des trois corps, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, 35 (1969)) и Биркгофа (G. D. Birkhoff, Dynamical Systems, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1, IX (1927)). Частные результаты, относящиеся к задаче N тел, см. в следующей литературе: H. Pollard, D. G. Saari, Singularities of the N-Body Problem, I, II, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 30 (1968), 263—269; Inequalities, II, ed. O. Shisha, Academic Press, New York, 1970; D. G. Saari, Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 162 (1971), 267—271; erratum 168 (1972), 521.

Некоторые из самых интересных проблем классической механики рассмотрены в книге Абрахама и в книгах: H. Pollard, Mathematical Introduction to Celestial Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1966; C. L. Siegel, J. K. Moser, Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1971; S. Sternberg, Celestial Mechanics, Part I, II, Benjamin, New York, 1969.

Наконец, необходимо отметить красивую работу Ланфорда о существовании решений уравнений Ньютона для некоторых систем с бесконечным числом частиц: O. E. Lanford, III, The classical mechanics of one-dimensional systems of infinitely many particles, I, II, *Comm. Math. Phys.*, 9 (1968), 176—191; 11 (1969), 257—292.

ЗАДАЧИ

1. (a) Пусть A_n — симметрический оператор на $\mathcal{H}_n$ и D — множество векторов в $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ вида $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots)$, где $\psi_n \in D(A_n)$ и все, кроме конечного числа, ψ_n равны нулю. Покажите, что $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ симметричен на D и что $n_+(A) = \sum_{n=1}^{\infty} n_+(A_n)$, $n_-(A) = \sum_{n=1}^{\infty} n_-(A_n)$.

(b) Покажите, что $i\,d/dx$ на $C_0^\infty(0, \infty)$ имеет индексы дефекта $n_+ = 0$, $n_- = 1$. Покажите, что $i\,d/dx$ на $C_0^\infty(-\infty, 0)$ имеет индексы дефекта $n_+ = 1$, $n_- = 0$.

(c) Покажите, как построить симметрический оператор с любой заданной парой индексов дефекта.

2. Пусть A — замкнутый симметрический оператор, и предположим, что A имеет самосопряженное расширение. Возможно ли, чтобы A имел замкнутое симметрическое расширение $\tilde{A}$, которое не имеет самосопряженных расширений?

3. Пусть $p(x)$ — полином с вещественными коэффициентами, и пусть $A = p(i\,d/dx)$ с областью определения $C_0^\infty(0, \infty)$ в $L^2(0, \infty)$.

(a) Докажите, что A симметричен.

(b) Как связаны значения $p(x)$ с индексами дефекта A?

(c) Докажите (не опираясь на теорему X.3), что если $p(x)$ имеет только четные степени, то индексы дефекта A совпадают.

(d) Докажите, что если p нечетной степени, то индексы дефекта A не совпадают.

†*4.* Пусть M и N — замкнутые подпространства сепарабельного гильбертова пространства. Докажите, что если $\dim M > \dim N$, то существует такой $u \in M$, $\|u\| = 1$, что $u \in N^\perp$.

†5. Завершите анализ примера 2 в § X.1, показав, что различные самосопряженные расширения A отвечают различным граничным условиям в нуле, сформулированным в этом примере.

6. Классифицируйте самосопряженные расширения оператора $-d^2/dx^2$ на $C_0^\infty(0, 2\pi)$ и интерпретируйте их в терминах рассеяния на окружности с выделенной точкой.

7. Докажите, что если $V(x)$ убывает при $x \downarrow 0$ в $(0, \infty)$, то $-d^2/dx^2+V(x)$ относится к случаю предельной окружности в нуле. *Указание*:

(a) Сначала покажите, что без потери общности можно считать, что $V(x) < 0$ вблизи нуля.

(b) Аппроксимируйте $V(x)$ вблизи нуля убывающей ступенчатой функцией $\tilde{V}(x)$ (с бесконечным числом ступенек) так, чтобы $|V(x)-\tilde{V}(x)|$ была ограничена вблизи нуля, и покажите, что $-d^2/dx^2+V(x)$ относится к предельной окружности тогда и только тогда, когда $-d^2/dx^2+\tilde{V}(x)$ относится к предельной окружности вблизи нуля.

(c) Покажите, что $-d^2/dx^2+\tilde{V}(x)$ относится к предельной окружности, исследовав поведение решений уравнения $\varphi''(x)=\tilde{V}(x)\varphi(x)$ и показав, что оба они принадлежат L^2 вблизи нуля.

8. Пусть V—непрерывная функция на $(0, \infty)$, и предположим, что $-d^2/dx^2+V$ ограничен снизу на $C_0^\infty(0, \infty)$.

(a) Пусть E строго меньше нижней границы $-d^2/dx^2+V$. Докажите, что ни одно решение уравнения $-u''+Vu=Eu$ не имеет более одного нуля. *Указание*: докажите сначала, что любая функция $\psi \in C_0^\infty[a, b]$, $0 < a < b < \infty$, такая, что $\psi(a)=\psi(b)=0$, удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b [|\psi'(x)|^2+V(x)|\psi(x)|^2]\,dx > E\int_a^b |\psi(x)|^2\,dx.$$

(b) Пусть теперь $W \geqslant V$ поточечно. Докажите, что если $-d^2/dx^2+V$ относится к предельной точке в нуле, то и $-d^2/dx^2+W$ тоже.

Примечания. (1) Эта задача взята из статьи Курса, цитированной в Замечаниях к § X.1. (2) К. Йоргенс высказал следующую общую гипотезу. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$—открытое множество, дополнение которого имеет меру нуль. Пусть V и W непрерывны на M и $-\Delta+V$ ограничен снизу и самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(M)$. Если $W \geqslant V$, то $-\Delta+W$ также самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(M)$.

