рые особенно простые решения взаимодействующей системы. Затем можно попытаться описать асимптотическое поведение полной взаимодействующей системы в терминах взаимодействия этих простых решений. Примерами таких систем служат рассеяние магнонов (§ 14) и теория Хаага — Рюэля (§ 16), а также теория рассеяния для уравнения Кортевега — де Фриза, которую мы не рассматриваем.

XI.2. Рассеяние классических частиц

Простейшая система, на которой можно продемонстрировать идеи теории рассеяния,— это классическая механика частицы, движущейся в поле внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Эта теория эквивалентна рассеянию двух частиц, взаимодействующих между собой посредством сил $\mathbf{F}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$, так как движение центра масс такой системы отделяется от относительного движения, описываемого изменением $\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$. Без потери общности будем считать массу частицы единичной.

Состояния такой системы суть точки в **фазовом пространстве**, т. е. пары $\langle\mathbf{r},\mathbf{v}\rangle\in\mathbb{R}^6$, представляющие положение и скорость частицы. Свободная динамика задается посредством преобразования $T_t^{(0)}\langle\mathbf{r},\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{r}+\mathbf{v}t,\mathbf{v}\rangle$. Таким образом, свободная динамика сохраняет скорость. Динамика взаимодействующей системы задается преобразованием $T_t\langle\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0\rangle=\langle\mathbf{r}(t),\mathbf{v}(t)\rangle$, где $\mathbf{v}(t)=\dot{\mathbf{r}}(t)$, а $\mathbf{r}(t)$ — решение уравнения

$$\ddot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \tag{2a}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0,\qquad \dot{\mathbf{r}}(0)=\mathbf{v}_0. \tag{2b}$$

Чтобы гарантировать единственность решения уравнения (2) при всех временах, будем предполагать, что

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r})|\leqslant C \qquad \text{при всех } \mathbf{r}, \tag{3a}$$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r})-\mathbf{F}(\mathbf{r}')|\leqslant D_R|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \qquad \text{при } |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\leqslant 1 \text{ и } |\mathbf{r}|<R, \tag{3b}$$

где D_R — константа, зависящая от R. Техника, развитая в § V.6, позволяет доказать существование единственного решения (2) при малых временах, если выполнено (3b), а затем нетрудно доказать, что это решение существует при всех временах (см. предложение 1 в дополнении к § X.1 и задачу 1). Единственное место, где используется условие (3) в теории, которую мы развиваем,— это доказательство глобального существования и единственности. Если этот факт можно установить каким-либо другим способом, то от условия (3) можно отказаться, а приводимое ниже условие (4) требуется только для больших расстояний.

В частности, локальные особенности, имеющие характер отталкивания, не ведут к дополнительным сложностям.

Чтобы установить существование и единственность состояний рассеяния, нам потребуются дальнейшие ограничения на силы. Эти ограничения, в которых требуется, чтобы взаимодействие между сталкивающимися частями спадало при $r \to \infty$, где $r = |\mathbf{r}|$, типично для теорий рассеяния. Конкретно мы будем предполагать, что

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r})| \leqslant Cr^{-\alpha} \quad \text{при всех } \mathbf{r} \text{ и некотором } \alpha > 2, \tag{4a}$$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})| \leqslant Dr^{-\beta} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{при всех } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ с } x, y \geqslant r \text{ и некотором } \beta > 2 \tag{4b}$$

При этих условиях мы докажем существование и единственность состояний рассеяния. Существование можно установить, пользуясь лишь неравенством (4a) (задача 2), но для единственности требуется условие Липшица (4b) (задача 3). Это напоминает положение, с которым мы столкнулись в § V.6, где рассматривались решения дифференциальных уравнений с начальными условиями. Там тоже для единственности требовалось условие Липшица. Это и не удивительно, так так, согласно интуитивной картине § 1, состояния рассеяния можно рассматривать как решения, удовлетворяющие «начальным условиям при $t = -\infty$».

Условия (4) исключают важный случай кулонова рассеяния, где теорию приходится видоизменять. Этот случай рассмотрен в § 9.

Впредь мы не будем больше следить за обозначением векторов жирным шрифтом, за исключением формулировок теорем и тех случаев, когда можно спутать, идет ли речь о векторе или о его длине.

