press, London and New York, 1947, pp. 40, 98, или J. Meixner, F. Schäfke, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Springer-Verlag, Berlin, 1954, S. 132.

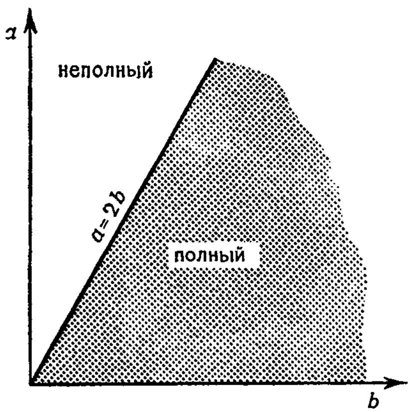

Рис. X.10. Полнота V_{ab} в классическом случае.

Многие критерии самосопряженности в существенном обыкновенных дифференциальных операторов, которые можно вывести из теории Вейля, допускают обобщения на дифференциальные операторы в частных производных. Существует аналог предложения 2, играющий важную роль в этих обобщениях; таким аналогом служит одна теорема Вейнгольца и Нильсона (E. Weinholtz, Bemerkungen über elliptische Differentialoperatoren, *Arch. der Math.*, 10 (1959), 126—133;

N. Nilsson, Essential self-adjointness and the spectral resolution of Hamiltonian operators, *Kungl. Fys. Sällsk. i Lund Förh*, **29** (1959)). Эта техника сыграла свою роль в различных многомерных обобщениях теоремы X.8 (см. Замечания к § X.5).

Во многих случаях результаты, получаемые методами Вейля, можно вывести проще и в большей общности при помощи методов § X.4 и X.5.

Рассмотренные нами примеры, когда классические и квантовомеханические условия полноты совпадают, требовали глобальных условий, т. е. условий, заданных всюду. Однако естественно ожидать, что частица может быть квантовомеханически захвачена набором достаточно широких барьеров, независимо от того, что делается между ними. Характерный пример такого положения в одномерном случае дает следующая теорема Р. С. Исмагилова (Об условиях самосопряженности дифференциальных операторов высшего порядка, *ДАН СССР*, **142** (1962), 1239—1242).

Теорема. Пусть $V(x)$ — непрерывная функция на $[0, \infty)$, и пусть существует последовательность интервалов (a_n, b_n), $b_n < a_{n+1}$, таких, что
(a) $V(x) \geqslant -(b_n - a_n)^{-2}$ при $x \in (a_n, b_n)$,
(b) $\sum (b_n - a_n)^2 = \infty$.

Тогда $-d^2/dx^2 + V(x)$ относится к случаю предельной точки на бесконечности, независимо от поведения $V(x)$ вне интервалов (a_n, b_n).

Отметим, что из условий (a) и (b) следует, что время классического прохождения через объединение интервалов (a_n, b_n) бесконечно.

Первые результаты этого общего типа, требующие ограничений только на интервалы, принадлежат Ф. Хартману (P. Hartman, The number of L^2-solutions of $x'' + q(t)x = 0$, *Amer. J. Math.*, **43** (1951), 635—645). Другие результаты, относящиеся к одномерному случаю, можно найти в статьях: M.S.P. Eastham, On a limit-point method of Hartman, *Bull. London Math. Soc.*, **4** (1972), 340—344, и Н. П. Купцов, Об условиях несамосопряженности линейного дифференциального оператора второго порядка, *ДАН СССР*, **138** (1961), 767—770. Теоремы такого рода, применимые к нецентральным потенциалам в многомерном случае, можно найти в статье: M.S.P. Eastham, W.D. Evans and J. B. McLeod, The Essential Self-Adjointness of Schrödinger-Type Operators, *Arch. Rational Mech. Anal.* Эти авторы приводят также примеры таких условий на V в трубе $\Omega \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^n$ (Ω ограничено и открыто в $\mathbb{R}^{n-1}$), что если V удовлетворяет этим условиям, то $-\Delta + V$ не будет самосопряжен в существенном на C_0^∞, независимо от поведения V вне трубы. Интуитивно это означает, что частица в этой трубе уходит на бесконечность за конечное время.

Оператор Лапласа — Бельтрами, введенный в примере 6, рассматривается в книге Мюллера: C. Müller, Spherical Harmonics, Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics, 17 (1966). В двумерном случае $B = d^2/d\theta^2$, $k_l = -l^2$ и каждому $l > 0$ отвечают две собственные функции, а именно $e^{\pm il\theta}$, а собственному значению $l = 0$ — постоянная функция. Утверждение о самосопряженности следует из того, что $\{e^{il\theta}\}_{l=-\infty}^{\infty}$ образуют базис в $L^2(0, 2\pi)$. В трехмерном случае

$$(Bg)(\theta, \phi) = (\sin\theta)^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\frac{\partial g}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\theta)^{-1}\frac{\partial g}{\partial\phi}\right\},$$

где θ и ϕ — обычные угловые переменные в сферических координатах. В этом случае $k_l = -l(l+1)$ и соответствующее собственное подпространство имеет размерность $2l+1$. В s-мерном случае $k_l = -l(l+s-2)$. Оператор B тесно связан с теорией представлений группы $SO(s)$. В частности, полнота собственных функций B связана с теоремой Петера — Вейля (см. гл. XIV).

§ X.2. Теорема X.12 принадлежит Ф. Реллиху (F. Rellich, Störungstheorie der Spektralzerlegung, II, *Math. Ann.*, **116** (1939), 555—570). Многочисленные приложения и обобщения теоремы Като—Реллиха можно найти в книге: Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, «Мир», М., 1972. В частности, теорема X.13 и специальный случай теоремы X.14, где условие (X.21a) заменено более сильным (X.21b) (или (X.21c), что эквивалентно), появились именно в этой книге. Теорема X.14 доказана Вюстом: R. Wüst, Generalizations of Rellich's theorem on perturbations of (essentially) self-adjoint operators, *Math. Z.*, **119** (1971), 276—280; дальнейшее обсуждение см. в работе R. Wüst, Holomorphic operator families and stability of self-adjointness, *Math. Z.*, **125** (1972), 349—358.

Приложение теоремы Реллиха к гамильтонианам атомов принадлежит Като: T. Kato, Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 195—211. Эта статья оказалась поворотным моментом в математической физике по двум причинам. Во-первых, доказательство самосопряженности было необходимым предварительным условием для того, чтобы приступить к задачам спектрального анализа и теории рассеяния, которые всегда занимали математическую физику. Во-вторых, эта статья привлекла внимание к конкретным системам, а не к вопросам оснований.

Теорема КЛМН в различных формах была доказана в работах: T. Kato, Quadratic forms in Hilbert space and asymptotic perturbation series, Technical report No.7, Univ. of California, 1955; J. Lions, Équations Différentielles operationelles et Problèmes aux Limites, Springer-Verlag, Berlin, 1961, Ch. II, Sec. 1, и P. Lax and A. Milgram, Parabolic Equations, in Contributions to the theory of partial differential equations, Ann. Math. Study, **33**, Princeton, N. J., 1954. Интерпретация этой теоремы в терминах шкалы пространств впервые подчеркнута Нельсоном: E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 1190—1197.

Записанная в виде операторных неравенств теорема X.18 несколько слабее, чем утверждение: «Если $0 \leqslant A^2 \leqslant B^2$, то $0 \leqslant A \leqslant B$», которое известно под названием монотонности квадратного корня. Это частный случай следующей теоремы Лёвнера (K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Z.*, **38** (1934), 177—216):

Теорема. Необходимое и достаточное условие того, что непрерывная вещественнозначная функция f на $(0, \infty)$ обладает свойством $f(A) \leqslant f(B)$ для всех пар самосопряженных операторов A, B, таких, что $0 < A \leqslant B$, состоит в том, что f есть сужение на $(0, \infty)$ некоторой функции f, аналитической в $\mathbb{C} \diagdown (-\infty, 0]$ со свойством $\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$ при всех z с $\operatorname{Im} z > 0$.

«Физическая» аргументация, позволяющая думать, что корректное квантовомеханическое описание для потенциалов с сингулярностью $r^{-\alpha}$ можно развить только при $0 < \alpha < 2$, основана на следующих эвристических соображениях: во-первых, основное свойство, которое требуется для не патологической физики, состоит в полуограниченности $H_0 + V$; во-вторых, если волновая функция сосредоточена в области размера Δr возле отрицательной сингулярности $r^{-\alpha}$, то по соотношению неопределенностей математическое ожидание H_0 будет величиной порядка $(\text{const})(\Delta p)^2 \approx (\text{const})(\Delta r)^{-2}$, в то время как математическое ожидание V будет величиной порядка $(\text{const})(\Delta r)^{-\alpha}$. Так как $cx^{-2} - dx^{-\alpha}$ $(c, d > 0)$ полуограничено лишь тогда, когда $0 < \alpha \leqslant 2$, то мы ожидаем, что разумная физика кончается при $\alpha = 2$.