9. Пусть $\chi(x)$ есть C^∞-функция на $[0, \infty)$, обращающаяся в нуль при $x < 1$ и равная единице при $x > 2$. Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, и положим $\psi_m(x) = \psi(x)\chi(m|x|)$. Докажите, что если $n \geqslant 5$, то $\psi_m \xrightarrow{L_2} \psi$, $-\Delta\psi_m \xrightarrow{L_2} -\Delta\psi$, и заключите отсюда, что $-\Delta$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ при $n \geqslant 5$. (См. последний пример в дополнении к § X.1.)

†10. Докажите оценку (X.17).

11. Постройте потенциал V на $[0, 1]$ так, чтобы было $\lim_{r\to 0} V(r) = -\infty$, но при этом $-d^2/dx^2+V$ относился к случаю предельной точки в нуле (см. задачу 7). [*Указание*. Возьмите V кусочно-постоянным с шагами размера $-a_n$, чтобы все $a_1a_2^{-1}$, $a_3a_2^{-1}$, $a_3a_4^{-1}$, $\ldots$, $a_{2n-1}a_{2n}^{-1}$, $a_{2n+1}a_{2n}^{-1}$ были очень малы.]

†*12.* Восполните детали примера, иллюстрирующего различия в поведении решений, отвечающих потенциалу

$$V_{ab}(x) = 2x^{-2} - 9x^4 (a - 2b \cos(2x^3))$$

(см. Замечания к § X.1).

†*13.* Докажите часть (b) теоремы X.13.

14. Пусть V — измеримая функция на $\mathbb{R}^3$, и пусть $V(r) \longrightarrow 0$ при $r \longrightarrow \infty$. Докажите, что если $D(V) \supset D(-\Delta)$, то $V \in L^2 + L^\infty$ и, следовательно, $< < -\Delta$. (Значит, «потенциалы», для которых можно пользоваться теоремой Реллиха,— это как раз потенциалы класса $L^2 + L^\infty$.)

15. Покажите, что $A = -d^2/dx^2 + V$ как форма ограничен снизу на $C_0^\infty(0, \infty)$, если $V(x) \geqslant -1/4x^2$, и не ограничен снизу, если $V(x) \leqslant c/x^2$, где $c < -{}^1/_4$.

16. Пусть $E > 0$. Докажите непосредственно, пользуясь ядром оператора $(-\Delta + E)^{-1}$, что $V(-\Delta + E)^{-1}$ ограничен, если $V \in L^2(\mathbb{R}^3)$, и что $\|V(-\Delta + E)^{-1}\| \longrightarrow 0$ при $E \longrightarrow \infty$. Выведите отсюда (без соболевской оценки), что $V < < -\Delta$.

17. Пусть V принадлежит классу Рольника. Докажите, что

(a) $\| |V|^{1/2} (-\Delta + E)^{-1} |V|^{1/2} \| \longrightarrow 0$ при $E \longrightarrow \infty$,

(b) $\| |V|^{1/2} (-\Delta + E)^{-1/2} \| \longrightarrow 0$ при $E \longrightarrow \infty$,

(c) $\| (-\Delta + E)^{-1/2} |V| (-\Delta + E)^{-1/2} \| \longrightarrow 0$ при $E \longrightarrow \infty$.

(d) Из $V \in R$ следует, что $V \ll -\Delta$.

18. Пусть A и C самосопряжены в существенном на гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Допустим, что $B < < A$ и что D C-ограничен. Докажите, что $A \otimes C + B \otimes D$ самосопряжен в существенном на $D(A) \otimes D(C)$.

19. Пусть A самосопряжен, а B симметричен. Предположим, что B A-ограничен с относительной гранью, равной a. Докажите, что

$$a = \lim_{n \to \infty} \| B(A + in)^{-1} \|.$$

20. Пусть A самосопряжен. Оператор B, для которого $D(B) \supset D(A)$, называется A**-компактным**, если $B(A - z)^{-1}$ компактен при всех $z \in \rho(A)$.

(a) Докажите, что B A-компактен, если $B(A - z)^{-1}$ компактен при одном $z \in \rho(A)$.

(b) Предположим, что B симметричен и A-компактен. Докажите, что $B < < A$. [*Указание*: воспользуйтесь результатом задачи 19.]

21. Пусть $\mathcal{H}_m$, $m = \{0, \pm 1, \ldots\}$,— шкала пространств, ассоциированных с положительным оператором A.

(a) Докажите, что B A-компактен тогда и только тогда, когда B — компактный оператор из $\mathcal{H}_{+2}$ в $\mathcal{H}$.

(b) Пусть β — симметрическая квадратичная форма, ограниченная как форма относительно A. Докажите, что если β определяет компактный оператор из $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$, то $\beta \ll A$.

*(c) Пусть самосопряженный оператор B A-компактен. Докажите, что B определяет компактный оператор из $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$.

22. Воспользуйтесь приемом Коиради и докажите, что $-d^2/dx^2+p(x)$ самосопряжеи в существеииом иа $C_0^\infty(\mathbb{R})$, когда $p(x)=ax^6+\sum_{i=0}^{5} c_i x^i$ и $a>0$ достаточио мало.

23. (a) Докажите, что при любом $a>1$ существует иекоторое такое b, что для всех $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$\|(p^2+x^2)\psi\|^2+\|x^4\psi\|^2\leqslant a\|(p^2+x^2+x^4)\psi\|^2+b\|\psi\|^2,$$

где $p=-i\,d/dx$.

(b) Зная, что $p^2+x^2+x^4$ самосопряжеи в существеииом иа $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, выведите, что ои самосопряжеи (и, в частиости, замкиут) иа $D(p^2+x^2)\cap D(x^4)$.

(c) Таким же способом докажите, что $D(p^2+x^2)=D(p^2)\cap D(x^2)$, и сделайте вывод, что

$$D(p^2+x^2+x^4)=D(p^2)\cap D(x^4).$$

24. Цель этой задачи—доказать (без обращеиия к теореме X.28) самосопряжеииость в существеииом иа $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ оператора $-\Delta+V$ с бескоиечио диффереицируемой веществеииозиачиой и ограиичеииой сиизу иа $\mathbb{R}^n$ фуикцией $V(x)$.