Теорема XI.1 (существование и единственность решений рассеяния; классические частицы). Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — функция из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая условиям (3) и (4). Пусть задана $\langle \mathbf{r}_{-\infty}, \mathbf{v}_{-\infty} \rangle \in \mathbb{R}^6$, причем $\mathbf{v}_{-\infty} \neq 0$. Тогда существует единственное решение уравнения (2a), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t \to -\infty} |\dot{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{v}_{-\infty}| = 0, \tag{5a}$$

$$\lim_{t \to -\infty} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_{-\infty} - \mathbf{v}_{-\infty} t| = 0. \tag{5b}$$

Доказательство. Так как мы ввели предположения (3), то, согласно предыдущему замечанию, достаточно доказать единственность в $(-\infty, T)$ с некоторым T. Придерживаясь той идеи, что решения рассеяния удовлетворяют начальному условию в $t = -\infty$, естественно воспользоваться методом § V.6.A и переписать дифференциальное уравнение в виде интегрального. Действительно, можно показать (задача 4), что $r(t)$ удовлетворяет уравиению (2а) и условиям (5) на $(-\infty, T)$ в том и только том случае, если $r(t)=r_{-\infty}+v_{-\infty}t+u(t)$, где u непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} F(r_{-\infty}+v_{-\infty}\tau+u(\tau))\,d\tau\,ds \tag{6}$$

с абсолютно сходящимся интегралом.

Выберем $T<0$ так, чтобы было:

(i) $|r_{-\infty}+v_{-\infty}t|\geqslant {}^1/_2|t||v_{-\infty}|$, если $t<T$;
(ii) $C(\alpha-1)^{-1}(\alpha-2)^{-1}|{}^1/_4v_{-\infty}|^{-\alpha}|T|^{2-\alpha}<1$;
(iii) $\gamma\equiv D(\beta-1)^{-1}(\beta-2)^{-1}|{}^1/_4v_{-\infty}|^{-\beta}|T|^{2-\beta}<1$;
(iv) ${}^1/_4|T||v_{-\infty}|>1$.

Здесь C, α, D, β — константы из условий (4). Предположим теперь, что $u(t)$ есть непрерывная функция на $(-\infty, T)$ со значениями в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая условию $\|u\|_\infty\leqslant 1$. Пусть $r(t)=r_{-\infty}+v_{-\infty}t+u(t)$. Условия (i) и (iv) обеспечивают то, что $|r(t)|\geqslant {}^1/_4|t||v_{-\infty}|$. Вследствие (4a) интеграл $\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s}|F(r_{-\infty}+v_{-\infty}\tau+u(\tau))|\,d\tau\,ds$ сходится абсолютно.

Положим

$$\mathcal{M}_T=\{u\in C(-\infty, T) \text{ со значениями в } \mathbb{R}^3 \mid \|u\|_\infty\leqslant 1\}$$

и определим $\mathcal{F}\colon \mathcal{M}_T\to\mathcal{M}_T$ посредством

$$(\mathcal{F}u)(t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} F(r_{-\infty}+v_{-\infty}\tau+u(\tau))\,d\tau\,ds.$$

Благодаря (4a) и (ii) $\|\mathcal{F}u\|_\infty\leqslant 1$, если $\|u\|_\infty\leqslant 1$, так что $\mathcal{F}$ отображает полное метрическое пространство $\mathcal{M}_T$ в себя. Из (4b) и (iii) следует, что

$$\|\mathcal{F}u-\mathcal{F}v\|_\infty\leqslant\gamma\|u-v\|_\infty,$$

поэтому $\mathcal{F}$ есть сжатие на $\mathcal{M}_T$, ибо T было выбрано таким образом, чтобы сделать $\gamma<1$. Следовательно, по принципу сжимающих отображений (теорема V.8) $\mathcal{F}$ имеет единственную неподвижную точку в $\mathcal{M}_T$. Теперь легко доказать, что уравнение (6) имеет единственное решение. В самом деле, если функции u_1 и u_2 обе являются решениями уравнения (6), то обе они лежат в $\mathcal{M}_{T'}$ при некотором $T'<T$. Однако, в силу вышеизложенного, уравнение (6) имеет единственное решение в $\mathcal{M}_{T'}$ при любом $T'<T$, так что $u_1=u_2$ на $(-\infty, T')$. В силу единственности решений с начальными условиями в $-T'-1$, $u_1=u_2$ на $(-\infty, T)$. ∎

Определим теперь два важных отображения.