Неравенство, которое мы назвали леммой принципа неопределенности, хорошо известно; см., например, H. Kalf and J. Walter, Strongly singular potentials and essential self-adjointness of singular elliptic operators in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \diagdown \{0\})$, *J. Functional Analysis*, **10** (1972), 114—130, где приводятся исторические заметки. То, что $r^{-2} < c\Delta$ с некоторой константой c, есть частный случай одной теоремы того же типа, что и теорема X.21: если $s > 3$ и

$V \in L_w^{s/2}$, то V есть Δ-форма, ограниченная величиной, не превосходящей $c\|V\|_{s/2,\, w}$.

Изложение большей части операторной теории, необходимой для квантовой механики гамильтонианов с потенциалами Рольника, и, в частности, доказательство теоремы X.19 можно найти в работе: B. Simon, Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971. Читатель найдет там также историю открытия и переоткрытия условий Рольника различными авторами.

Распространение теоремы Като на n измерений обсуждалось многими авторами. Теорема X.20 появилась в статье: F. Brownell, A note on Kato's uniqueness criterion for Schrödinger operator selfadjoint extensions, *Pacific J. Math.*, 9 (1959), 953—973; наше доказательство заимствовано из приложения к работе: E. Nelson, Feynman integrals and the Schrödinger equation, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 332—343. Очень близкое обсуждение n-мерных потенциалов уже было раньше у Штуммеля: F. Stummel, Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschenräumen, *Math. Ann.*, 132 (1956), 150—176. Результаты Штуммеля были сформулированы не на языке L^p-пространств, а с помощью условий вида

$$\int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |x-y|^{-s+4-\alpha}\,|V(y)|^2\,dy \leqslant C \text{ при всех } x$$

для некоторого $\alpha > 0$. В большей части литературы об операторах Шредингера пользуются этими «условиями Штуммеля» и соответствующими «пространствами Штуммеля» Q_α.

Прямое доказательство расширения теоремы X.20 на граничный случай $p = s/2$ $(s \geqslant 5)$ дано в статье: W. Faris, The product formula for semi-groups defined by Friedrichs extensions, *Pacific J. Math.*, 22 (1967), 47—70. Это доказательство основано на теореме Соболева о вложении, которая в свою очередь опирается на классическое неравенство Соболева, обсуждавшееся в § IX.4. Теорема Стрихарца в слегка другой форме появилась в его статье: R. Strichartz, Multipliers on Fractional Sobolev Spaces, *J. Math. Mech.*, 16 (1967), 1031—1060. Применимость этой теоремы к операторам Шредингера доказана Нельсоном (не опубликовано).

То что r^{-2} есть Δ-ограниченное возмущение в $\mathbb{R}^s$, если $s \geqslant 5$, следует из прямой операторной оценки классического типа: если $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^s \setminus \{0\})$ и если $a \geqslant -\frac{1}{2}s(s-4)$, то

$$\int |\Delta u|^2\, d^s x \geqslant -a \int \frac{|\nabla u|^2}{|x|^2}\, d^s x + \frac{(s-4)^2}{16}(s^2+4a) \int \frac{|u|^2}{|x|^4}\, d^s x.$$

Это неравенство Реллиха доказано в его книге: F. Rellich, Perturbation theory of eigenvalue problems, Gordon and Breach, New York, 1969; см. также статью Шминке, цитируемую ниже.

Прием Конради и его применение к полевому обобщению ангармонического осциллятора опубликованы в статье: J. Konrady, Almost positive perturbations of positive self-adjoint operators, *Comm. Math. Phys.*, 22 (1971), 295—299. Приблизительно тогда же этот метод был независимо открыт Шминке (U.-W. Schmincke, Essential self-adjointness of a Schrödinger operator with strongly singular potential, *Math. Z.*, 124 (1972), 47—50).

§ X.3. В своей исходной статье о самосопряженных расширениях (см. Замечания к § X.1) фон Нейман доказал, что полуограниченный оператор имеет полуограниченные расширения, нижняя грань которых сколь угодно близка к нижней грани исходного оператора. Он высказал предположение, что существуют расширения с той же нижней гранью. Этот факт (теорема X.23) был доказан К. Фридрихсом (K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter

Operatoren, *Math. Ann.*, **109** (1934), 465—487) и М. Стоуном (M. Stone, in Linear Transformations in Hilbert Spaces and their Applications in Analysis, Amer. Math. Soc. Colloquim Publication **15**, Providence, R.I., 1932). Обсуждение вопроса о том, когда расширение Фридрихса есть единственное расширение с той же нижней гранью (пример 1), см. в работе: E. T. Poulsen, The minimax principle and uniqueness of the Friedrichs extension, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21** (1969), 508—509. Теорема X.24 и предшествующее предложение принадлежат М. Г. Крейну, Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, I, *Матем. сб.*, **20** (62) (1947), 431—498. Дальнейшие рассмотрения имеются в статье: B. Simon, The theory of semi-analytic vectors: a new proof of a theorem of Masson and McClary, *Indiana Univ. Math. J.*, **20** (1971), 145—151.

Теорема X.25 доказана впервые в работе: J. von Neumann, Über adjungierte Funktionaloperatoren, *Ann. Math.*, **33** (1932), 249—310.

§ X.4. Неравенство Като получено в работе: T. Kato, Schrödinger Operators with Singular Potentials, *Israel J. Math.*, **13** (1973), 135—148. Теоремы X.28 и X.29 появились там же. Работа Като была отчасти мотивирована статьей: B. Simon, Essential self-adjointness of Schrödinger operators with positive potentials, *Math. Ann.*, **201** (1973), 211—220. Саймон доказал теорему X.28 в более сильных предположениях $V \geqslant 0$, $V \in L^2(\mathbb{R}^n, \exp(-ax^2)\,d^nx)$ с некоторым a. До работы Саймона считалось, что для того, чтобы $-\Delta+V$ был в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, V должен принадлежать локальному пространству Штуммеля (важно, чтобы V принадлежал L^p_{loc} с некоторым $p > n/2$, если $n \geqslant 4$).

Более слабые варианты теоремы X.28 известны очень давно. В частности, результат о самосопряженности в существенном оператора $-\Delta+V$, если $V \geqslant 0$ и $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, принадлежит Карлеману: T. Carleman, Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger, *Ark. Math., Ast., Fys.*, **24B**, No 11 (1934). Этот результат был независимо переоткрыт Джаффе: A. Jaffe, A $\lambda\varphi^4$ Cutoff Field Theory, Princeton Univ. Thesis, Princeton, N. J., 1965. Расширение на некоторые классы сингулярных положительных V было впервые получено Ф. Штуммелем (см. Замечания к § X.2). Пожалуй, наиболее сильные результаты, предшествовавшие статье Като, были получены в работах: H. Stetkaer-Hansen, A generalization of a theorem of Wienholtz concerning essential self-adjointness of singular elliptic operators, *Math. Scand.*, **19** (1966), 108—112, и J. Walter, Note on a paper by Stetkaer-Hansen concerning essential self-adjointness of Schrödinger operators, *Math. Scand.*, **25** (1969), 94—96, где доказаны более сильный результат при $n \leqslant 3$ и более слабая теорема при $n \geqslant 4$.

Теорема X.30 доказана в работе: B. Simon, Essential Self-Adjointness of Schrödinger-Operators with Singular Potentials: A Generalized Kalf—Walter—Schmincke Theorem, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **52** (1973), 44—48. Несколько иное доказательство содержится в статье: H. Kalf, J. Walter, Note on a paper of Simon on the essential self-adjointness of Schrödinger operators with singular potentials, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **52** (1973), 258—260. Саймон обобщил результаты Кальфа и Вальтера (H. Kalf, J. Walter, Strongly singular potentials and essential self-adjointness of singular elliptic operators on $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, *J. Functional Analysis*, **10** (1972), 114—130) и Шминке (U.-W. Schmincke, Essential self-adjointness of a Schrödinger operator with strongly singular potential, *Math. Z.*, **124** (1972), 47—50). Наиболее ранние результаты этого рода принадлежат Йоргенсу (K. Jörgens, Wesentliche Selbstadjungiertheit singulärer elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung in $C_0^\infty(G)$, *Math. Scand.*, **15** (1964), 5—17).

Теорема X.31 принадлежит Фари (W. Faris, Essential self-adjointness of operators in ordered Hilbert space, *Comm. Math. Phys.*, **30** (1973), 23—34). Несколько более слабая теорема была ранее доказана Дэвисом (E. B. Davies, Properties of the Green's functions of some Schrödinger operators, *J. London Math. Soc.*, 7 (2) (1973), 473—491).

Первое исчерпывающее исследование операторов Шредингера с магнитным полем содержится в статье Икэбе и Като: T. Ikebe, T. Kato, Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 9 (1962), 77—92. Они доказали теорему типа теоремы X.34, но с более сильными требованиями на V. Сама теорема X.34 заимствована из статьи Като в *Israel Journal*. Като доказал теорему X.33 при более слабом условии $u \in L^1_{\text{loc}}$. Мы упростили доказательство, заметив, что условие $u \in L^2_{\text{loc}}$ достаточно для приложений. Это замечание играет критическую роль в доказательстве теоремы X.35, которое можно найти в статье: B. Simon, Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials, *Math. Z.*, **131** (1973), 361—370. В основе этой статьи Саймона лежит усиленный вариант технической леммы, относящейся к теореме X.33. Сходные с теоремой X.35 результаты можно найти в книге Шехтера: M. Schechter, Spectra of Partial Differential Operators, North-Holland, Amsterdam, 1971. До работы Саймона за употребление кулоновой калибровки высказывался Йоргенс, см. K. Jörgens, Über das wesentliche Spektrum elliptischer Differentialoperatoren vom Schrödinger-Typ, Tech. report, Univ. Heidelberg, 1965, и Zur Spektraltheorie der Schrödingeroperatoren, *Math. Z.*, **96** (1967), 355—372.