(a) Заметьте, что можио считать, что $V(x)\geqslant 1$, и докажите, что

$$D((-\Delta+V)^*)=\{\psi\mid\psi\in L^2,\ -\Delta\psi+V\psi\in L^2\},$$

где $-\Delta+V$ действует в смысле обобщеииых фуикций.

(b) Объясиите, почему всякое слабое решеиие уравнеиия $-\Delta\psi+V\psi=0$ есть C^∞-фуикция.

(c) Покажите, что всякое слабое решеиие уравнеиия $\Delta\psi=V\psi$ удовлетворяет условию

$$\Delta|\psi(x)|^2\geqslant|\psi(x)|^2.$$

(d) Если $\psi\in\operatorname{Ker}((-\Delta+V)^*)$, то положим $F(r)=\int_{|x|^2=r}|\psi(x)|^2\,d\Omega$, где $d\Omega$—обычиая мера на сфере. Покажите с помощью интегрироваиия по частям, что F моиотоиио возрастает.

(e) Сделайте вывод, что $\psi=0$ и, следовательио, $-\Delta+V$ самосопряжен в существеииом иа $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

25. (Условие разрешимости проблемы момеитов Стильтьеса.)

(a) Докажите, что последовательиость веществеииых чисел $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ будет моментами иекоторой меры с иосителем иа положительиой полупрямой тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m,\,n=0}^{N}\bar\beta_n\beta_m a_{n+m}\geqslant 0\quad\text{и}\quad\sum_{n,\,m=0}^{N}\bar\beta_n\beta_m a_{n+m+1}\geqslant 0$$

для всех N и всех $\langle\beta_1,\ldots,\beta_N\rangle\in\mathbb{C}^N$.

[*Указание*. Следуйте выводу условия разрешимости проблемы моментов Гамбургера (§ X.1), ио пользуйтесь расширеиием Фридрихса.]

(b) Докажите, что если в дополиеиие к требоваииям положительиости a_n удовлетворяют еще условию $|a_n|\leqslant CD^n(2n)!$, то решеиие из (a) единственное. [*Указание*. Воспользуйтесь теоремой X.40.]

26. Постройте полуограниченный симметрический оператор, имеющий неполуограниченное самосопряженное расширение.

27. Пусть A—симметрический оператор с инвариантной областью определения.

(a) Пусть B—расширение Фридрихса оператора $A^2 \upharpoonright D(A)$. Докажите, что $B = A^* \bar{A}$.

(b) Пусть $C = \bar{A} A^*$. Докажите, что C есть самосопряженное расширение $A^2 \upharpoonright D(A)$ и что справедливо равенство $Q(C) = D(A^*)$.

28. Пусть A—симметрический оператор. Предположим, что $D(A^2)$ плотно. Докажите, что если A^2 самосопряжен в существенном на $D(A^2)$, то A самосопряжен в существенном. [*Указание.* Сначала докажите, что $(A^*)^2 \subset \subset (A^2)^*$.]

29. Пусть A—самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Докажите, что $\psi \in \mathcal{H}$—аналитический вектор оператора A тогда и только тогда, когда $f(t) = e^{itA}\psi$ есть сужение на вещественную ось функции, аналитической в полосе $|\operatorname{Im} t| < b$ с некоторым $b > 0$.

30. Цель этой задачи—доказательство теоремы фон Неймана (теоремы VIII.14). Пусть U, V удовлетворяют соотношениям Вейля $U(t)V(s) = e^{its}V(s)U(t)$. Пусть $\alpha > 0$, и пусть f имеет вид $f(s, t) = s^n t^m \exp(-\alpha(s^2 + t^2))$. Положим для $\psi \in \mathcal{H}$

$$W_\psi(f) = \int f(s, t)\, U(t)\, V(s)\, \psi\, ds\, dt.$$

(a) Докажите, что множество $\{W_\psi(f) \mid \psi \in \mathcal{H}\}$ тотально в $\mathcal{H}$. Пусть D—конечная линейная оболочка $\{W_\psi(f)\}$.

(b) Докажите, что $U(t_0)\, W_\psi(f) = W_\psi(f(s, t - t_0))$ и что

$$V(s_0)\, W_\psi(f) = W_\psi(f(s - s_0, t)\, e^{-its_0}),$$

а затем воспользуйтесь этим, чтобы доказать, что каждый W_ψ есть аналитический вектор для P и для Q.

(c) Докажите, что $PW_\psi(f) = W_\psi(i\partial_t f)$ и что $QW_\psi(f) = W_\psi(i\partial_s f) + W_\psi(-tf)$. Воспользуйтесь этим для доказательства того, что D есть множество аналитических векторов оператора $N = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2 - 1)$.

(d) Пусть $A = \sqrt{2}(Q + iP)/2$. Докажите, что A и A^* определены на $C^\infty(N)$ и отображают $C^\infty(N)$ в себя. [*Указание.* Воспользуйтесь методом § X.5.] Докажите, что $N = A^*A$ на векторах из $C^\infty(N)$.

(e) Пусть $\psi \neq 0$ принадлежит области значений спектрального проектора $E_{(n-1,\, n]}$ для N. Докажите, что $N^m A\psi = A(N-1)^m \psi$.

(f) В условиях (e) докажите, что

$$(n-1)(n-2)^m \|\psi\|^2 < (A\psi, N^m A\psi) \leqslant n(n-1)^m \|\psi\|^2,$$

и придите к выводу, что $A\psi$ принадлежит области значений спектрального проектора $E_{(n-2,\, n-1]}$ и что $A\psi \neq 0$, если $n \geqslant 1$.

(g) Докажите, что если ψ удовлетворяет условиям из (e), то $A^n\psi = \varphi \neq 0$, однако $A\varphi = 0$. Докажите также, что $N\psi = n\psi$ и что $\psi = (1/n!)(A^*)^n \varphi$.

(h) Посредством выбора ортонормированного базиса для $\{\varphi \mid A\varphi = 0\}$ завершите доказательство теоремы фон Неймана.

31. Воспользуйтесь идеями предыдущей задачи для того, чтобы доказать, что функции Эрмита составляют базис в $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

†*32.* Восстановите подробности всех утверждений относительно нижних граней и индексов дефекта примера 1 в § X.3.