Определение. Пусть $\Sigma = \mathbb{R}^6$, и пусть $r_{a,b}^{(-\infty)}(t)$ — такое решение уравнения (2a), которое асимптотически приближается к $a+bt$ в $-\infty$. Положим $\Sigma_0 \equiv \Sigma \diagdown \{\langle a, b\rangle \mid b=0\}$. Тогда **волновой оператор** Ω^+: $\Sigma_0 \to \Sigma$ определяется равенством

$$\Omega^+ \langle a, b\rangle = \langle r_{a,b}^{(-\infty)}(0),\ \dot{r}_{a,b}^{(-\infty)}(0)\rangle.$$

Подобным же образом определяется Ω^-:

$$\Omega^- \langle a, b\rangle = \langle r_{a,b}^{(+\infty)}(0),\ \dot{r}_{a,b}^{(+\infty)}(0)\rangle.$$

Итак, $\Omega^+ w$ есть та точка фазового пространства, которая задает начальные данные в момент $t=0$ для решения уравнения со взаимодействием, которое асимптотически приближается при $t \to -\infty$ к решению свободного уравнения движения с начальными данными w в момент $t=0$.

Волновые операторы обладают рядом важных свойств.

Теорема XI.2. Предположим, что для поля сил $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ выполнены условия (3) и (4), и пусть $\Omega^\pm$ — соответствующие волновые операторы. Тогда имеют место следующие утверждения.

(a) Пусть T_t и $T_t^{(0)}$ соответственно — преобразования, отвечающие динамике со взаимодействием и свободной динамике. Тогда для всех $w \in \Sigma_0$

$$\Omega^\pm w = \lim_{t \to \mp\infty} T_{-t} T_t^{(0)} w,$$

где сходимость равномерна на компактных подмножествах из Σ_0.

(b) $\Omega^\pm T_s^{(0)} = T_s \Omega^\pm$ на Σ_0 для всех s.

(c) (Изометричность $\Omega^\pm$.) Если $\mathbf{F}$ консервативна, т. е. если $\mathbf{F} = -\nabla V$ для некоторой функции V, то преобразования $\Omega^\pm$ сохраняют меру.

(d) Если $\mathbf{F}$ консервативна и $V(\mathbf{r}) \to 0$ при $r \to \infty$, то $E(\Omega^\pm w) = E_0(w)$, где $E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = v^2/2 + V(\mathbf{r})$ и $E_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = v^2/2$.

(e) Если $\mathbf{F}$ класса C^∞ и

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} F(\mathbf{r})}{\partial r_1^{\alpha_1} \ldots \partial r_3^{\alpha_3}} \right| \leqslant D_\alpha r^{-|\alpha|-2-\varepsilon}$$

для всех $\mathbf{r}$, α и некоторого $\varepsilon > 0$, то $\Omega^\pm$ суть C^∞-отображения.

Доказательство. (a) Это типичное свойство операторов $\Omega^\pm$, которым мы будем пользоваться при определении их аналогов в квантовомеханическом случае. Так как $\Omega^+ x = y$ означает, что $\lim\limits_{t \to -\infty} |T_t y - T_t^{(0)} x| = 0$ и $(T_t)^{-1} = T_{-t}$, то интуитивно естественно ожидать выполнения (a). Мы докажем формулу для Ω^+; доказательство для Ω^-, по существу, такое же. Для фиксированного

$T\in\mathbb{R}$ определим $\mathcal{M}_T$, как прежде. Для $\langle a, b\rangle\in\Sigma_0$, $t\leqslant T$ и $u\in\mathcal{M}_T$ определим функцию $\mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}u$ на $(-\infty, T)$ равенством

$$(\mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}u)(s)=\int_t^s\int_t^\sigma F(a+b\tau+u(\tau))\,d\tau\,d\sigma$$

Пусть $\mathcal{F}^{(-\infty)}_{a,b,T}u$ имеет тот же вид, но с $t=-\infty$. Далее нам нужны следующие три факта (задачи 5, 6).

(i) Для любого компактного $K\subset\Sigma_0$ можно найти такое $T<0$, что при $\langle a, b\rangle\in K$ и $t\in(-\infty, T)$ отображение $\mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}$ переводит $\mathcal{M}_T$ в себя и является сжатием. Постоянная γ в неравенстве $\|\mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}u-\mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}v\|_\infty\leqslant\gamma\|u-v\|_\infty$ может быть выбрана меньше единицы независимо от $\langle a, b\rangle\in K$ и $t\in\in(-\infty, T)$.

(ii) Если K и T те же, что и в (i), то $\lim\limits_{t\to-\infty}\mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}u=\mathcal{F}^{(-\infty)}_{a,b,T}u$ для любого $u\in\mathcal{M}_T$. Сходимость равномерна на $\mathcal{M}_T$ и K.