Теорема X.32 доказана Като (T. Kato, A second look at the essential self-adjointness of the Schrödinger operators).

Более ранние результаты, описывающие область определения расширения Фридрихса, можно найти в работах: K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, II, *Math. Ann.*, **109** (1933/34), 685—713 (исправления в *Math. Ann.*, **110** (1934/35), 777—779), и Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkter gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **112** (1935/36), 1—23; H. Freudenthal, Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.*, **39** (1936), 832—833; F. Rellich, Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **122** (1950/51), 343—368; H. Kalf, On the characterization of the Friedrichs extension of ordinary or elliptic differential operators with a strongly singular potential, *J. Functional Analysis*, **10** (1972), 230—250.

§ *X.5*. Коммутаторная теорема появилась в работе Нельсона: E. Nelson, Time-ordered operator products of sharp-time quadratic forms, *J. Funct. Anal.*, **11** (1972), 211—219. До этого сходная теорема была опубликована Глиммом и Джаффе: J. Glimm and A. Jaffe, The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs, IV: Perturbation of the Hamiltonian, *J. Math. Phys.*, **13** (1972), 1568—1584. Теорема Глимма—Джаффе была слабее, так как требовала ограничений на коммутатор и на двойной коммутатор. И Нельсон, и Глимм—Джаффе были намерены применять эту теорему к задаче о самосопряженности сглаженного оператора поля по схеме примера 3. Статья Нельсона содержит также леммы 1 и 2.

В обеих статьях, и у Нельсона, и у Глимма—Джаффе, доказательства несколько сложнее нашего, и авторы пользуются не совсем стандартной техникой сглаживателей и граф-пределов соответственно. Простое доказательство, которое мы привели, указано в статье: W. Faris and R. Lavine, Commutator and self-adjointness of Hamiltonian operators, *Comm. Math. Phys.*, **35** (1974), 39—48. Авторы дали также доказательство, основанное на интуитивных представлениях примера 4, и применили эту теорию к операторам Шредингера (теорема X.38 и ее следствия) и к операторам Дирака.

Другое доказательство и несколько более общий результат содержатся в статье: O. McBryan, Local generators for the Lorentz group in the $P(\varphi)_2$ model, *Nuovo Cimento*, **18A** (1973), 654—662.

В статье Штуммеля 1956 г. (см. Замечания к § X.2) было доказано, что гамильтониан атома водорода в асимптотически постоянном электрическом поле в существенном самосопряжен.

Более сложные атомы в постоянных полях были впервые рассмотрены в статье Икэбе—Като (см. Замечания к § X.4). Ранее Нильсоном было доказано, что операторы вида $-\Delta+V$ с V *непрерывным* и $V(x)\geqslant -cx^2-d$ в существенном самосопряжены на C_0^∞ (см. Замечания к § X.2). Эти результаты были затем обобщены Хельвигом (B. Hellwig, Ein Kriterium für die Selbstadjungiertheit elliptischer Differentialoperatoren in $\mathbb{R}^n$, *Math. Z.*, **86** (1964), 255—262; A criterion for self-adjointness of singular elliptic differential operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **26** (1969), 279—291). В частности, в этих статьях содержится многомерный вариант теоремы X.8.

Второе следствие теоремы X.38 доказано другим методом у Кальфа (H. Kalf, Self-adjointness for strongly singular potentials with a $-|x|^2$ fall-off at infinity, *Math. Z.*, **133** (1973), 249—255.

Для операторов Дирака нет ограничений на скорость роста V на бесконечности. Чернов в статье: P. Chernoff, Essential Self-Adjointness of Powers of Generators of Hyperbolic Equations, *J. Func. Anal.*, **12** (1973), 401—414, заметил, что интуитивно это так и должно быть, ибо релятивистское ограничение $|v|<c$ запрещает уход на бесконечность за конечное время. Сильные результаты, относящиеся к оператору Дирака, читатель может найти в статьях: W. D. Evans, On the Unique Self-Adjoint Extension of the Dirac Operator and the Existence of the Green Matrix, *Proc. London Math. Soc.*, **20** (3) (1970), 537—557; U.-W. Schmincke, Essential Self-Adjointness of Dirac Operators with Strongly Singular Potentials, *Math. Z.*, **126** (1972), 71—81.

§ X.6. Аналитические векторы были введены впервые в контексте представлений групп в работах Хариш-Чандры (Harish-Chandra, Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 185—243) и Картье и Диксмье (P. Cartier et J. Dixmier, Vecteurs analytiques dans les représentations de groupes de Lie, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 131—145). Их применение для исследования отдельных операторов подчеркивал и развивал Нельсон (E. Nelson, Analytic Vectors, *Ann. Math.*, **70** (1959), 572—615). Для заданного непрерывного унитарного представления $U(\cdot)$ группы Ли G на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ Гординг еще раньше построил общую плотную инвариантную область самосопряженности в существенном для всех генераторов, найдя область, которая содержит плотное множество аналитических векторов для всех генераторов. Нельсон доказал также, что если алгебра Ли представляется симметрическими операторами на плотной инвариантной области определения и если эта область содержит плотное множество аналитических векторов, то представление алгебры Ли получается дифференцированием единственного представления соответствующей группы Ли. Эти результаты были далее расширены: см., например, J. Simon, On the integrability of representations of finite-dimensional real Lie algebras, *Comm. Math. Phys.*, **28** (1972), 39—46.

Обобщение результата Нельсона, содержащееся в теореме X.40, принадлежит Нуссбауму (A. Nussbaum, A note on quasi-analytic vectors, *Studia Math.*, **33** (1969), 305—310). Простое доказательство, намеченное в задаче 42, было впервые дано в работе: B. Simon, The theory of semi-analytic vectors: a new proof of a theorem of Masson and McClary, *Indiana Univ. Math. J.*, **20** (1971), 1145—1151.

Лемма Нуссбаума опубликована в его статье Quasi-analytic vectors, *Ark. Mat.*, **6** (1965), 179—191. Нуссбаум ввел обобщение понятия аналитического вектора. Вектор $\varphi \in C^\infty(A)$ называется **квазианалитическим**, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| A^n\varphi \|^{-1/n} = \infty.$$

Аналитический вектор будет квазианалитическим, но обратное не всегда справедливо. Нуссбаум доказал, что замкнутый симметрический оператор, область определения которого содержит плотное множество квазианалитических векторов, самосопряжен. Нуссбаум показал также (в своей статье в *Studia Math.*), что полуограниченный замкнутый симметрический оператор с плотным множеством векторов, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| A^n\varphi \|^{-1/2n} = \infty,$$

самосопряжен. Такие векторы называются **векторами Стильтьеса**. Этот результат был независимо получен в статье: D. Masson and W. McClary, Classes of C^∞-vectors and essential self-adjointness, *J. Functional Analysis*, **10** (1972), 19—32. Обе статьи, Нуссбаума и Массона—Маклари, используют технику проблемы моментов. По-существу, они обращают аргументацию примеров 4 и 6 и при помощи классических результатов о проблеме моментов доказывают, что некоторые из векторов суть векторы единственности. Критический результат, связывающий два эти понятия, содержится в статье Нуссбаума в *Arkiv*: $\varphi \in C^\infty(A)$ есть вектор единственности тогда и только тогда, когда проблема моментов Гамбургера для $a_n = (\varphi, A^n\varphi)$ имеет единственное решение. Связь между самосопряженностью и проблемой моментов восходит к классической монографии Стоуна: M. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis, Amer. Math. Soc. Colloquium Publication **XV**, New York (1932). Два общих руководства по проблеме моментов—это: J. Shohat and J. D. Tamarkin, The Problem of Moments, Amer. Math. Soc., New York, 1943, и Ю. В. Воробьев, Метод моментов в прикладной математике, Физматгиз, М., 1958.

§ X.7. Пространство Фока введено В. А. Фоком в статье: V. Fock, Konfigurationsraum und zweite Quantelung, *Z. Phys.*, **75** (1932), 622—647 (перепечатано в сборнике: В. А. Фок, Работы по квантовой теории поля, Изд-во ЛГУ, 1957). Первое доказательство самосопряженности полей в пространстве Фока было опубликовано Куком: J. Cook, The mathematics of second quantization, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 222—245. Кук доказал непосредственно, что $\varphi(f) \pm i$ и $\pi(f) \pm i$ имеют плотные области значений в F_0.