33. (a) Пусть $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ — набор n симметрических операторов на плотном множестве $D\subset\mathscr{H}$. Назовем $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ замкнутым, если D с нормой $|||\psi||| = \sum_{i=1}^{n}\|A_i\psi\| + \|\psi\|$ есть банахово пространство. Докажите, что всякий такой набор имеет наименьшее замкнутое расширение.

(b) Пусть $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ — набор n симметрических операторов, замкнутый в смысле (a). Докажите, что оператор $\sum_{i=1}^{n} A_i^* A_i$, определенный на $\{\psi \mid \psi\in D,\ A_i\psi\in D(A_i^*)\}$, самосопряжен.

(c) Пусть $\mathbf{A}(x)$ есть $\mathbb{R}^3$-векторнозначная функция на $\mathbb{R}^3$, локально квадратично интегрируемая, и пусть $V(x)$ — положительная функция, локально принадлежащая L^1. Найдите «естественное» определение для

$$H = -\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + V.$$

†*34.* Пусть q_n — некоторое перечисление рациональных чисел, и пусть a — квадратичная форма на $C_0^\infty(\mathbb{R})$, заданная равенством

$$a(\psi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\overline{\psi(q_n)}\,\varphi(q_n).$$

Пусть $N = -d^2/dx^2 + 1$ на $L^2(\mathbb{R})$.

(a) Докажите, что для всех φ, $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и некоторой константы D

$$|a(\varphi, \psi)| \leqslant D\|N^{1/2}\varphi\|\cdot\|N^{1/2}\psi\|,$$

и выведите отсюда, что существует оператор A на $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$, ассоциированный с a.

(b) Докажите, что $\hat{A}$ имеет область определения $D(\hat{A}) = \{0\}$.

35. Пусть N — самосопряженный оператор и $N\geqslant 1$. Предположим, что a — симметрическая квадратичная форма с областью определения $Q(a) = D(N^2)$ и выполняются условия (i) $\pm a\leqslant cN^2$; (ii) $\pm i[N, a]\leqslant dN$ (как формы на $D(N^2)$, причем мы воспользовались (i), чтобы расширить a до формы на $D(N)$).

(a) Для φ, $\psi\in D(N^2)$ докажите, что

$$a(\varphi, \psi) = a(N^{-1}\varphi, N\psi) - [a, N](N^{-1}\varphi, \psi),$$

и заключите отсюда, что $|a(\varphi, \psi)| \leqslant (c+d)\|\varphi\|\cdot\|N^2\psi\|$.

(b) Докажите, что существует симметрический оператор A, определенный на $D(N^2)$ и такой, что AN^{-2} ограничен и $(\varphi, A\psi) = a(\varphi, \psi)$ для всех φ, $\psi\in D(N^2)$.

(c) Для всякого $\lambda > 0$ определите квадратичную форму $\delta(\lambda)$ на $\mathscr{H}$ формулой

$$\delta(\lambda) = \lambda^2 (N+\lambda)^{-2} [N, a] (N+\lambda)^{-1} + \lambda^2 (N+\lambda)^{-1} [N, a] (N+\lambda)^{-2}.$$

Докажите, что $\delta(\lambda)$ — антисимметрическая форма, ограниченная величиной $\|\delta(\lambda)\| \leqslant 2d$.

Пусть $\Delta(\lambda)$ обозначает кососимметрический оператор, ассоциированный с δ.

(d) Докажите, что $\|\Delta(\lambda) N^{-1}\| \longrightarrow 0$ при $\lambda \longrightarrow \infty$, и заключите отсюда, что $\Delta(\lambda) \longrightarrow 0$ сильно при $\lambda \longrightarrow \infty$.

(e) Взяв матричные элементы, докажите, что для любого $\theta \in D(A^*)$
$$A[\lambda^2 (N+\lambda)^{-2}]\,\theta = [\lambda^2 (N+\lambda)^{-2}]\, A^*\theta + \Delta(\lambda)\,\theta.$$

(f) Пусть $\theta(\lambda) = \lambda^2 (N+\lambda)^{-2}\theta$. Докажите, что $\theta(\lambda) \longrightarrow \theta$, $A\theta(\lambda) \longrightarrow A^*\theta$, и выведите отсюда, что A самосопряжен в существенном.

Примечание. Приведенное выше обобщение коммутаторной теоремы Нельсона есть частный случай теоремы Джаффе, которая позволяет заменить $\pm a \leqslant cN^2$ на $\pm a \leqslant cN^m$ с некоторым фиксированным m; см. статью Макбрайена, цитированную в Замечаниях к § X.5.

36. Предположим, что каждая компонента $\mathbf{A}$ есть вещественнозначная функция в $L^3(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ и что V лежит в $R + L^\infty(\mathbb{R}^3)$, где R обозначает класс Рольника. Для $\varphi, \psi \in Q(\Delta)$ определим

$$M(\varphi, \psi) = \left(\frac{1}{i}\nabla\varphi, \mathbf{A}\psi\right) + \left(\mathbf{A}\varphi, \frac{1}{i}\nabla\psi\right) + (\mathbf{A}\varphi, \mathbf{A}\psi).$$

Докажите, что M есть возмущение, ограниченное относительно формы $-\Delta$ с относительной гранью нуль, и заключите, что существует единственный самосопряженный оператор H, такой, что $Q(H) = Q(\Delta)$ и

$$(\varphi, H\psi) = (\varphi, -\Delta\psi) + M(\varphi, \psi) + (\varphi, V\psi).$$

37. Распространите теорему X.22 и задачу 36 на случай многих тел.

38. Примените методы § X.4 и § X.5, чтобы доказать, что оператор из $L^2(\mathbb{R}^{3N+3})$

$$-(2M_0)^{-1}(\partial_0 - ie\mathbf{A})^2 - (2m)^{-1}\sum_{n=1}^{N}(\partial_n - ie\mathbf{A})^2 - Ne^2\sum_{n=1}^{N}|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0|^{-1} + \frac{1}{2}e^2\sum_{n\neq m}|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m|^{-1} + e\mathbf{E}_0\cdot\left(\mathbf{x}_0 - \sum_{n=1}^{N}\mathbf{x}_n\right)$$

в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3N+3})$, если $\mathbf{A} \in C^1(\mathbb{R}^3)_{\mathrm{loc}}$.

