XI. ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

Получить надежные результаты в квантовомеханической теории рассеяния чрезвычайно трудно. Из-за сложных явлений интерференции волн любое простое неконтролируемое приближение для этих задач стоит не больше, чем прогноз погоды. Однако для задачи двух тел с центрально-симметричными силами сдвиги фаз можно считать даже на ЭВМ.

В. ТИРРИНГ

XI.1. Общий взгляд на явления рассеяния

В этой главе мы рассмотрим рассеяние в самых разных физических ситуациях. Главная задача состоит здесь в том, чтобы усмотреть глубокое сходство в поведении при больших временах разнородных динамических систем. Мы изучим во всех подробностях нерелятивистское квантовое рассеяние. Другие системы будут рассмотрены менее подробно, и упор будет делаться на простые примеры.

Обычно описание рассеяния включает в себя сравнение поведения одной и той же системы в двух случаях: поведения при заданном взаимодействии и при «свободной» динамике. Трудно дать точное определение «свободной динамики», которое охватывало бы все интересующие физиков ситуации, но в каждом отдельном случае мы дадим ясные и четкие определения. Общая черта свободных динамических систем состоит в том, что они проще соответствующих систем при учете взаимодействий, и в них, как правило, сохраняется импульс «индивидуальных подсистем», составляющих исходную физическую систему. Важно постоянно иметь в виду, что рассеяние — это нечто большее, чем просто динамика с учетом взаимодействия, ибо в противном случае некоторые особенности получающихся результатов будут выглядеть странными. Так как изучаются две динамики, теорию рассеяния можно рассматривать как разновидность теории возмущений. В квантовомеханическом случае мы увидим, что это теория возмущений абсолютно непрерывного спектра, а не теория, развитая в гл. XII для описания возмущений дискретного спектра.

Когда рассеяние трактуется как явление, описываемое теорией возмущений, требуется прежде всего анализ временны́х асимптотик, и это мы полагаем в основу подхода, которому далее следуем. Но во всех *конкретных* случаях, которые мы рассмотрим, существует также и некоторая геометрическая структура, и потому на фоне этих примеров отчетливо просматривается другой подход, описывающий теорию рассеяния как корреляции между пространственными и временными асимптотиками. Такой подход мы не будем развивать явно отчасти потому, что он вообще обсуждался гораздо меньше. Подчеркнем, что все «свободные» динамики, которые мы рассматриваем, характеризуются «прямолинейным движением» в том смысле, что решения свободных уравнений, которые сосредоточиваются при $t \to -\infty$ в некоторой окрестности направления $\mathbf{n}$, при $t \to +\infty$ концентрируются в окрестности направления $-\mathbf{n}$. Эти геометрические идеи полезны для понимания выбора свободной динамики в § 14 и 16, где часть взаимодействующей динамики порождает свободную динамику. Кроме того, геометрические идеи определенно выходят на первый план в теории Лакса—Филлипса (§ 11) и в методе Энсса (§ 17).

Теория рассеяния включает в себя изучение специальных состояний взаимодействующих систем, а именно таких, которые становятся «асимптотически свободными» в отдаленном прошлом и (или) в отдаленном будущем. Для определенности предположим, что мы можем рассматривать динамики как преобразования, действующие на состояниях. Пусть T_t и $T_t^{(0)}$ — преобразования на «множестве состояний» Σ, отвечающие взаимодействующей и свободной динамикам. Элементами Σ могут быть точки в фазовом пространстве (классическая механика), векторы в гильбертовом пространстве (квантовая механика) или данные Коши для некоторого дифференциального уравнения в частных производных (акустика, оптика). Нас интересуют такие пары $\langle\rho_-, \rho\rangle \in \Sigma$, что

$$\lim_{t \to -\infty} (T_t\rho - T_t^{(0)}\rho_-) = 0,$$

где предел понимается в некотором специальном смысле, и аналогично такие пары, которые приближаются друг к другу при $t \to +\infty$. Одно из условий, которое должно быть наложено на понятие предела, состоит в том, что для всякого ρ должно существовать не более чем одно ρ_-.