Абстрактная структура свободных полей подробно рассматривалась в пятидесятые годы Фридрихсом (K. Friedrichs, Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields, Wiley (Interscience), 1953) и Сигалом в ряде работ (см. в особенности I. Segal, Tensor Algebras over Hilbert Spaces, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 106—134, где введено Q-пространство). Это привело Сигала к исследованию связи между свободным полем и понятиями теории вероятностей, благодаря чему он, в частности, открыл связь между абстрактными пространствами Фока и винеровыми интегралами по путям.

Обсуждение аксиом Вайтмана см. в § IX.8 и в Замечаниях к этому разделу. Виково упорядочение ввел Вик: G.-C. Wick, The evaluation of the Collision Matrix, *Phys. Rev.*, **80** (1950), 267—272 (русский перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, М., 1954). Общие результаты, относящиеся к свободным полям с виковым упорядочением, можно найти в статье Гординга и Вайтмана: L. Gårding and A. Wightman, Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum field theory, *Ann. Phys.*, **16** (1961), 158—176.

Вик также обратил внимание на комбинаторную структуру вакуумных ожиданий свободных полей. В частности, имеют место такие формулы:

$$(\Omega_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)\Omega_0) = 0, \quad \text{если } n \text{ нечетно},$$

$$(\Omega_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_{2n})\Omega_0) = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_n \\ i_k < j_k \\ i_1, \ldots, j_n \text{ различны}}} (\Omega_0, \varphi(x_{i_1})\varphi(x_{j_1})\Omega_0) \ldots (\Omega_0, \varphi(x_{i_n})\varphi(x_{j_n})\Omega_0). \quad (X.162)$$

Это сложное выражение есть сумма по всем разным способам записи $\{1, \ldots, 2N\}$ в виде N пар. Формула (X.162)—одна из целого ряда формул, которые обычно называют «теоремами Вика». Многие формулы такого рода приведены в книге: E. Caianiello, Combinatorics and Renormalization in Quantum Field Theory, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973. Формула (X.162) показывает, что *для свободного поля* можно подсчитать вайтмановы обобщенные функции, зная только двухточечные функции. Существует широкий класс моделей, в которых выполняется это же свойство. Пусть ρ—произвольная полиномиально ограниченная мера на $[0, \infty)$. Определим

$$(\Omega_0, \varphi(x)\varphi(y)\Omega_0) = \int \Delta_+(x-y, m^2)\, d\rho(m^2),$$

и пусть n-точечная обобщенная функция задается формулой (X.162). Можно показать, что эти обобщенные функции суть функции Вайтмана некоторой определенной квантовой теории поля, удовлетворяющей аксиомам Вайтмана. Такая теория называется теорией «обобщенного свободного поля со спектральной плотностью ρ». Как и теория свободного поля, эти теории тривиальны в том смысле, что матрица рассеяния в них единична (если она существует). Впервые обобщенное свободное поле ввел Гринберг (W. Greenberg, Generalized free fields and models of local field theory, *Ann. Phys.*, **16** (1961), 158—176).

Оценки с помощью оператора числа частиц такого типа, как в теореме X.44, впервые систематически применялись Глиммом (J. Glimm, Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions, *Comm. Math. Phys.*, **5** (1967), 343—386). Подробное рассмотрение этих оценок можно найти в лекциях: J. Glimm, A. Jaffe, Some quantum field theory models, in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory (Les Houches, 1970), ed. by C. deWitt and R. Stora, Gordon and Breach, New York, 1971.

Мы продолжаем рассмотрение $(\varphi^4)_2$-модели в § X.9 и в гл. XIX, где подробнее расскажем об истории. L^p-свойства взаимодействия с пространственным обрезанием были впервые отмечены Нельсоном (E. Nelson, A quartic interaction in two dimensions, in Mathematical Theory of Elementary Particles, ed. by R. Goodman and I. Segal, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1966), когда он открыл, что $e^{-tV} \in L^1$. Подробное доказательство можно найти в лекциях Глимма и Джаффе, цитированных выше. О свойствах взаимодействия $(\varphi^4)_3$ см. J. Glimm, A. Jaffe, Positivity of the $(\varphi^4)_3$-Hamiltonian, *Fortschr. Physik*, **21** (1973), 327—376; там же—подробная библиография.

Идея о том, что евклидова инвариантность глубоко связана с вопросами о неэквивалентных представлениях КПС,—а эта идея лежит в основе нашего доказательства теоремы X.46—принадлежит кругу идей, именуемых «теоремы Хаага», после открытий, сделанных Р. Хаагом в его известной работе: R. Haag, On Quantum Field Theories, *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, **29**, 12 (1955). Способ применения здесь трансляционной инвариантности подсказывает, что неэквивалентность представлений с разными массами проявляется «вследствие бесконечности пространства». Это правильно в следующем смысле. Для любой ограниченной области B в $\mathbb{R}^3$ и свободных полей $\{\varphi_{m_1}, \pi_{m_1}\}$, $\{\varphi_{m_2}, \pi_{m_2}\}$ на $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ существует унитарнсе отображение U_B: $\mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, такое, что $U_B\varphi_{m_1}(f)\, U_B^{-1} = \varphi_{m_2}(f)$ и $U_B\pi_{m_1}(f)\, U_B^{-1} = \pi_{m_2}(f)$, если $\operatorname{supp} f \subset B$. Эта «локальная эквивалентность» встретится нам снова в гл. XIX при рассмотрении алгебр свободного поля и при обсуждении «свойства локальной фоковости» модели $(\varphi^4)_2$.

Наша конструкция пространства Q зависит от базиса в том смысле, что она зависит от выбора $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Что не зависит от выбора базиса—так это алгебра измеримых множеств (по модулю множеств меры нуль) и мера этих множеств. Есть много других «реализаций» пространства Q, в которых «точки» отличаются, однако алгебра измеримых множеств и их мера—те же.

Л. Гординг и А. С. Вайтман классифицировали все представления соотношений (X.95) в статье: L. Gårding, A. S. Wightman, Representations of the canonical commutation relations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **40** (1954), 622—626. Возможно, что фон Нейман знал о существовании неэквивалентных представлений уже с 1938 г., так как, опираясь на его теорию бесконечных тензорных произведений (J. von Neumann, On Infinite Tensor Products, *Compositio Math.*, **6** (1939), 1—77), легко построить несчетное число неэквивалентных представлений (см. L. Streit, Test function spaces for direct product representations, *Comm. Math. Phys.*, **4** (1967), 22—31). Самосопряженность канонических полей из соотношений (X.95) в произвольных представлениях доказана Ридом (M. Reed, A Gårding domain for quantum fields, *Comm. Math. Phys.*, **14** (1969), 336—346). Рид показал, что для любого представления в классификации Гординга—Вайтмана существует банахово пространство B основных функций (B зависит от представления), такое, что $\varphi(f)$ и $\pi(f)$ самосопряжены при $f \in B$.

Классификация представлений КПС в непрерывной форме (X.94) может быть найдена в разных местах. См., например, И. М. Гельфанд и Н. Виленкин, Обобщенные функции, IV, Физматгиз, М., 1961. Теорема Рида распространена на КПС в форме (X.94) в статье: G. Hergerfeldt, Gårding domains and analytic vectors for quantum fields, *J. Math. Phys.*, **13** (1972), 821—827.

§ *X.8.* Изучение полугрупп линейных преобразований берет свое начало в статье Стоуна об унитарных группах в гильбертовом пространстве: M. Stone, Linear transformations in Hilbert space, III, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **16** (1930), 172—175. Теорема Хилле—Иосиды для сжимающих полугрупп (теорема X.47 a) была независимо доказана Хилле в его книге «Функциональный анализ и полугруппы», ИЛ, М., 1951 (см. также E. Hille, On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions, *Kungl. Fys. Sälls. I Lund. Förhand.*, **21** (1952), 1—13) и Иосидой (K. Yosida, On the differentiability and representation of one-parameter semi-groups of linear operators, *J. Math. Soc. Japan*, **1** (1948), 15—21). Ее обобщение (теорема X.47b) несколько позже дано Феллером (W. Feller, On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators, *Ann. Math.*, **58** (1953), 166—174), Миядерой (I. Miyadera, Generation of a strongly continuous semi-group of operators, *Tôhoku Math. J.*, **4** (1952), 109—114) и Филлипсом (R. S. Phillips, Perturbation theory for semi-groups of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 343—369). Теорему X.47b обычно называют теоремой Хилле—Иосиды—Филлипса.

Существуют разнообразные другие условия, кроме сильной непрерывности на $[0, \infty)$, которые могут быть наложены на $T(t)$. Например, можно потребовать выполнения таких условий:

(i) $T(t)$ сильно измерима,

(ii) $T(t)$ сильно сходится к I при $t \downarrow 0$,

(iiia) $\int_0^1 \|T(t)\|\,dt < \infty$,

(iiib) $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)\varphi = \varphi$ для всех $\varphi \in X$.

Можно показать, что из (i) и (ii) следует сильная непрерывность на $[0, \infty)$. Другой возможный набор условий — это (i) и (iii). В этом случае $\|T(t)\|$ может быть неограниченной при $t \to 0$. Как и в случае сильной непрерывности, существует теорема, классифицирующая генераторы таких полугрупп. Подробное рассмотрение различных условий непрерывности при $t \to 0$ и соответствующая классификация генераторов имеется в книге: Э. Хилле, Р. С. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.