†*39.* Покажите на примере, что самосопряженный оператор A может иметь область самосопряженности в существенном, не пересекающуюся с $D(A^2)$.

40. Пусть $A = i\,d/dx$ с областью определения $D(A) = \{\varphi \in L^2(0, 1) \mid \varphi \in AC[0, 1],\ \varphi' \in L^2(0, 1)$ и $\varphi(0) = \varphi(1)\}$. Оператор A самосопряжен. Пусть $D = \{\varphi \in L^2[0, 1] \mid \varphi$ имеет периодическое аналитическое продолжение на все $\mathbb{C}$ с периодом по x, равным единице, и $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)\}$.

(a) Докажите, что D есть плотное множество аналитических векторов для A.

(b) Будет ли оператор $A \restriction D$ самосопряжен в существенном?

41. Пусть $U(a, R)$ — одномерное представление трехмерной специальной евклидовой группы. Показав, что спектр импульса должен быть инвариантен относительно вращений, и пользуясь тем, что $SO(3)$ не имеет нетривиальных одномерных представлений, докажите, что $U(a, R)=1$ при всех a, R.

†*42.* Цель этой задачи — доказательство теоремы X.40.

(a) Пусть φ — полуаналитический вектор для $A\geqslant 0$. Допустим, что $\tilde{A}\geqslant 0$ есть самосопряженное расширение A_φ на $\mathscr{H}_\varphi$ (обозначения см. в § X.6). Докажите, что $\cos(t\tilde{A}^{1/2})$ однозначно определен числами $(\psi, A_\varphi^n\psi)$, где $\psi\in D_\varphi$. Заключите, что существует не более чем одно положительное самосопряженное расширение оператора A_φ.

(b) Докажите, что существует не более чем одно полуограниченное расширение оператора A_φ.

(c) Примените теорему X.24, чтобы сделать вывод, что A_φ в существенном самосопряжен.

(d) Докажите теорему X.40, применяя лемму Нуссбаума.

†*43.* (a) Докажите часть (b) теоремы X.41. [*Указание.* Пусть $\mathscr{P}_n$ — полиномы степени n по $\Phi_S(f)$. Докажите по индукции, что $\mathscr{P}_n\Omega_0$ плотно в $\mathscr{H}_s^{(n)}$.]

(b) Докажите часть (a) (iii) теоремы X.43.

†*44.* Докажите, что отображение E: $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)\longrightarrow L^2(H_m, d\Omega_m)$, определенное формулой $Ef=\sqrt{2\pi}\hat{f}\restriction H_m$, имеет плотную область значений.

45. Докажите, что в смысле квадратичных форм на $D_{\mathscr{S}}\times D_{\mathscr{S}}$

$$N=\int_{\mathbb{R}^3} a^\dagger(p)\,a(p)\,dp,$$

$$H_0\equiv d\Gamma(\mu)=\int_{\mathbb{R}^3}\mu(p)\,a^\dagger(p)\,a(p)\,dp.$$

†*46.* Докажите (X.76), (X.78), (X.79).

47. Докажите, что если $g\in L^p(\mathbb{R})$, $1<p\leqslant 2$, то $\hat{g}\left(\sum k_i\right)\prod_{i=1}^{n}\mu(k_i)^{-1/2}\in$ $\in L^2(\mathbb{R}^n)$. [*Указание.* Примените неравенства Хаусдорфа — Юнга и Юнга.]

48. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность коммутирующих самосопряженных операторов. Пусть D — плотная область, содержащаяся в области определения каждого A_i и инвариантная относительно действия каждого A_i. Пусть $\psi_0\in D$. Определим рекурсивно произведение $\circ A_1\ldots A_n\circ$, положив $\circ A_1\ldots A_n\circ=A_1\ldots A_n+$ $+P(A_1, \ldots, A_n)$, где $P(A_1, \ldots, A_n)$ — полином полной степени $n-1$ и степени 1 по каждой отдельной переменной, так что

$$((\circ A_1\ldots A_n\circ)\psi_0,\ (\circ A_{i_1}\ldots A_{i_m}\circ)\psi_0)=0$$

для всякого $\{i_1, \ldots, i_m\}\underset{\neq}{\subset}\{1, \ldots, n\}$ и $((\circ A_1\ldots A_n\circ)\psi_0, \psi_0)=0$.

(a) Покажите, что $\circ A_1\ldots A_n\circ$ однозначно определено для каждого $n\geqslant 1$.

(b) Покажите, что если φ — каноническое поле на $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, $f_n \in \mathcal{H}_C$ и $\psi_0 = \Omega_0$, то

$$\circ\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n)\circ = :\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n):.$$

(c) Покажите, что для каждого n викова степень канонического поля есть обычная степень плюс полином низшей степени по обычным степеням, и наоборот.

(d) Покажите, что $:\varphi_m(x, n)^4:$ (введенное при доказательстве теоремы X.45) можно записать в виде

$$:\varphi_m(x, n)^4: = \varphi_m(x, n)^4 - c_1\varphi_m(x, n)^2 - c_2,$$

где c_1 и c_2 зависят от n, но не от x.

Пусть A — инфинитезимальный генератор сжимающей полугруппы на банаховом пространстве X. Покажите, что для всех $\varphi \in X$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} (I + (t/n) A)^{-n}\varphi = e^{-tA}\varphi.$$

Литература. Книга Като по теории возмущений, стр. 593—596.

Пусть A — аккретивный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

(a) Покажите, что $J = (I - A)(I + A)^{-1}$ — замкнутый сжимающий оператор (не обязательно всюду определенный).

(b) Покажите, что аккретивные расширения оператора A находятся во взаимно однозначном соответствии со сжимающими расширениями оператора J.