(iii) Один общий результат о сжатиях. Предположим, что F_n образуют семейство отображений полного метрического пространства в себя. Если $\rho(F_np, F_nq)\leqslant c\rho(p, q)$ для всех p, q, n и некоторого $c<1$, если $\lim\limits_{n\to\infty}F_np=F_\infty p$ для всех p и если p_n (соответственно p_∞) — единственные неподвижные точки F_n (соответственно F_∞), то $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p_\infty$. Более того, скорость, с которой p_n сходится к p_∞, зависит только от скорости, с которой F_np_∞ сходится к $F_\infty p_\infty=p_\infty$, и от c.

Пусть $u^{(t)}_{a,b,T}$ — неподвижная точка преобразования $\mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}$. Мы заключаем, что $\lim\limits_{t\to-\infty}u^{(t)}_{a,b,T}=u^{(-\infty)}_{a,b,T}$. Далее, пользуясь тем, что T_{-T+1} непрерывно как преобразование из Σ в Σ, мы можем закончить доказательство пункта (a):

$$\begin{aligned}\Omega^+\langle a, b\rangle&=T_{-T+1}\langle a+b(T-1)+u^{(-\infty)}_{a,b,T}(T-1),\ b+\dot u^{(-\infty)}_{a,b,T}(T-1)\rangle=\\&=\lim_{t\to-\infty}T_{-T+1}\langle a+b(T-1)+u^{(t)}_{a,b,T}(T-1),\ b+\dot u^{(t)}_{a,b,T}(T-1)\rangle=\\&=\lim_{t\to-\infty}T_{-T+1}T_{-t+T-1}T^{(0)}_t\langle a, b\rangle=\\&=\lim_{t\to-\infty}T_{-t}T^{(0)}_t\langle a, b\rangle.\end{aligned}$$

(b) Это общее следствие (a), так как

$$\Omega^\pm T^{(0)}_s w=\lim_{t\to\mp\infty}T_{-t}T^{(0)}_{s+t}w=\lim_{\tau\to\mp\infty}T_{-\tau+s}T^{(0)}_\tau w=T_s\Omega^\pm w.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью T_s и тем, что, когда $t\to\pm\infty$, $\tau=s+t\to\pm\infty$ при фиксированном s.

(c) Это другая общая черта теории рассеяния, с которой мы встретимся в квантовой теории в немного другом виде. Для консервативных систем известно, что T_t сохраняет меру (теорема X.78). Аналогичным образом сохраняет меру $T_t^{(0)}$, так что $T_{-t}T_t^{(0)}$ сохраняет меру при всех t. Пусть f — непрерывная функция с компактным носителем в Σ_0. Тогда, в силу (а),

$$\int f(\Omega^+ w)\, d^6w = \lim_{t\to-\infty} \int f(T_{-t}T_t^{(0)}w)\, d^6w = \int f(w)\, d^6w.$$

Следовательно, Ω^+, равно как и Ω^-,— сохраняющие меру отображения.

(d) следует из (а), сохранения энергии ($E\circ T_t = E$) и предположения о том, что $V\to 0$ при $r\to\infty$.

(e) Согласно предположению, $\mathscr{F}_{a,b,T}^{(-\infty)}u$ есть C^∞-отображение $\Sigma_0\times\mathscr{M}_T$ в $\mathscr{M}_T$ (задача 7). По общей теореме о гладкости элементов, отвечающих неподвижным точкам сжатий (задача 5b), функции, отвечающие неподвижным точкам $\mathscr{F}_{a,b,T}^{(-\infty)}$, а следовательно, и их значения при $t=T-1$ принадлежат классу C^∞. Так как T_t есть C^∞-отображение при каждом t, продолжающее решение из $t=T-1$ в $t=0$, мы заключаем, что $\Omega^\pm$ суть C^∞-отображения. ∎

Областью определения операторов $\Omega^\pm$ является все Σ, за исключением множества меры нуль. Область значений $\Omega^\pm$, вообще говоря, не совпадает с Σ даже после вычитания из Σ множества меры нуль.

Пример. Пусть F удовлетворяет предположениям пункта (d) теоремы XI.2. Тогда $\operatorname{Ran}\Omega^+ \subseteq \{\langle a', b'\rangle \mid {}^1/_2|b'|^2+V(a')>0\}$. Множество

$$\{\langle a', b'\rangle \mid {}^1/_2|b'|^2+V(a')\leqslant 0\}$$

имеет ненулевую меру, если V непрерывно и отрицательно в любой точке.