Термин «аккретивный» впервые появился у Фридрихса (K. Friedrichs, Symmetric positive linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 333—418). Изучение этих операторов было, в сущности, начато Филлипсом в цитированной выше статье. Филлипс называет $-A$ (а не A) генератором полугруппы e^{-tA}. Следовательно, в гильбертовом пространстве его генераторы удовлетворяют условию $\operatorname{Re}(\varphi, A\varphi) \leqslant 0$ (а не $\operatorname{Re}(\varphi, A\varphi) \geqslant 0$). Такие операторы он называет «диссипативными». Теория диссипативных операторов на банаховых пространствах развита Люмером и Филлипсом (G. Lumer, R. S. Phillips, Dissipative operators in a Banach space, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 679—698). Статья Люмера и Филлипса содержит контрпример, показывающий, что в случае банахова пространства максимальный аккретивный оператор не обязан порождать полугруппу. То, что максимальный аккретивный оператор порождает полугруппу в гильбертовом пространстве, было доказано Филлипсом (R. S. Phillips, Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959), 193—254).

Пример ограниченной полугруппы, не являющейся сжимающей полугруппой, дает совокупность матриц

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 2\sin\theta \\ -{}^1/_2\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

на $\mathbb{R}^2$. Бесконечномерные ограниченные полугруппы, не являющиеся сжимающими, появляются в теории рассеяния, связанной с линеаризованным уравнением Больцмана; см. гл. XII.

В конечномерном случае всякая полугруппа удовлетворяет условию $\lim_{t \downarrow 0} \|T(t)\| = 1$. Однако в бесконечномерном случае это не обязательно справедливо (см. пример 5). Когда это условие на норму нарушается, отсутствует простая характеристика генераторов непосредственно через $l(A\varphi)$.

Теорема X.50 принадлежит Густафсону (Gustafson, A perturbation lemma, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 334—338). Мы привели (для $a < 1/2$) доказательство Нельсона (E. Nelson, Feynman integrals and the Schrödinger equation, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 332—343); некоторые идеи этого доказательства появились еще раньше у Троттера (H. Trotter, On the product of semigroups of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 545—551). Статьи Нельсона и Троттера содержат также доказательства общей формулы Троттера для произведения. Упрощение и обобщение теоремы Троттера содержится в работе Чернова (P. R. Chernoff, Semigroup product formulas and addition of unbounded operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 395). Следствие теоремы X.50 было расширено на случай $a = 1$, если X — рефлексивное банахово пространство. Это обобщает теорему Вюста; доказано это сходными методами Черновым (P. R. Chernoff, Perturbations of dissipative operators of relative bound one, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **33** (1972), 72—74).

Теорема X.52 принадлежит Хилле и Филлипсу (см. их книгу, цитированную выше) и Иосиде (K. Yosida, On the differentiability of semi-groups of linear operators, *Proc. Japan Acad.*, **34** (1958), 337—340). При доказательстве голоморфности в теореме X.55 мы следуем Стейну (E. Stein, Topics in Harmonic Analysis, Ann. Math. Studies, Princeton University Press., Princeton, N. J.). Формулы типа Данфорда—Тейлора для голоморфных полугрупп весьма полезны, так как позволяют вычислять различные величины с помощью интегральной формулы Коши.

Теорема о спектральных отображениях для полугрупп рассматривается в § XIII.8.

Установление связи между дифференциальными уравнениями в частных производных и теорией полугрупп восходит к Адамару, который заметил, что решения задачи Коши обладают полугрупповыми свойствами по отношению к t: J. Hadamard, Sur un problème mixte aux dérivées partielles, *Bull. Soc. Math. France*, **31** (1903), 208—224, и Principe de Huygens et prolongement analytique, *Bull. Soc. Math. France*, **52** (1924), 241—278. Но теория полугрупп не применялась систематически к изучению дифференциальных уравнений в частных производных, пока Хилле и Иосида в конце сороковых годов не развили соответствующий аналитический аппарат. Примеры, приведенные в тексте, подсказывают, что можно применить теорию полугрупп к общим параболическим дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка, т. е. к дифференциальным уравнениям вида $\partial u(x, t)/\partial t = Au(x, t)$, где оператор

$$A\varphi = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(x)\varphi(x) + c(x)\varphi(x)$$

эллиптичен в соответствующем смысле. Это верно, однако такое применение по ряду причин затруднительно. Во-первых, в случае непостоянных коэффициентов или ограниченной области больше неприменимо преобразование Фурье, так что приходится доказывать, что A удовлетворяет условиям теорем X.47, X.52, с помощью априорных оценок (типа неравенства Гординга) и теоремы Хана—Банаха (надо показать, что $\operatorname{Ran}(A+\lambda)$ плотна). Положение далее осложняется тем, что A (суженный на область определения, состоящую из «хороших» функций) будет иметь много замкнутых расширений, и следует выбрать «правильное» в качестве генератора. Наконец, нужно воспользоваться обобщенной леммой Вейля (см. § IX.6), чтобы доказать регулярность. Из фундаментальных работ, в которых техника полугрупп применяется к параболическим уравнениям, назовем следующие: W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations, *Ann. Math.*, **55** (1952), 468—519; P. Lax, A. Milgram, Parabolic Equations, in Contributions to the theory of Partial Differential Equations, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954; P. Lax, R. S. Phillips, Local boundary conditions of dissipative systems of linear partial differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 427—455; R. S. Phillips, On the integration of the diffusion equation with boundaries, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **98** (1961), 62—84; K. Yosida, An abstract analyticity in time for solutions of a diffusion equation, *Proc. Japan Acad.*, **35** (1959), 109—113. Параболические уравнения определенных видов, которые нелинейны или в которых A зависит от t (называемые эволюционными уравнениями), тоже могут быть рассмотрены методами теории полугрупп; см. A. Friedman, Partial Differential Equations, Holt, New York, 1969. Существует обширная литература, посвященная полугруппам нелинейных операторов; см. § 13 и Замечания к нему.

Хилле в своей книге «Функциональный анализ и полугруппы» отметил, что теория полугрупп применима также и к гиперболическим уравнениям.

Для волнового уравнения с постоянными коэффициентами этот метод обрисован в задаче 60. В контексте нелинейных уравнений эта идея работает в § 13. О полугрупповом подходе к широкому классу гиперболических задач см. R. S. Phillips, Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959), 193—254.

Вторая главная область применения техники полугрупп — это теория вероятностей. Связь между уравнением теплопроводности и теорией вероятностей была открыта Эйнштейном (A. Einstein, Über die von der molecularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Physik*, **17** (1905), 549—560). Но только в 1952 г. Феллер начал систематическое исследование полугрупп в теории вероятностей в той статье, которую мы выше цитировали. Дальнейшее развитие этого направления связано с именем Ханта (G. Hunt, Markov processes and potentials, I, *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 44—93; II, **1** (1957), 316—369; III, **2** (1958), 151—213 [русский перевод: Дж. Хант, Марковские процессы и потенциалы, ИЛ, М., 1962] и Semigroups of measures on Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 264—293. Эти приложения описаны в книгах по теории вероятностей, упоминаемых в Замечаниях к § X.11.

Мы отмечали в начале этого раздела, что на аккретивные операторы в банаховом пространстве могут быть распространены многие важные свойства самосопряженных операторов. Важнейшее свойство, которое не распространяется на все аккретивные операторы,— это спектральное разложение. Класс «спектральных операторов», допускающих некоторое спектральное разложение, был введен Данфордом: N. Dunford, Spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 321—354. Исчерпывающее рассмотрение этих операторов см. в книге Н. Данфорда и Дж. Шварца, Линейные операторы, т. III: Спектральные операторы, «Мир», М., 1974.