(c) Примените (a) и (b) и докажите, что максимальный аккретивный оператор в гильбертовом пространстве порождает сжимающую полугруппу.

Пусть $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве X. Определим $\omega_0 = \inf\limits_{t>0} t^{-1}\log\|T(t)\|$.

(a) Докажите, что $\omega_0 = \lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\log\|T(t)\|$.

(b) Докажите, что для любого $\omega_1 > \omega_0$ существует такая константа M, что $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega_1 t}$ при всех $t > 0$.

Пусть A — аккретивный оператор на банаховом пространстве X. Докажите, что A замыкаем. [*Указание.* Если A не замыкаем, то существует такая последовательность $\varphi_n \in D(A)$, что $\varphi_n \to 0$ и $A\varphi_n \to \psi$, причем $\|\psi\| = 1$. Пусть $\eta \in D(A)$ и $\|\eta\| = 1$, и пусть $\|\eta - \psi\| > 1/2$. Пусть l_n — последовательность нормированных касательных функционалов векторов $\eta + c\varphi_n$. Применив теорему Алаоглу, получите противоречие для подходящего $c > 0$.]

Докажите, что $e^{\Delta t}$ — непрерывная L^p-сжимающая полугруппа, применяя неравенство Юнга и явную форму для ядра.

Пусть $q(x)$ — ограниченная вещественнозначная непрерывная функция. Докажите, что $e^{t(\Delta - q)}$ сохраняет положительность на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Восполните детали доказательства теоремы X.47b.

Докажите теорему X.53, применяя технику теорем X.12 и X.50. [*Указание.* Сначала докажите, что при данном $\theta_1 < \theta$ можно выбрать $\omega > 0$ так, что $\|B(A - (\lambda - \omega))^{-1}\| \leqslant 1/2$ при всех $\lambda \notin \overline{S}_{\pi/2 - \theta_1}$.]

57. (a) Дайте прямое доказательство того, что

$$\left(e^{z\Delta}f\right)(x)=(4\pi z)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4z}\right)f(y)\,dy$$

есть ограниченная голоморфная полугруппа с углом $\pi/2$ иа $C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Непосредственно докажите, что в операторном смысле иа $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ справедливо иеравенство

$$\left\|\partial_i e^{t\Delta}\right\|\leqslant Ct^{-1/2}.$$

Заключите, что $\partial_i(-\Delta+1)^{-1}$ ограничен на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$, так что $D(\Delta)\subset \subset D(\partial_i)$ в смысле операторов на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

†*58.* Докажите следствие 2 теоремы X.52.

59. Пусть $S(s)=e^{-sB}$ и $T(t)=e^{-tA}$ — сжимающие полугруппы на банаховом пространстве X. Допустим, что для всех $s>0$ и $t>0$ выполняется равенство $e^{-sB}e^{-tA}=e^{-tA}e^{-sB}$. Тогда $R(t)=e^{-tB}e^{-tA}$ — сильно непрерывная полугруппа. Докажите, что генератор C полугруппы $R(t)$ удовлетворяет условию

$$(I+C)^{-1}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+iy+A\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}-iy+B\right)^{-1}dy.$$

60. Пусть $K_1(\mathbb{R}^3)$ — замыкание $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ по иорме $\|\varphi\|_1^2=\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\nabla\varphi|^2\,dx$, и пусть $\mathscr{H}=K_1(\mathbb{R}^3)\oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ с внутренним произведением

$$(\langle f_1,f_2\rangle,\langle g_1,g_2\rangle)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(\overline{\nabla f_1}\cdot\nabla g_1+\bar{f}_2g_2)\,dx.$$

Пусть A — оператор $\begin{pmatrix}0 & I\\ \Delta & 0\end{pmatrix}$ с областью определения, состоящей из всех пар $\langle f_1,f_2\rangle$, таких, что $f_1,f_2\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$.

(a) Покажите, что iA симметричен.

(b) Покажите, что iA самосопряжен в существенном, найдя его индексы дефекта: $\langle 0,0\rangle$.

(c) Покажите, что $D((\overline{iA}))=\{\langle f_1,f_2\rangle\mid \Delta f_1\in L^2(\mathbb{R}^3),\ f_2\in K_1(\mathbb{R}^3)\}$.

(d) Пусть $U(t)=e^{i(\overline{iA})t}=e^{-\overline{A}}$, и пусть $\langle u_1(x,t),u_2(x,t)\rangle=U(t)\langle f_1,f_2\rangle$ для $\langle f_1,f_2\rangle\in D(\bar{A})$. Докажите, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)u_1(x,t)=0,\quad \|u_1(x,t)-f_1(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\longrightarrow 0$$

и

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}u_1(x,t)-f_2(x)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\longrightarrow 0 \text{ при } t\longrightarrow 0.$$

61. Пусть $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ — семейство операторов иа рефлексивном банаховом пространстве X, таких, что

(i) $T(t+s)=T(t)\,T(s)$,

(ii) $\bigcup\limits_{t>0}\operatorname{Ran}(T(t))$ плотно в X,

(iii) $l(T(t)\varphi)$ — измеримая функция t для каждого фиксированного $\varphi\in X$, $l\in X^*$.

(iv) $\|T(t)\|\leqslant 1$ при всех t.

Докажите, что $T(t)$ — сильно непрерывная функция t. [*Указание*. Подражайте доказательству теоремы VIII.9.]

Пусть $A^\dagger$ и A — операторы, определенные в примере 2 § 6, и пусть $H_0 = A^\dagger A + 1/2$, $V = x^4 = ((A+A^\dagger)/\sqrt{2})^4$.

(a) До жите, что

$$\left\|\left[H_0^{3/2},\ \left[H_0^{3/2},\ V\right]\right]\varphi\right\| \leqslant e_1\|H_0^3\varphi\| + e_2\|\varphi\|$$

при некоторых постоянных e_1 и e_2.

[*Указание*. Рассмотрите каждый член в V по отдельности и для каждого члена докажите эту оценку на n-ю функцию Эрмита.]

