

## ВВЕДЕНИЕ

*Тот, кто занимается функциональным анализом, — прежде всего аналитик, а не выродившийся представитель топологов.*

Э. ХИЛЛЕ

Большая часть книг по функциональному анализу страдает одним серьезным недостатком, который отчасти свойствен и первому тому нашего курса «Методов математической физики». Именно, предмет излагается в абстрактной и элегантной форме, как правило, без всякой связи с приложениями. Поэтому студенты, обучающиеся по этим книгам, не подозревают, что почти все глубокие идеи функционального анализа выросли непосредственно из «приложений» либо к классическим областям анализа, таким, как гармонический анализ или дифференциальные уравнения в частных производных, либо к другим наукам, в первую очередь к физике. Так, например, классическая теория электромагнитного потенциала побудила Фредгольма обратиться к интегральным уравнениям, что в свою очередь привело Гильберта, Шмидта, Г. Вейля и Рисса к построению абстрактных понятий гильбертова пространства и созданию теории компактных операторов. Квантовая механика послужила тем импульсом, который натолкнул фон Неймана на развитие теории неограниченных операторов, а позже привел его к работе над алгебрами операторов.

Однако невежество в истории вопроса — еще не самое страшное. Хуже, что студенты начинают считать абстрактное направление исследований в функциональном анализе наиболее плодотворным. Однако, по нашему мнению, дело обстоит как раз наоборот. Мы, конечно, не считаем абстрактное направление совершенно бесполезным, напротив, его роль очень важна — выделить идею из конкретной ситуации, освободить ее от всего лишнего и сделать возможно более простой и в то же время применимой к широкому кругу явлений. Но наиболее важно именно изучение конкретных приложений, а отнюдь не ответы на абстрактные вопросы об абстрактных объектах ради них самих.

В этом томе есть и абстрактные результаты, и приложения,

но зато следующий будет содержать в основном приложения. Наше намерение состоит в том, чтобы предложить читателю полного курса сбалансированную точку зрения.

Мы надеемся, что этот том послужит нескольким целям. Для студентов, прежде незнакомых с излагаемыми здесь вопросами, он станет введением в обширный круг важных задач, а для специалистов по математической физике, уже работающих в этой области,—справочным пособием; кроме того, мы хотели познакомить читателей с более сложными и современными исследованиями, в которых нелегко разобраться по текущей литературе. Не все методы и приложения рассматриваются с одинаковой глубиной. Как правило, мы очень подробно обсуждаем математический аппарат и приложения в квантовой механике, но даем лишь беглое введение в задачи квантовой теории поля, классической механики и теории дифференциальных уравнений в частных производных. Наконец, некоторые из методов, развитых здесь, найдут свои приложения только в третьем томе. По всем этим причинам настоящий том охватывает очень разнообразный материал. Чтобы помочь читателю отобрать то, что его интересует, мы помещаем в конце каждой главы «Указания читателю».

Как и в первом томе, каждая глава содержит раздел под названием «Замечания». В нем даются литературные ссылки, а иногда проводится более подробное обсуждение отдельных вопросов, затронутых в основном тексте. Исторические комментарии всегда имеют тот недостаток, что отражают познания и предубеждения авторов, а в такой области математики, которая вырастает прямо из прикладных задач, проблема установления приоритета особенно трудна. Обычно в развитии такой теории наблюдаются два этапа. Сначала создается некоторый частный метод (как правило, очень трудный, связанный с длинными вычислениями и часто не строгий) решения небольшого класса задач. Позже выясняется, что этот метод содержит идеи, которыми можно воспользоваться в применении к другим задачам, и потому становится важным изучение метода самого по себе. Тогда эти идеи выделяются, изучаются на абстрактном уровне и приводятся в систему. Во вновь разработанном формализме исходная задача становится простым частным случаем. В такой ситуации часто не вполне ясно, какие из математических идей уже содержались в исходной работе. Кроме того, приписывание заслуги открытия может зависеть от того, что мы раньше узнали—старый метод вычисления или новый, более простой, но гораздо более абстрактный. Мы очень надеемся, что в таких случаях читатель будет принимать наши замечания только как указание на литературу, а не как суждение об исторической значимости той или другой из цитированных статей.

В заключение каждой главы мы предлагаем набор задач. Так же, как и в первом томе, мы время от времени переносим отдельные части доказательств в эти задачи, чтобы побудить читателя самого принять участие в развитии математики. Задачи, которые заполняют пробелы в тексте, помечены крестиком. Трудные задачи помечены звездочкой. Мы настоятельно советуем читателям решать задачи, потому что это наилучший способ изучать математику.