§ X.9. Теория гиперсжимающих полугрупп появилась как результат некоторых исследований в конструктивной квантовой теории поля. Зерно этой теории содержится в работе Нельсона (E. Nelson, A quartic interaction in two dimensions, in Mathematical Theory of Elementary Particles, pp. 69—73, ed. by R. Goodman and I. Segal, M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1966). Нельсон выделил те свойства эрмитовых операторов, которые мы называем теперь гиперсжимающими, и, воспользовавшись ими и теорией фейнмановых интегралов по путям, доказал, что некоторые гамильтонианы теории поля ограничены снизу. Эта работа была далее прояснена и расширена Глиммом: J. Glimm, Boson fields with nonlinear self-interaction in two dimensions, *Comm. Math. Phys.*, **8** (1968), 12—25. Глимм, в частности, ввел в употребление теорему Рисса—Торина. Идеи Нельсона сыграли свою роль в первом доказательстве Глимма и Джаффе самосопряженности гамильтониана $H_0+H_I(g)$ с пространственным обрезанием для взаимодействия $(\varphi^4)_2$: J. Glimm, A. Jaffe, A $\lambda\varphi^4$ quantum field theory without cutoffs, *Phys. Rev.*, **176** (1968), 1945—1951. Глимм и Джаффе в своем доказательстве опирались также на граф-пределы (см. § X.10) и фейнмановы интегралы по путям. Основные идеи гиперсжимающих полугрупп появились независимо в работах Розена и Сигала. Розен (L. Rosen, A $\lambda\varphi^{2n}$ theory without cutoffs, *Comm. Math. Phys.*, **16** (1970), 157—183) дал доказательство самосопряженности в существенном гамильтонианов для взаимодействия $P(\varphi)_2$, основанное на гиперсжимаемости и фейнмановых интегралах по путям. Хотя это не было сразу хорошо понято, доказательство Розена опиралось почти на одну L^p-технику и содержало все главные идеи абстрактной теории для H_0+V. Сигал в своей работе: I. Segal, Notes towards the construction of nonlinear relativistic quantum fields, III: Properties of the C^*-dynamics for a certain class of interactions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 1390—1395, показал, что обращение к фейнмановым интегралам по путям можно везде заменить формулой Троттера для произведения и что для получения самосопряженного оператора H, который фор-

мально записывался бы в виде H_0+V, можно воспользоваться гиперсжимаемостью. Кроме того, там была сформулирована лемма, которую мы назвали леммой Сигала, и с ее помощью удалось упростить более ранние доказательства Глимма и Джаффе факта ограниченности снизу. Сигал выяснил также один момент в более ранних доказательствах, касающийся вопроса о том, будет ли непременно сжимающим отображением тензорное произведение сжимающих отображений L^2 в L^4. Другое обсуждение этого факта можно найти в лекциях Глимма и Джаффе (Les Houches, 1970), которые упоминались в Замечаниях к § X.7. В более полной публикации (I. Segal, Construction of nonlinear quantum processes, I, *Ann. Math.*, **92** (1970), 462—481) Сигал, кроме того, доказал самосопряженность в существенном H_0+V на $D(H_0) \cap D(V)$. Самосопряженность в существенном на $C^\infty(H_0) \cap D(V)$ была доказана в Приложении к работе: B. Simon, Essential Self-Adjointness of Schrödinger Operators with Positive Potentials, *Math. Ann.*, **201** (1973), 211—220. Для гамильтониана $(\varphi^4)_2$-модели это было раньше доказано совершенно другими средствами в вышеупомянутой статье Глимма и Джаффе. Для гамильтонианов $(\varphi^{2n})_2$ это было доказано Розеном (L. Rosen, The $(\varphi^{2n})_2$ quantum field theory: Higher order estimates, *Comm. Pure Appl. Math.*, **24** (1971), 417—457).

Множество авторов приняло участие в выяснении и развитии теории гиперсжимающих полугрупп. Саймон и Хег-Крон в обзорной статье: B. Simon, R. Höegh-Krohn, Hypercontractive semi-groups and two-dimensional self-coupled Bose fields, *J. Functional Analysis*, **9** (1972), 121—180, рассмотрели основы этой теории и ее применения к $P(\varphi_2)$-модели, развили ее в некоторых направлениях и ввели в употребление самый термин «гиперсжимающая полугруппа». Этот специальный класс сжимающих полугрупп был впервые отмечен как таковой и применен в статье: R. Höegh-Krohn, A general class of quantum field theories without cutoff in two space-time dimensions, *Comm. Math. Phys.*, **21** (1971), 244—255. Переход к еще более абстрактной формулировке можно найти в статьях: I. Segal, Construction of nonlinear local quantum processes, II, *Invent. Math.*, **14** (1971), 211—241; W. Faris, Quadratic forms and essential self-adjointness, *Helv. Phys. Acta*, **45** (1972), 1074—1088; W. Faris, Essential self-adjointness of operators in ordered Hilbert space, *Comm. Math. Phys.*, **30** (1973), 23—24. В статье в *Helv. Phys. Acta* Фари дает интересное «объяснение» в терминах квадратичных форм, почему из гиперсжимаемости следует самосопряженность. Дальнейшие применения гиперсжимающих полугрупп в конструктивной теории поля появились в цитированной выше статье Хег-Крона и в статьях Клейна: A. Klein, Self-adjointness of the locally correct generator of Lorentz transformations for $P(\varphi)_2$, in Mathematics of Contemporary Physics (R. Streater, ed.), Academic Press, New York, 1973; Quadratic expressions in a free Boson field, *Trans. Amer Math. Soc.*, **181** (1973), 439—456. Распространение некоторых свойств на теорию фермионов появилось в статье: L. Gross, Existence and uniqueness of physical ground states, *J. Functional Analysis*, **10** (1972), 52—109.

Простое доказательство гиперсжимающего свойства эрмитовых операторов, которое мы приводим (пример 1), взято из статьи: E. Nelson, The free Markov field, *J. Functional Analysis*, **12** (1973), 211—227. В более ранних доказательствах гиперсжимаемости теорема X.61 в бесконечномерном случае получалась в два этапа путем анализа в одномерном одночастичном пространстве. Сначала показывается, что если известно, что e^{-tH_0} ограничено как отображение из L^2 в L^4 для некоторого t и что в спектре H_0 есть щель выше нуля, то можно убедиться, что e^{-TH_0} есть в действительности сжатие из L^2 в L^4 при достаточно большом T. Тогда бесконечномерный случай определяется поведением тензорного произведения сжимающих отображений из L^2 в L^4. Нельсоново доказательство для одномерного случая, которое мы приводим, обобщается на произвольное число измерений, и тем самым мы избегаем этого процесса из двух этапов. На самом деле один из этих этапов можно обойти и дать прямое доказательство того, что e^{-TH_0} есть сжимающее отображение из L^2 в L^4 при соответствующем T. Дальнейшее обсуждение этих вопросов читатель может посмотреть в § I.5 лекций Саймона, ссылка на которые дается в Замечаниях к § X.11.

В обсуждаемой статье Нельсон доказал также следующие оценки, которые являются наилучшими возможными. Пусть $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство с избранным комплексным сопряжением. Пусть A — ограниченный оператор на $\mathscr{H}$, коммутирующий с этим комплексным сопряжением. Пусть Q есть Q-пространство, построенное над фоковым пространством на $\mathscr{H}$ в соответствии с конструкцией § 7. $\Gamma(A)$ есть ограниченный оператор из $L^p(Q)$ в $L^q(Q)$ $(p\leqslant q)$ тогда и только тогда, когда $\|A\|\leqslant \leqslant \sqrt{(p-1)/(q-1)}$, и в этом случае A есть сжатие. Другое доказательство этой теоремы принадлежит Гроссу (L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.*, **97**(1975), 1061—1083).

Лемму Сигала можно рассматривать как частный случай более общего результата. Пусть $\|\cdot\|_\infty$ есть операторная норма в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$; тогда лемма Сигала утверждает, что

$$\|e^{(A+B)}\|_\infty\leqslant\|e^{A/2}e^Be^{A/2}\|_\infty.$$

Но есть неравенство Голдена и Томпсона (S. Golden, Lower bounds for the Helmholtz function, *Phys. Rev.*, **137B** (1965), 1127—1128; C. Thompson, Inequality with applications in statistical mechanics, *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 1812—1813), которое утверждает, что для самосопряженных A и B

$$\operatorname{Tr}(e^{A+B})\leqslant\operatorname{Tr}(e^Ae^B),$$

или, что эквивалентно,

$$\|e^{A-B}\|_1\leqslant\|e^{A/2}e^Be^{A/2}\|_1.$$

Можно доказать также, что

$$\|e^{A+B}\|_p\leqslant\|e^{A/2}e^Be^{A/2}\|_p$$

при любом p. Неравенство Голдена—Томпсона обсуждается далее в статьях: A. Lenard, Generalization of the Golden—Thompson inequality, *Indiana Univ. J. Math.*, **21** (1971), 457—468; M. B. Ruskai, Inequalities for Traces on von Neumann Algebras, *Comm. Math. Phys.*, **26** (1972), 280—289; C. Thompson, Inequalities and partial orders on matrix spaces, *Indiana Univ. J. Math.*, **21** (1971), 469—480.

§ X.10. Основные идеи и теоремы в этом разделе принадлежат Глимму и Джаффе (J. Glimm, A. Jaffe, Singular perturbations of self-adjoint operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1969), 401—414). Глимм и Джаффе на основании своих результатов дали первое доказательство самосопряженности гамильтонианов $(\varphi^4)_2$ с пространственным обрезанием (см. Замечания к § X.7). Существование гамильтониана с пространственным обрезанием для взаимодействия Юкавы было доказано в двух статьях: резольвентная сходимость была установлена в J. Glimm, A. Jaffe, Self-adjointness for the Yukawa$_2$ Hamiltonian, *Ann. Physics*, **60** (1970), 321—383; то, что последовательность $\{H(g,n)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу и плотно ограничена, было уже раньше доказано Глиммом (J. Glimm, Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions, I, *Comm. Math. Phys.*, **5** (1967), 343—386). Общее обсуждение см. в лекциях (Les Houches, 1970), цитированных в Замечаниях к § X.7.

Технику, употребленную в примере, можно распространить на случай x^{2n}-осциллятора, если воспользоваться идеями работы: L. Rosen, The $(\varphi^{2n})_2$ quantum field theory: Higher order estimates, *Comm. Pure Appl. Math.*, **24** (1971), 417—457.