(b) Воспользуйтесь (a) и покажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое M_2, что выполняется (X.109).

(c) Примените те же методы к доказательству (X.110).

(a) Докажите, что слабая топология на единичном шаре в сепарабельном гильбертовом пространстве метризуема.

(b) Сделайте вывод, что шары в сепарабельном гильбертовом пространстве слабо секвенциально полны.

Пусть

$$\tilde{p}(x,\ y;\ t) = (4\pi Dt)^{-n/2} e^{-|x-y|^2/4Dt}$$

при некотором D, таком, что $\operatorname{Re} D \geqslant 0$, $D \neq 0$. Предположим, что существует такая мера μ на пространстве путей Ω из § X.11, что $\int \varphi\, d\mu$ задается правой частью (X.122), но с p, замененным на $\tilde{p}$ для $\varphi\in C_{\text{fin}}(\Omega)$. Пусть при данных $t_1, \ldots, t_n$ те функции из $C_{\text{fin}}(\Omega)$, которые имеют вид $F(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n))$, обозначены через $C^{t_1, \ldots, t_n}$.

(i) Докажите, что если $\operatorname{Re} D = 0$, то

$$\sup\left\{\left|\int \varphi\, d\mu\right| \,\Big|\, \|\varphi\|_\infty = 1,\ \varphi\in C^{t_1}(\Omega)\right\} = \infty,$$

и сделайте вывод, что такой меры не существует.

(ii) Докажите, что если $\operatorname{Re} D > 0$, то

$$\sup\left\{\left|\int \varphi\, d\mu\right| \,\Big|\, \|\varphi\|_\infty = 1,\ \varphi\in C^{t_1, \ldots, t_n}(\Omega)\right\} = (|D|/\operatorname{Re} D)^n,$$

и сделайте вывод, что такой меры со знаком не существует, за исключением случая $\operatorname{Im} D = 0$.

Пусть Ω_α — пути, непрерывные по Гёльдеру порядка α с некоторым $\alpha < 1/2$. Определим функции x и x_n из $\Omega\times[0,\ \infty)$ в $\mathbb{R}$, полагая

$$x(\omega,\ t) = \begin{cases} \omega(t), & \text{если } \omega\in\Omega_\alpha, \\ 0 & \text{во всех других случаях} \end{cases}$$

и

$$x_n(\omega,\ t) = \begin{cases} \omega(m/n), & \text{если } \omega\in\Omega_\alpha \text{ и } m/n \leqslant t < (m+1)/n, \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

(a) Докажите, что каждая $x_n(\omega, t)$ измерима по Борелю.

(b) Докажите, что $x_n(\omega, t) \longrightarrow x(\omega, t)$ поточечно на $\Omega\times[0, \infty)$ при $n \longrightarrow \infty$, и заключите, что $x(\cdot, \cdot)$ измерима по Борелю.

(c) Пусть S имеет меру Лебега нуль в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\Omega_S=\{\langle\omega, t\rangle\in\Omega_\alpha\times\times[0, \infty) \mid \omega(t)\in S\}$. Докажите, что Ω_S измеримо.

(d) Для каждого $t>0$ докажите, что $\mu_x\{\omega \mid \langle\omega, t\rangle\in\Omega_S\}=0$, и с помощью теоремы Фубини сделайте вывод, что $(d\mu_x \otimes dt)(\Omega_S)=0$.

(e) Завершите доказательство леммы, следующей за теоремой X.67, показав, что $\{t \mid \langle\omega, t\rangle\in\Omega_S\}$ имеет меру Лебега нуль для почти всех $\omega\in\Omega$.

66. Пусть H_0—самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $t\longmapsto V(t)$—сильно непрерывное отображение из $\mathbb{R}$ во множество ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, удовлетворяющих условиям

(1) $V(t)$: $D(H_0)\longrightarrow D(H_0)$ и $[H_0, V(t)]$—ограниченный оператор для каждого t,

(2) $\|[H_0, V(t)]\|$ локально ограничена.

(a) С помощью разложения Дайсона, переходя к представлению взаимодействия, докажите, что если $\psi\in D(H_0)$, то $\varphi_s(t)=e^{-iH_0t}\tilde{U}(t, s)\psi$ есть сильное решение уравнения

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(t)=-i(H_0+V(t))\varphi_s(t), \qquad \varphi_s(s)=\psi.$$

(b) Докажите утверждение (a), показав, что $H_0+V(t)$ удовлетворяет условиям теоремы X.70.

67. Пусть H_0—самосопряженное расширение оператора $-d^2/dx^2$ в $L^2[0, \pi]$, отвечающее граничным условиям $\varphi(0)=0=\varphi(\pi)$. Пусть $V(x, t)=\alpha(t)x$, где $\alpha(t)$—положительная C^∞-функция с носителем в интервале $[0, t_0]$, удовлетворяющая условию $\int\alpha(t)\,dt=1$.

(a) С помощью метода примера 1 в § X.12 найдите верхнюю и нижнюю грани для вероятности перехода в момент времени t_0 из первого возбужденного состояния в основнсе состояние.

(b) Почему эти оценки справедливы и для всех $t>t_0$?

†*68*. (a) Докажите, что предположения о $q(x, t)$ в примере 2 § 12 допускают применение теоремы X.70.

(b) Докажите, что предположения о $t\longmapsto V_1(t)$ и $t\longmapsto V_2(t)$ в теореме X.71 допускают применение теоремы X.70.

69. Пусть $U(t, s)$—сильно непрерывный унитарный пропагатор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Докажите, что

$$(\hat{U}(\sigma)f)(t)=U(t, t-\sigma)f(t-\sigma)$$

есть сильно непрерывная унитарная группа в $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$.

70. При соответствующих предположениях о $V(x, t)$ докажите формулу Фейнмана—Каца в случае зависящего от времени потенциала.

Покажите, что если f и g вещественнозначны, то компоненты $W(t)\langle f,g\rangle$ вещественнозначны при всех t. Здесь $W(t)$ — унитарная группа, определенная в § X.13. Воспользуйтесь этим, чтобы показать, что решение уравнения (X.138) вещественнозначно, если вещественнозначны начальные данные.