Определение. Пусть $\Sigma_{\text{in}}=\operatorname{Ran}\Omega^+$, $\Sigma_{\text{out}}=\operatorname{Ran}\Omega^-$, и пусть Σ_{bound} есть множество таких $\langle \mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle$, что решение $\mathbf{r}(t)$ уравнения (2) удовлетворяет условию

$$\sup_t|\mathbf{r}(t)|+\sup_t|\dot{\mathbf{r}}(t)|<\infty$$

Значит, связанные состояния — это такие решения, траектории которых лежат в ограниченных областях фазового пространства. Слабая асимптотическая полнота означает, что $\Sigma_{\text{in}}=\Sigma_{\text{out}}$, а асимптотическая полнота — что $\Sigma_{\text{in}}=\Sigma_{\text{out}}=\Sigma\setminus\Sigma_{\text{bound}}$. Так как мы уже выбросили множества меры нуль (а именно $\{\langle a, b\rangle \mid b=0\}$) при определении $\Omega^\pm$, мы должны быть готовы к тому, что эти равенства выполнены с точностью до множеств меры нуль. Вообще говоря, существуют решения, которые асимптотически свободны при $t \to -\infty$, но не при $t \to +\infty$ (захват; см. задачу 9).

Если силы консервативны, т. е. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$, то, по предположениям о $\mathbf{F}$, V — гладкая и ограниченная функция. В этом случае благодаря сохранению энергии величина скорости $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ автоматически ограничена, так что $\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \in \Sigma_{\text{bound}}$ тогда и только тогда, когда $\sup_t |\mathbf{r}(t)| < \infty$.

Теорема XI.3 (асимптотическая полнота; двухчастичное рассеяние классических частиц). Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$, причем $V \to 0$ при $r \to \infty$. Предположим также, что $\mathbf{F}$ удовлетворяет (3) и (4). Тогда Σ_{in}, Σ_{out} и $\Sigma \setminus \Sigma_{\text{bound}}$ совпадают с точностью до множеств меры нуль.

Доказательство. Пусть $r_{q,v}(t)$ — решение уравнения $\ddot{r}(t) = F(r(t))$ с начальными условиями $r(0) = q$, $\dot{r}(0) = v$. Определим

$$N_\pm = \left\{ \langle q, v \rangle \mid \overline{\lim_{t \to \pm\infty}} |r_{q,v}(t)| < \infty \right\}.$$

Сначала надо показать, что N_+ и N_- совпадают с точностью до множеств меры нуль, т. е. что $\mu(N_+ \setminus N_-) + \mu(N_- \setminus N_+) = 0$, где μ — мера Лебега. Вопрос об измеримости множеств типа N_+, N_-, Σ_{bound} мы вынесем в задачу 10. Пусть $\{K_n\}$ — компактные подмножества $\mathbb{R}^6$, такие, что $\bigcup K_n = \mathbb{R}^6$, $K_n \subset K_{n+1}^{\text{int}}$. Пусть $N_+^{(n)} = \{\langle q, v \rangle \mid T_t \langle q, v \rangle \in K_n$ при всех $t \in [0, \infty)\}$, и подобным же образом определим $N_-^{(n)}$. Заметим сначала, что $N_\pm = \bigcup_n N_\pm^{(n)}$, так как, пользуясь сохранением энергии, можно увидеть, что $T_t \langle q, v \rangle$ лежит в компактном подмножестве $\mathbb{R}^6$, когда t меняется от 0 до ∞, если $\overline{\lim_{t \to \infty}} |r_{q,v}(t)| < \infty$. Таким образом, если $p \in N_+ \setminus N_-$, то $p \in N_+^{(n)} \setminus N_-^{(n)}$ при некотором n. Следовательно, достаточно показать, что $\mu(N_+^{(n)} \triangle N_-^{(n)}) = 0$ для каждого n. Пусть T_t — взаимодействующая динамика. Заметим сначала, что $\bigcap_{k=1}^\infty T_k N_+^{(n)} \subset N_-^{(n)}$ и $N_+^{(n)} \supset T_1 N_+^{(n)} \supset T_2 N_+^{(n)} \supset \ldots$. Поэтому

$$\mu(N_+^{(n)} \setminus N_-^{(n)}) \leqslant \mu\left(N_+^{(n)} \setminus \bigcap_{k=1}^\infty T_k N_+^{(n)}\right) \leqslant \sum_{k=1}^\infty \mu(N_+^{(n)} \setminus T_k N_+^{(n)}).$$

Но по теореме Лиувилля $\mu(T_k N_+^{(n)}) = \mu(N_+^{(n)}) < \infty$. Поскольку $T_k N_+^{(n)} \subset N_+^{(n)}$, заключаем, что $\mu(N_+^{(n)} \setminus T_k N_+^{(n)}) = 0$, так что $\mu(N_+^{(n)} \setminus N_-^{(n)}) = 0$. При помощи сходного доказательства убеждаемся, что $\mu(N_- \setminus N_+) = 0$, и, значит, $\mu(N_+ \triangle N_-) = 0$.