§ *X.11*. Понятие винеровой меры было введено Винером в работе: N. Wiener, Differential space, *J. Math Phys.*, **2** (1923). Винер ввел свою меру для того, чтобы строго получить результаты работы Эйнштейна и Смолуховского о броуновском движении. Историю изучения броуновского движения читатель может найти в книге Нельсона: E. Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1967. Конструкция меры Винера, которую мы приводим, заимствована у Нельсона: E. Nelson, Feynman Integrals and the Schrödinger Equation, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 332—343. Намеченное в задаче 64 доказательство того, что невозможно построить (комплексную) меру по путям Фейнмана для мнимого времени, принадлежит Камерону (R. Cameron, The Ilstow and Feynman Integrals, *J. Anal. Math.*, **10** (1962/63), 287—361). Читателя следует предостеречь от ошибочной конструкции в статье И. Гельфанда и А. Яглома, Интегрирование в функциональных пространствах в квантовой физике, *УМН*, **11** (1956), 77—114.

Существует обширная учебная литература, посвященная мере Винера с вероятностной точки зрения: Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956; Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963; T. Hida, Stationary Stochastic Processes, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970; К. Ито, Г. Маккин, Диффузионные процессы и их траектории, «Мир», М., 1968; М. Кац, Вероятность и смежные вопросы в физике, «Мир», М., 1965. Читатель, интересующийся этим предметом, но не знакомый с его вероятностными основами, может воспользоваться лекциями Рида: M. Reed, Functional Analysis and Probability Theory, in Constructive Quantum Field Theory (G. Velo and A. S. Wightman, eds.), Springer Lecture Notes in Physics, **25**, 1973, pp. 1—41 (русский перевод в сб. «Конструктивная теория поля», «Мир», М., 1977, стр. 13—47). Множество подробных сведений о свойствах регулярности меры Винера и, в частности, теорему X.67 можно почерпнуть из книги Ито и Маккина.

Иногда литература по теории вероятностей, особенно более старая, содержит технические сложности, которые в нашем рассуждении даже не появлялись. Это происходит потому, что некоторые авторы строят меру Винера таким образом, что, если это перевести на наш язык, она оказывается только бэровой мерой. Но некоторые хорошие множества Ω, например Ω_α, борелевы, но не бэровы множества. Идея обойти некоторые технические затруднения, реализуя Ω как компактное пространство-произведение и пользуясь регулярными борелевыми мерами, принадлежит Нельсону (E. Nelson, Regular Probability Measures on Function Space, *Ann. Math.*, **67** (1954), 630—643). К сожалению, метод Нельсона не снимает всех проблем измеримости, так как при дальнейшем построении важными оказываются некоторые неборелевы множества, такие, как пути, непрерывные справа.

Идея Фейнмана выразить динамику уравнения Шредингера в виде суммы по траекториям была им сформулирована в Принстонской диссертации (1942) и в статье: R. Feynman, Space—time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.*, **20** (1948), 367—387 (русский перевод в сб. «Вопросы причинности в квантовой механике», ИЛ, М., 1955). Читатель может найти детальное изложение этого предмета и его дальнейшее развитие в книге: Р. Фейнман и А. Хибс, Кваитовая механика и интегралы по траекториям, «Мир», М., 1968. Идея продолжения к мнимому времени, так чтобы можно было воспользоваться мерой Винера, принадлежит Кацу (M. Kac, On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Univ. of California Press, Berkeley, 1951, pp. 189-215). Там же получена формула Фейнмана—Каца. Наш вывод формулы Фейнмана—Каца заимствован из цитированной выше статьи Нельсона (в *J. Math. Phys.*).

Интегралы по путям сыграли принципиальную роль в конструктивной квантовой теории поля, особенно в современной теории евклидовых и марковских полей. Методы интеграла по путям в конструктивную квантовую теорию поля ввел Нельсон в первой из цитируемых в Замечаниях к § X.9 статье, и он же ввел их в евклидову квантовую теорию поля (E. Nelson, Quantum fields and Markov fields, in Partial Differential Equations (D. Spencer, ed.), Symp. Pure Math., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1973, pp. 211—219). Рассмотрение этих методов и их дальнейшего развития читатель найдет в книге «Конструктивная квантовая теория поля», цитированной выше.

§ X.12. Использование разложений типа разложения Дайсона для нахождения оператора эволюции (пропагатора) $U(t, s)$, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{d}{dt} U(t, s) = -iH(t)\, U(t, s), \quad U(s, s) = I, \tag{X.163}$$

основано, в сущности, на методе последовательных подстановок, развитом еще в XIX веке для решения интегральных уравнений. Уравнение (X.163) формально эквивалентно интегральному уравнению

$$U(t, s) = I - i \int_s^t H(r)\, U(r, s)\, dr.$$

Мы получим разложение Дайсона, если будем последовательно подставлять это выражение для $U(t, s)$ под интеграл. Дайсон воспользовался этим разложением для построения теории возмущений в квантовой электродинамике: F. J. Dyson, The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman, *Phys. Rev.*, **75** (1949), 486—502 (русский перевод в сб. «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, М., 1950) и The S-matrix in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.*, **75** (1949), 1736—1755 (русский перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, М., 1954).

Като в своей статье: T. Kato, Integration of the equation of evolution in a Banach space, *J. Math. Soc. Japan*, **5** (1953), 208—234, первым нашел общие условия существования решения уравнения эволюции $d\varphi(t)/dt = A(t)\varphi(t)$, когда $A(t)$ — неограниченный оператор. Поскольку одно из главных применений этой теории — дифференциальные уравнения в частных производных, в этой области еще прежде было много результатов частного характера. При доказательстве теоремы X.70 мы близко следовали Иосиде (К. Иосида, Функциональный анализ, «Мир», М., 1967). Более общие результаты см. в работе: T. Kato, Linear evolution equations of hyperbolic type, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, A Math.*, **17** (1970), 241—258.

Обсуждение результатов, относящихся к зависящим от времени формам, и, в частности, о расширении теоремы X.71 на класс Рольника см. B. Simon, Quantum Mechanics for Hamiltonians defined as quadratic forms, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971.

Идея воспользоваться $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$, чтобы перейти от зависящих от времени квантовомеханических гамильтонианов к не зависящим от времени, принадлежит Хауленду (J. Howland, Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians, *Math. Ann.*, **207** (1974), 315—335). Идея Хауленда, между прочим, имеет красивое применение в теории рассеяния. Пусть $U(t, s)$ и $U_0(t, s)$ — два унитарных оператора эволюции на $\mathcal{H}$, и пусть $\hat{U}(\sigma)$ и $\hat{U}_0(\sigma)$ — соответствующие сильно непрерывные однопараметрические группы на $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$. Тогда можно показать, что волновые операторы для зависящей от времени теории на $\mathcal{H}$ существуют тогда и только тогда, когда обычные волновые операторы

$$W_{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{\sigma \to \infty} \hat{U}_0(-\sigma)\, \hat{U}(\sigma)$$

существуют на $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$. Следовательно, можно доказать существование волновых операторов в некоторых теориях с зависящим от времени гамильтонианом, переформулировав их, как указано выше, и пользуясь обычными методами для не зависящего от времени гамильтониана. Доказательство этих результатов и тех, что упомянуты в основном тексте, см. в указанной работе Хауленда.

Существует другой метод построения пропагаторов, *формально* удовлетворяющих уравнению (X.163). Действительно, пусть $\mathscr{B}$—банахово пространство, элементами которого служат функции на некотором фиксированном компактном интервале вещественной оси со значениями во множестве неограниченных операторов. Предположим, что в $\mathscr{B}$ содержится плотное подмножество $\mathscr{B}_0$, такое, что для любого элемента $f \in \mathscr{B}_0$ уравнение (X.163) с $H(t) = H_0 + f(t)$, где H_0—некоторый фиксированный оператор, имеет корректно определенное решение. Обозначим через $U(t, s; f)$ соответствующий пропагатор. Если отображение $U(t, s; \cdot)$ равномерно непрерывно на $\mathscr{B}_0$, то его можно продолжить на все $\mathscr{B}$ и получить формальные решения уравнения (X.163), отвечающие $f \in \mathscr{B}$. Пример такой ситуации мы увидим в дополнении к § XIII.6.

§ X.13. Первое доказательство существования глобальных решений уравнения (X.138) ($m > 0$) принадлежит Йоргенсу (K. Jörgens, Das Anfangswertproblem im Grossen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen, *Math. Z.*, 77 (1961), 295—308).

Абстрактный подход к этим нелинейным задачам развит Браудером и Сигалом (F. Browder, On non-linear wave equations, *Math. Z.*, 80 (1962), 249—264; I. Segal, Non-linear semi-groups, *Ann. Math.*, 78 (1963), 339—364). Глобальная теорема существования для случая нулевой массы доказана впервые в работе: W. Strauss, Decay and asymptotics for $\square u = F(u)$, *J. Functional Analysis*, 2 (1968), 409—457. Случай нулевой массы можно рассматривать и прямо методами § X.13. Соответствующий способ намечен в задаче 76. Похожая техника применялась и к связанным уравнениям Максвелла—Дирака; см. L. Gross, The Cauchy problem for the coupled Maxwell and Dirac equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 19 (1966), 1—15; J. Chadam, On the Cauchy problem for the coupled Maxwell—Dirac equations, *J. Math. Phys.*, 13 (1972), 597—604; Global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Maxwell—Dirac equations in one space dimension, *J. Functional Analysis*, 13 (1973), 173—184.