Основные вопросы теории рассеяния следующие.

(1) *Существование состояний рассеяния*. Физически система со взаимодействием приготавливается таким образом, что некоторые ее части вначале находятся настолько далеко друг от друга, что взаимодействием между ними можно пренебречь. После этого на длительное время «запускают» механизм взаимодействия, а затем смотрят, что произошло. Исходное состояние обычно описывается переменными, естественными для описания свободных состояний, т. е. чаще всего—импульсами. Ожидается, что любое свободное состояние «может быть приготовлено», т. е.

что любому $\rho_- \in \Sigma$ отвечает некоторое $\rho \in \Sigma$, такое, что $\lim\limits_{t\to-\infty} T_t\rho - T_t^{(0)}\rho_- = 0$. Доказательство этого — основной вопрос существования в теории рассеяния.

(2) *Единственность состояний рассеяния.* Чтобы описать приготовленное состояние в терминах свободных состояний, надо знать, что каждое свободное состояние ассоциировано с единственным взаимодействующим состоянием, т. е. что для заданного ρ_- существует не более чем одно ρ, такое, что $T_t^{(0)}\rho_- - T_t\rho \to 0$, когда $t \to -\infty$. Подчеркнем, что это новое требование отличается от сформулированного выше требования к пределу, которое состояло в том, что существует не более чем одно ρ_-, отвечающее каждому ρ

(3) *Слабая асимптотическая полнота.* Допустим, что имеется взаимодействующее состояние ρ, которое в отдаленном прошлом выглядело как свободное в том смысле, что $\lim\limits_{t\to-\infty} T_t^{(0)}\rho_- - T_t\rho = 0$ для некоторого состояния ρ_-. Мы рассчитываем, что для больших положительных времен взаимодействующее состояние будет опять выглядеть как свободное в том смысле, что существует состояние ρ_+, такое, что $\lim\limits_{t\to+\infty} T_t^{(0)}\rho_+ - T_t\rho = 0$ Для того чтобы в этом убедиться, требуется показать, что два подмножества из Σ

$$\Sigma_{\text{in}} = \{\rho \in \Sigma \mid \exists \rho_- \in \Sigma, \text{ такое, что } \lim_{t\to-\infty} T_t^{(0)}\rho_- - T_t\rho = 0\}$$

и

$$\Sigma_{\text{out}} = \{\rho \in \Sigma \mid \exists \rho_+ \in \Sigma, \text{ такое, что } \lim_{t\to+\infty} T_t^{(0)}\rho_+ - T_t\rho = 0\}$$

совпадают. Если действительно $\Sigma_{\text{in}} = \Sigma_{\text{out}}$, то говорят, что система обладает **слабой асимптотической полнотой.**

(4) *Определение S-преобразования.* Если есть пара динамических систем $\langle T_t^{(0)}, T_t \rangle$, для которых можно доказать существование и единственность состояний рассеяний (как при $t \to -\infty$, так и при $t \to +\infty$) и для которых имеет место асимптотическая полнота, то можно определить естественную биекцию Σ на себя. При данном $\rho \in \Sigma$ существование и единственность состояний рассеяния обеспечивает существование состояния $\Omega^+\rho \in \Sigma_{\text{in}}$, такого, что $\lim\limits_{t\to-\infty} (T_t(\Omega^+\rho) - T_t^{(0)}\rho) = 0$ Точно так же Ω^- определяется условием $\lim\limits_{t\to+\infty} (T_t(\Omega^-\rho) - T_t^{(0)}\rho) = 0$. Отображение Ω^+ (соответственно Ω^-) есть биекция из Σ на Σ_{in} (соответственно Σ_{out}). Слабая асимптотическая полнота обеспечивает то, что $\Sigma_{\text{in}} = \Sigma_{\text{out}}$, и можно определить *биекцию*