Допустим далее, что $r(t)$ есть решение уравнения Ньютона и $\overline{\lim_{t \to \infty}} |r(t)| = \infty$. Покажем, что если энергия $E(r(0), \dot{r}(0)) > 0$, то $|r(t)| \geqslant C|t|$ при больших t, и воспользуемся этим для доказательства стремления $r(t)$ к свободному решению. Пусть $I(t) = |r(t)|^2/2$ есть момент инерции. Тогда $\dot{I}(t) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = \dot{r}(t)\, r(t)$, где $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$, а $\dot{r}(t) = dr/dt$ (что, вообще говоря, не равно $|d\mathbf{r}/dt|$). Далее,

$$\ddot{I}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)^2 + \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}(t) = 2E + \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) - 2V(\mathbf{r}).$$

Так как $E > 0$, а $r \cdot F$ и V стремятся к нулю при $r \to \infty$, можно найти такое R_0, что из $|r| > R_0$ будет следовать $|r \cdot F(r) - 2V(r)| < E$. Поскольку $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} |r(t)| = \infty$, можно найти такое t_0, что $r(t_0) > R_0$, $\dot{r}(t_0) > 0$. Теперь мы утверждаем, что $r(t) > R_0$ для всех $t > t_0$; в самом деле, если это не так, то пусть t_1 — наименьшее $t > t_0$, для которого $r(t) = R_0$. Тогда $\ddot{I}(t) \geqslant E$ при $t \in [t_0, t_1]$, так что $\dot{I}(t_1) = r(t_1)\dot{r}(t_1) > \dot{I}(t_0) > 0$. Поскольку $r(t) > R_0$ для $t = t_1 - \varepsilon$ и $r(t_1) = R_0$, мы видим, что $\dot{r}(t_1) \leqslant 0$, и таким образом приходим к противоречию. Следовательно, $r(t) > R_0$ при всех $t > t_0$, а значит, $I(t) \geqslant a + bt + Et^2/2$ с соответствующими постоянными a и b при всех $t > t_0$. Таким образом, $r(t) \geqslant {}^1/_2\, t\sqrt{E}$ при достаточно больших t. Воспользовавшись (4), мы увидим, что $\int\limits_{t_0}^{\infty} F(r(t))\, dt$ существует, так что можно определить

$$b = \dot{r}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\infty} F(r(t))\, dt = \lim_{t\to\infty} \dot{r}(t)$$

и

$$a = r(t_0) - bt_0 - \int\limits_{t_0}^{\infty}\int\limits_{s}^{\infty} F(r(t))\, dt\, ds = \lim_{t\to\infty} (r(t) - bt).$$

Второй интеграл также существует. Более того,

$$\lim_{t\to\infty} |r(t) - a - bt| + |\dot{r}(t) - b| = 0.$$

Итак, если $E > 0$ и $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} |r(t)| = \infty$, то $r(t)$ есть решение рассеяния, т. е. $\langle r(0), \dot{r}(0)\rangle$ лежит в Σ_{out}.

Пусть теперь Σ' есть Σ с двумя выброшенными множествами меры нуль, а именно $N^+ \triangle N^-$, которое имеет меру нуль по первой части доказательства, и $\{\langle r, v\rangle \mid E(r, v) = 0\}$, которое имеет меру нуль, так как $\{v \mid E(r_0, v) = 0\}$ есть сфера, имеющая меру нуль при всяком фиксированном $\mathbf{r}_0$. Пусть $w \in \Sigma' \setminus \Sigma_{\text{bound}}$, и пусть $r(t)$ — такое решение (2), что $\langle r(0), \dot{r}(0)\rangle = w$. Так как $w \notin \Sigma_{\text{bound}}$, то либо $\overline{\lim\limits_{t\to-\infty}}|r(t)|=\infty$, либо $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}|r(t)|=\infty$, так что $w\in$ $\in(\Sigma\setminus N^+)\cup(\Sigma\setminus N^-)$. Так как $w\notin N^+\triangle N^-=(\Sigma\setminus N^+)\triangle(\Sigma\setminus N^-)$, то непременно $w\in(\Sigma\setminus N^+)\cap(\Sigma\setminus N^-)$. Но в силу второй части нашего рассуждения, поскольку $E(w)\neq 0$, имеем $w\in\Sigma_{\rm in}$ и $w\in\Sigma_{\rm out}$. Тем самым доказано, что $\Sigma'\setminus\Sigma_{\rm bound}=\Sigma'\cap\Sigma_{\rm out}=$ $=\Sigma'\cap\Sigma_{\rm in}$ ∎

Теперь, когда мы доказали асимптотическую полноту, определим S-преобразование.