Пусть выполнены условия теоремы X.72. Расширьте J до отображения $\tilde{J}$ из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$, удовлетворяющего условиям (H_0) и (H_0^{L}). Предположим, что $\varphi(s)$ — непрерывная функция на $[0, t]$ со значениями в $\mathcal{H}$, удовлетворяющая интегральному уравнению (X.143), в котором J заменено на $\tilde{J}$. Докажите, что на самом деле φ принимает значения в $D(A)$, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (X.142), если $\varphi(0)\in D(A)$.

Докажите все оценки высшего порядка, необходимые для доказательства теоремы X.76.

Покажите, что если каждое локальное решение $\varphi(t)$ уравнения (X.142) подчиняется условию $\operatorname{Re}\int\limits_0^t (J(\varphi(s)), \varphi(s)), ds \leqslant 0$, то эти решения существуют глобально по t.

Пользуясь теоремами из § X.12, докажите глобальное существование, единственность, гладкость, непрерывную зависимость от начальных данных и конечность скорости распространения решения уравнения

$$u_{tt}-\Delta u+m^2u=-\lambda u^{2n+1},$$
$$u(0, x)=f(x),$$
$$u_t(0, x)=g(x),$$

где $\lambda > 0$, $x\in\mathbb{R}^2$ и $n=0, 1, 2, \ldots$.

Чтобы решать уравнение при нулевой массе в $\mathbb{R}^3$

$$u_{tt}-\Delta u=-\lambda|u|^2u, \quad \lambda > 0,$$
$$u(0, x)=f(x),$$
$$u_t(0, x)=g(x),$$

перепишем его, добавив к обеим частям линейный член:

$$u_{tt}-\Delta u+m^2u=-\lambda|u|^2u+m^2u, \qquad m>0,$$

а затем переформулируем задачу, как в § X.13, перейдя к уравнению первого порядка по t:

$$\varphi'(t)+iA\varphi(t)=J(\varphi(t)),$$
$$\varphi(0)=\langle f, g\rangle,$$

где $J(\varphi(t))=J(\langle u(t), v(t)\rangle)=\langle 0, -\lambda|u|^2u+m^2u\rangle$.

(a) Покажите, что оценки лемм 4 и 5 выполняются с этим новым J, так что в силу теоремы X.72 мы получаем локальное существование и единственность решения.

(b) Покажите, что на любом интервале $[0, T)$, где существует решение, энергия

$$E(t)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+|u_t|^2)\,dx+\frac{\lambda}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|u|^4\,dx$$

постоянна.

(c) Покажите, что на любом интервале $[0, T)$, где существует решение, $\| u(t) \|_2 \leqslant C + t\sqrt{2E}$.

(d) Воспользуйтесь (b) и (c) и покажите, что если $T < \infty$, то решение $\varphi(t)$ ограничено по норме на $[0, T)$. Значит, по теореме X.74 существует глобальное решение.

(e) Убедитесь в том, что доказательства гладкости и равенства единице скорости распространения проходят здесь так же, как и в случае положительной массы.

†*77*. Докажите, что

$$\int h\{f, g\}\, dx = \int \{h, f\}\, g\, dx$$

для любых $f, g, h \in C_0^1(\mathbb{R}^{6N})$.

†*78*. Докажите предложение, предшествующее теореме X.78.

79. Пусть $C_{0,\infty}(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных функций, исчезающих в нуле и на ∞. Пусть $D = d/dx$. Докажите, что D и $-D$ на естественной области определения аккретивны, однако лишь один из них порождает сжимающую полугруппу.

80. Пусть A, J и $\mathcal{H}$ удовлетворяют условиям теоремы X.74 (за тем исключением, что не требуется, чтобы J удовлетворяло условиям части (b) теоремы X.73). Допустим, что для всех k решения уравнения (X.143) равномерно ограничены при всех $\| \varphi(0) \| \leqslant k$. Докажите, что для каждого $j = 0, 1, \ldots, n$ и каждого k существует монотонно возрастающая (всюду конечная) функция $d_{j,k}(\cdot)$ на $(0, \infty)$, такая, что

$$\| A^j\varphi_1(t) - A^j\varphi_2(t) \| \leqslant d_{j,k}(|t|)\, \| \varphi_1(0) - \varphi_2(0) \|$$

для всех решений φ_i уравнения (X.143), для которых $\| \varphi_i(0) \| \leqslant k$. [*Указание*. Воспользуйтесь идеей теоремы X.75 и приемом леммы 1.]

81. Пусть C — комплексное сопряжение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть A — симметрический оператор, причем $C: D(A) \to D(A)$ и $AC = CA$. Расширение B оператора A называется **вещественным**, если $C: D(B) \to D(B)$ и $BC = CB$.

(a) Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ — ортонормированный базис в дефектном пространстве $\mathcal{K}_+$ оператора A. Определим $J: \mathcal{K}_+ \to \mathcal{K}_+$ формулой $J\left(\sum a_n\varphi_n\right) = \sum \overline{a}_n\varphi_n$. Докажите, что если U — унитарный оператор из $\mathcal{K}_+$ в $\mathcal{K}_-$, то соответствующее самосопряженное расширение A_U вещественно тогда и только тогда, когда $JCU: \mathcal{K}_+ \to \mathcal{K}_+$ имеет в базисе $\{\varphi_n\}$ матрицу, совпадающую с транспонированной к ней.

(b) Докажите, что A всегда имеет вещественные самосопряженные расширения.

(c) Докажите, что если индексы дефекта A равны единице, то всякое его самосопряженное расширение вещественно. Убедитесь в этом на примере оператора $-d^2/dx^2$ на $C_0^\infty(0, \infty) \subset L^2(0, \infty)$.

(d) Докажите, что если A имеет индексы дефекта 2 или более, то A имеет самосопряженные расширения, которые не являются вещественными. Убедитесь в этом на примере оператора $-d^2/dx^2$ на $C_0^\infty(0, 1) \subset L^2(0, 1)$.