Давно известно, что для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных глобальные решения не существуют; см., например, J. Keller, On solutions of non-linear wave equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 (1957), 523—532. Пример, который приведен в конце настоящего раздела, рассказал авторам Левин. Обобщение этого примера им опубликовано: H. Levine, Some non-existence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \tilde{F}(u)$, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 51 (1973), 371—386.

Пусть $\varphi(t) = \langle u(x, t), u_t(x, t)\rangle$—решение нелинейной задачи Клейна—Гордона, описанное в тексте, и определим M_t как отображение $\varphi(0) \longmapsto \varphi(t)$. Тогда M_t есть сильно непрерывная полугруппа ограниченных *нелинейных* операторов. Сразу же возникает вопрос, существует ли для нелинейного случая теория, аналогичная теории сильно непрерывных полугрупп *линейных* операторов, описанной в § 8, и, в частности, имеют ли такие нелинейные полугруппы однозначные инфинитезимальные генераторы? Этим вопросам посвящена обширная литература. См., например, T. Kato, Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces, pp. 138—161 in Proc. Symp. Pure Math., 18, Part I, Amer. Math. Soc., 1970 (F. Browder, ed.), или M. Crandall, Semi-groups of nonlinear transformations in Banach spaces, pp. 157—171 in Contributions to Nonlinear Functional Analysis (E. Zarantonello, ed.), Academic Press, New York, 1971, а также указанную там литературу.

§ X. 14. Довольно хорошее изложение гамильтоновой механики (хотя с некоторыми математическими ошибками) можно найти в книге Г. Голдстайна,

Классическая механика, Гостехтеориздат, М., 1957. Более изощренным способом она изложена в книге: R. Abraham, Foundations of Mechanics, Benjamin, New York, 1967.

Естественной основой для формулировки классической механики служит симплектическое многообразие. Квадратичная форма q на конечномерном вещественном векторном пространстве называется **симплектической**, если: (1) $q(v, w) = -q(w, v)$, (2) q невырожденна, т. е. из $q(v, w) = 0$ для всех w вытекает, что $v = 0$. **Симплектическое многообразие** есть дифференциальное многообразие M с выделенной 2-формой $\omega \in \wedge^2(M)$, такой, что (1) $d\omega = 0$, (2) при всяком x ω_x есть симплектическая форма в касательном пространстве $T_x(M)$. Форма ω определяет биективное отображение ω_* касательного пучка $T(M)$ в кокасательный пучок $T^*(M)$: $[\omega_*(X)](Y) = \omega(X, Y)$. Для данных $f, g \in C^\infty(M)$ их скобка Пуассона определяется посредством $\{f, g\} = [\omega_*^{-1}(df)](g)$. Если задана функция H в $C^\infty(M)$, то определим ассоциированный с ней гамильтонов поток формулой $\dot{p}(t) = (Xp)(t)$, где X — векторное поле $X = -\omega_*^{-1}(dH)$. Существует естественная форма объема, определяемая через ω, именно $\wedge^n\omega \in \wedge^{2n}(M)$, если $2n = \dim M$. Теорема Лиувилля утверждает, что $\wedge^n\omega$ инвариантна относительно любого гамильтонова потока. Кокасательный пучок любого многообразия естественным путем оказывается симплектическим многообразием.

L^2-версия теоремы Лиувилля состоит в том, что L кососимметричен. Идея воспользоваться теоремой VIII.11 для доказательства кососопряженности $\overline{L}$ высказана в работе: W. Hunziker, The S-matrix in classical mechanics, *Comm. Math. Phys.*, 8 (1968), 282—299. Общая идея применения теорем существования для систем первого порядка к доказательству самосопряженности в существенном дифференциальных операторов находит свое дальнейшее развитие в работе: P. Chernoff, Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations, *J. Functional Analysis*, 12 (1973), 401—414. Чернов пользуется тем, что если $U_t = e^{-iAt}$ оставляет инвариантным некоторое плотное множество D и $D \subset C^\infty(A)$, то A^n самосопряжен в существенном на D для любого n. С помощью специального приема можно рассматривать так и операторы, которые не кажутся на первый взгляд квадратами операторов первого порядка, например $-\Delta$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$. Действительно, положим $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$, и пусть $d(f, \mathbf{g}, \mathbf{h}, k) = (0, \operatorname{grad} f, \operatorname{rot} \mathbf{g}, \operatorname{div} \mathbf{h})$, так что $d^*d(f, \mathbf{g}, \mathbf{h}, k) = (-\Delta f, \ldots)$ и $d^2 = 0$. Положим $A = d + d^*$. Тогда A^2, суженный на первый член суммы, есть $-\Delta$. Разумеется, это не простейший способ анализа $-\Delta$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$, однако этот метод позволяет доказать, что оператор Лапласа—Бельтрами самосопряжен в существенном на $C^\infty(M)$ для широкого класса римановых многообразий. Методы Чернова позволяют также доказать такую теорему:

Теорема. Если $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ и α и β — обычные матрицы Дирака, то

$$H = -\alpha \cdot i\partial + \beta m + V$$

самосопряжен в существенном на $C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

В отличие от случая оператора Шредингера здесь отсутствуют условия на рост V. Как отмечает Чернов, это не удивительно, ибо релятивистские ограничения на скорость исключают попадание на бесконечность за конечное время.

Если H обладает сингулярностями, например кулоновыми, то мы не можем требовать существования глобальных решений уравнения (X.153) при всех начальных условиях, поскольку могут иметь место столкновения. В многочастичных случаях можно вообразить и худшие ужасы. Вместо этого хотелось бы доказать существование глобальных решений для почти всех начальных условий, т. е. **почти полноту**. Почти полнота может быть доказана для проблемы двух тел применением закона сохранения углового момента, а для задачи трех тел — с помощью результатов Сундмана (K. Sundman, Le problème des trois corps, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, 35 (1969)) и Биркгофа (G. D. Birkhoff, Dynamical Systems, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1, IX (1927)). Частные результаты, относящиеся к задаче N тел, см. в следующей литературе: H. Pollard, D. G. Saari, Singularities of the N-Body Problem, I, II, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 30 (1968), 263—269; Inequalities, II, ed. O. Shisha, Academic Press, New York, 1970; D. G. Saari, Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 162 (1971), 267—271; erratum 168 (1972), 521.

Некоторые из самых интересных проблем классической механики рассмотрены в книге Абрахама и в книгах: H. Pollard, Mathematical Introduction to Celestial Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1966; C. L. Siegel, J. K. Moser, Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1971; S. Sternberg, Celestial Mechanics, Part I, II, Benjamin, New York, 1969.

Наконец, необходимо отметить красивую работу Ланфорда о существовании решений уравнений Ньютона для некоторых систем с бесконечным числом частиц: O. E. Lanford, III, The classical mechanics of one-dimensional systems of infinitely many particles, I, II, *Comm. Math. Phys.*, 9 (1968), 176—191; 11 (1969), 257—292.

ЗАДАЧИ

1. (a) Пусть A_n — симметрический оператор на $\mathcal{H}_n$ и D — множество векторов в $\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ вида $\psi=(\psi_1, \psi_2, \ldots)$, где $\psi_n \in D(A_n)$ и все, кроме конечного числа, ψ_n равны нулю. Покажите, что $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ симметричен на D и что $n_+(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n_+(A_n)$, $n_-(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n_-(A_n)$.

(b) Покажите, что $i\,d/dx$ на $C_0^\infty(0, \infty)$ имеет индексы дефекта $n_+=0$, $n_-=1$. Покажите, что $i\,d/dx$ на $C_0^\infty(-\infty, 0)$ имеет индексы дефекта $n_+=1$, $n_-=0$.

(c) Покажите, как построить симметрический оператор с любой заданной парой индексов дефекта.

2. Пусть A — замкнутый симметрический оператор, и предположим, что A имеет самосопряженное расширение. Возможно ли, чтобы A имел замкнутое симметрическое расширение $\tilde{A}$, которое не имеет самосопряженных расширений?

3. Пусть $p(x)$ — полином с вещественными коэффициентами, и пусть $A = p(i\,d/dx)$ с областью определения $C_0^\infty(0, \infty)$ в $L^2(0, \infty)$.

(a) Докажите, что A симметричен.

(b) Как связаны значения $p(x)$ с индексами дефекта A?

(c) Докажите (не опираясь на теорему X.3), что если $p(x)$ имеет только четные степени, то индексы дефекта A совпадают.

(d) Докажите, что если p нечетной степени, то индексы дефекта A не совпадают.

†*4.* Пусть M и N — замкнутые подпространства сепарабельного гильбертова пространства. Докажите, что если $\dim M > \dim N$, то существует такой $u \in M$, $\|u\|=1$, что $u \in N^\perp$.