Определение. Пусть $\Sigma^{(\pm)}=(\Omega^\pm)^{-1}[\Sigma'\setminus\Sigma_{\rm bound}]$. Назовем **$S$-преобразованием** ($S$-**оператором**, S-**матрицей**) отображение S: $\Sigma^{(+)}\to$ $\to\Sigma^{(-)}$, определенное равенством

$$Sw=(\Omega^-)^{-1}(\Omega^+w).$$

Соответствующая картина схематически изображена на рис. XI.1.

Итак, S-преобразование определено как отображение из $\mathbb{R}^6$ в $\mathbb{R}^6$, или, точнее, из $\mathbb{R}^6$ за вычетом множества меры нуль в $\mathbb{R}^6$.

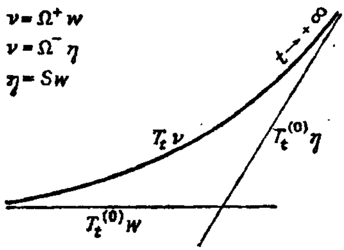

Рис. XI.1. Схематическая картина рассеяния.

В качестве последней темы классической теории рассеяния мы опишем способ «редукции S» к двум вещественным функциям двух вещественных переменных в том случае, когда $\mathbf{F}$ — центрально-симметричная сила, т. е. $V(\mathbf{r})$ зависит лишь от $|\mathbf{r}|=r$. Сначала отметим некоторые симметрии S-оператора. Так как $\Omega^\pm T_t^{(0)}=T_t\Omega^\pm$, то $ST_t^{(0)}=T_t^{(0)}S$. Так как $E(\Omega^\pm w)=E_0(w)$, то $E_0(Sw)=E_0(w)$. Наконец, из инвариантности F относительно вращений вытекают два следствия. Пусть R — элемент группы $SO(3)$ вращений трехмерного пространства. Определим R на Σ посредством $R\langle r, v\rangle=\langle Rr, Rv\rangle$. Тогда $\Omega^\pm(Rw)=R(\Omega^\pm w)$, так что $RS=SR$. Более того, сохраняется момент $\mathbf{L}\langle\mathbf{r},\mathbf{v}\rangle=\mathbf{v}\times\mathbf{r}$, так что $\mathbf{L}(Sw)=\mathbf{L}(w)$. Подведем итоги.

Предложение. (a) $ST_t^{(0)}=T_t^{(0)}S$.
(b) $SR=RS$.
(c) $E_0(S\cdot)=E_0(\cdot)$.
(d) $\mathbf{L}(S\cdot)=\mathbf{L}(\cdot)$.

Условия (a) и (b) позволяют свести S к векторнозначной функции только двух переменных. Дело в том, что семейство множеств $\{RT_t^{(0)}w \mid t\in\mathbb{R},\ R\in SO(3)\}$ расслаивает Σ на двупараметрическое семейство четырехмерных многообразий (с некоторыми исключительными многообразиями меньшей размерности), многообразия с постоянными E_0 и $|\mathbf{L}|$. В силу (a) и (b), если мы знаем Sw для одного w из каждого такого многообразия, то мы знаем S для всех w. Вследствие (c) и (d) Sw может лежать только в двумерном многообразии, где E_0 и $\mathbf{L}$ равны их значениям в точке w. Таким образом, мы ожидаем, что S параметризуется двумя вещественнозначными функциями двух вещественных переменных.

Уточним эти рассуждения. Вследствие инвариантности S относительно вращений достаточно знать $S(\mathbf{r},\mathbf{v})$, когда $\mathbf{v}=p\hat{\mathbf{z}}$ и $\mathbf{r}$ лежит в плоскости y, z; здесь $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор в направлении z. Если $S\langle\mathbf{r},\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{r}',\mathbf{v}'\rangle$, то, по свойству (a), $S(\mathbf{r}+\mathbf{v}t,\mathbf{v})=\langle\mathbf{r}'+\mathbf{v}'t,\mathbf{v}'\rangle$, поэтому можно считать, что $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=0$ или $\mathbf{r}=b\hat{\mathbf{y}}$. В итоге S полностью известно, если известны $S\langle b\hat{\mathbf{y}},p\hat{\mathbf{z}}\rangle$ для всех вещественных b и p. Положим $S\langle b\hat{\mathbf{y}},p\hat{\mathbf{z}}\rangle=\langle\mathbf{r}',\mathbf{v}'\rangle$. В силу сохранения энергии, $|\mathbf{v}'|=p$, так что $\mathbf{v}'=p\hat{\mathbf{e}}\langle b,p\rangle$, где $\hat{\mathbf{e}}$ — некоторый единичный вектор. В силу сохранения момента, $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{v}'$

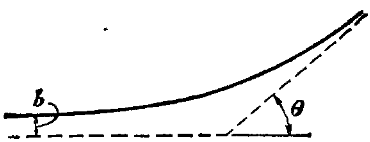

Рис. XI.2. Центральное рассеяние.