$$S = (\Omega^-)^{-1}\Omega^+ \colon \Sigma \to \Sigma.$$

S называется **преобразованием рассеяния.** Таким образом, $T_t^{(0)}(S\rho)$ и $T_t^{(0)}\rho$ связаны между собой тем условием, что существует такое состояние ψ $(\psi=\Omega^+\rho=\Omega^-(S\rho))$, что $T_t\psi$ «интерполирует» между ними. Это означает, что $T_t\psi$ выглядит как $T_t^{(0)}\rho$ в прошлом и как $T_t^{(0)}(S\rho)$ в будущем. Таким образом, S устанавливает корреляцию между асимптотиками истории взаимодействия в прошлом и в будущем. Следует предупредить читателя, что в литературе иногда фигурируют также отображение $S'=\Omega^+(\Omega^-)^{-1}$: $\Sigma_{\text{in}}\to\Sigma_{\text{out}}$ и отображения $(\Omega^+)^{-1}\Omega^-$, $\Omega^-(\Omega^+)^{-1}$. Когда выполнено условие слабой асимптотической полноты, $S'=\Omega^- S(\Omega^-)^{-1}$, так что S и S' «подобны». Поэтому выбор между S и S' в известной мере дело вкуса. Мы на протяжении всей этой книги пользуемся преобразованием S, так называемой S-матрицей ЭБМФ (Эпштейна, Березина, Минлоса и Фаддеева). Причины выбранного правила расстановки знаков $\pm$ обсуждаются в § 3 и 6.

В классической механике частиц S есть биекция на фазовом пространстве. В квантовой теории с условием слабой асимптотической полноты S — *линейное* унитарное преобразование, называемое S-оператором, или иногда S-матрицей.

(5) *Редукция S за счет симметрии.* Во многих задачах *обе* динамики — и свободная, и взаимодействующая — характеризуются некоторой симметрией. Это позволяет заключить a priori, без детального динамического анализа, что S имеет некоторую специальную форму. Подробно этот вопрос обсуждается в § 2 и 8.

(6) *S-преобразование и аналитичность.* Обычное усовершенствование теории рассеяния для волновых процессов (квантовая теория, акустика, оптика) состоит в представлении S или ядра ассоциированного с ним интегрального оператора как граничного значения некоей аналитической функции. Эвристически эта аналитичность связана с теоремой IX.16. Действительно, схематически S описывает отклик R некоторой системы на сигнал I:

$$R(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t-t')\,I(t')\,dt'.$$

Эта формула учитывает два важных факта: (i) трансляционную инвариантность по времени, в силу чего f есть функция только $t-t'$; (ii) причинность: $R(t)$ зависит от $I(t')$ лишь при $t'\leqslant t$. Следовательно, f есть функция на $[0,\infty)$. Ее фурье-образ, таким образом, представляет собой граничное значение аналитической функции. Именно такими основанными на причинности соображениями интуитивно руководствуются физики, когда они обсуждают аналитические свойства. К сожалению, доказательства этих свойств не так просты и прозрачны. Мы ограничимся подробным рассмотрением аналитичности для двухчастичного квантовомеханического случая (§ 7) и теории Лакса — Филлипса (§ 11).

(7) *Асимптотическая полнота*. Рассмотрим систему, в которой силы взаимодействия между ее частями убывают по мере удаления этих частей друг от друга. Физически мы ожидаем, что состояние такой системы либо «распадается» на свободно движущиеся группы (кластеры), либо остается «связанным». Во многих ситуациях существует естественное множество связанных состояний $\Sigma_{\text{bound}} \subset \Sigma$. Обычно можно доказать, что $\Sigma_{\text{bound}} \cap \Sigma_{\text{in}} = \varnothing$. «Физическое ожидание» состоит в том, что

$$\Sigma_{\text{bound}} «+» \Sigma_{\text{in}} = \Sigma = \Sigma_{\text{bound}} «+» \Sigma_{\text{out}}. \tag{1}$$

Знак «+» имеет разный смысл для классических и квантовомеханических систем. В классической механике частиц «+» обозначает теоретико-множественное объединение; в квантовой теории он обозначает прямую сумму гильбертовых пространств. Доказательство (1) — это задача доказательства **асимптотической полноты.** Заметим, что из асимптотической полноты следует слабая асимптотическая полнота. Отметим также, что, выдвигая идею о том, что каждому свободному состоянию отвечает некоторое взаимодействующее состояние, мы неявно предполагаем, что в свободной динамике нет «связанных» состояний.

Разумеется, это только схематическое описание. Во всякой физической теории есть свои сложности, и приходится изобретать различные усовершенствования. Среди них отметим такие. (i) В классической динамике в Σ определены множества меры нуль, и естественная интерпретация утверждений типа $\Sigma_{\text{in}} = \Sigma_{\text{out}}$ состоит в том, что это равенство имеет место с точностью до множеств меры нуль. (ii) В некоторых системах, включая и многочастичные, пространства состояний свободной и взаимодействующих динамик различны (см. § 5, 15 и 16). (iii) В квантовомеханических системах можно определить S-оператор даже без слабой асимптотической полноты (см. § 4). Слабая асимптотическая полнота становится тогда эквивалентной условию унитарности S. (iv) В некоторых очень специальных случаях свободная динамика может иметь связанные состояния (см. § 10). (v) В теории Лакса — Филлипса (§ 11) свободная динамика заменяется геометрическими понятиями «приходящего» и «уходящего» подпространств.

Обычно взаимодействующая динамика первоначально получается возмущением некоторой простой динамики, которая тогда и играет роль «свободной». Однако в некоторых специальных физических теориях нет такой естественной невозмущенной динамики, которую можно было бы сравнить со взаимодействующей динамикой. В таких случаях можно сначала выделить некоторые особенно простые решения взаимодействующей системы. Затем можно попытаться описать асимптотическое поведение полной взаимодействующей системы в терминах взаимодействия этих простых решений. Примерами таких систем служат рассеяние магнонов (§ 14) и теория Хаага — Рюэля (§ 16), а также теория рассеяния для уравнения Кортевега — де Фриза, которую мы не рассматриваем.

XI.2. Рассеяние классических частиц

Простейшая система, на которой можно продемонстрировать идеи теории рассеяния,— это классическая механика частицы, движущейся в поле внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Эта теория эквивалентна рассеянию двух частиц, взаимодействующих между собой посредством сил $\mathbf{F}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$, так как движение центра масс такой системы отделяется от относительного движения, описываемого изменением $\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$. Без потери общности будем считать массу частицы единичной.

Состояния такой системы суть точки в **фазовом пространстве**, т. е. пары $\langle\mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle \in \mathbb{R}^6$, представляющие положение и скорость частицы. Свободная динамика задается посредством преобразования $T_t^{(0)}\langle\mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{r}+\mathbf{v}t, \mathbf{v}\rangle$. Таким образом, свободная динамика сохраняет скорость. Динамика взаимодействующей системы задается преобразованием $T_t\langle\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0\rangle=\langle\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\rangle$, где $\mathbf{v}(t)=\dot{\mathbf{r}}(t)$, а $\mathbf{r}(t)$ — решение уравнения

$$\ddot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \tag{2a}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0, \qquad \dot{\mathbf{r}}(0)=\mathbf{v}_0. \tag{2b}$$

Чтобы гарантировать единственность решения уравнения (2) при всех временах, будем предполагать, что

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r})|\leqslant C \quad \text{при всех } \mathbf{r}, \tag{3a}$$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r})-\mathbf{F}(\mathbf{r}')|\leqslant D_R|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \quad \text{при } |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\leqslant 1 \text{ и } |\mathbf{r}|<R, \tag{3b}$$

где D_R — константа, зависящая от R. Техника, развитая в § V.6, позволяет доказать существование единственного решения (2) при малых временах, если выполнено (3b), а затем нетрудно доказать, что это решение существует при всех временах (см. предложение 1 в дополнении к § X.1 и задачу 1). Единственное место, где используется условие (3) в теории, которую мы развиваем,— это доказательство глобального существования и единственности. Если этот факт можно установить каким-либо другим способом, то от условия (3) можно отказаться, а приводимое ниже условие (4) требуется только для больших расстояний.