лежат в плоскости y, z и определена компонента $\mathbf{r}'$, перпендикулярная $\mathbf{v}'$. Таким образом, есть две функции, описывающие S: **угол рассеяния** $\theta=\arccos(\hat{e}\cdot\hat{z})$ и **время задержки** $T'=\mathbf{r}'\cdot\hat{e}/p$. Они записываются как функции импульса p и **прицельного параметра** b, или, эквивалентным образом, как функции энергии $E=p^2/2$ и момента $l=bp$. Соответствующая картина показана на рис. XI.2. Фактически центрально-симметричную задачу двух тел можно разрешить в квадратурах и доказать (см. задачу 11 или ссылки в Замечаниях), что

$$\theta = \pi - 2l \int_{r_0(l,\,E)}^{\infty} [2E - 2V - r^{-2}l^2]^{-1/2} \frac{dr}{r^2}, \tag{7a}$$

$$T = 2\int_{R_0}^{\infty} \{[2E - r^{-2}l^2]^{-1/2} - [2E - 2V - r^{-2}l^2]^{-1/2}\}\, dr -$$
$$-2\int_{r_0(l,\,E)}^{R_0} [2E - 2V - r^{-2}l^2]^{-1/2}\, dr + 2\int_{l/\sqrt{2E}}^{R_0} [2E - r^{-2}l^2]^{-1/2}\, dr, \tag{7b}$$

где $r_0(l, E) = \sup\{r \mid V(r) + l^2/2r^2 > E\}$ и R_0 — любое число, бо́льшее $l/\sqrt{2E}$ и r_0.

Заметим, что если подставить $V = r^{-1}$ в (7a) и (7b), то интеграл для T расходится, но интеграл для θ сходится. Это замечание сыграет важную роль, когда в § 9 мы будем рассматривать кулоново рассеяние.

Наконец, для того чтобы связать теорию с физическим экспериментом, следует определить сечение рассеяния и его связь с углом рассеяния θ. Вернемся к общему S-преобразованию и рассмотрим редукцию, несколько отличную от той, которую мы обсуждали выше. Запишем $S\langle \mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v})\rangle$. Мы будем рассматривать только $\mathbf{g}(\mathbf{r}, v\hat{\mathbf{z}})$, т. е. отбросим всю информацию, содержащуюся в f, что на языке предыдущего анализа эквивалентно игнорированию времени задержки. Пусть $v \neq 0$. Из соотношения $ST_l^{(0)} = T_l^{(0)}S$ следует, что $\mathbf{g}(\mathbf{r}, v\hat{\mathbf{z}}) = \mathbf{g}(\mathbf{r} + \alpha\hat{\mathbf{z}}, v\hat{\mathbf{z}})$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$; поэтому рассмотрим лишь $\mathbf{g}(\mathbf{r}, v\hat{\mathbf{z}})$, когда $\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 0$. Вследствие сохранения энергии $|\mathbf{g}| = v$, так что $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g}/v$. Выделим функцию $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{r}, v\hat{\mathbf{z}})$. Фиксируем v. Тогда $\hat{\mathbf{g}}$ есть отображение из плоскости $\mathbb{R}^2$, ортогональной $\hat{\mathbf{z}}$, на единичную сферу S^2. Мера Лебега на $\mathbb{R}^2$ индуцирует меру σ на S^2:

$$\sigma(E) = \mu(\hat{\mathbf{g}}^{-1}(E)),$$

где μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^2$ и E — борелево подмножество в S^2. Мера σ на S^2 называется **полным сечением**. В большинстве случаев σ абсолютно непрерывна относительно обычной меры Ω на S^2, если выколото направление вперед $\theta = 0$. Таким образом,

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega$$

с некоторой функцией $d\sigma/d\Omega$ на S^2, называемой **дифференциальным сечением**.

Физический эксперимент рассеяния хорошо описывается следующей моделью. Пучок частиц с постоянной энергией направляется на мишень. Пучок достаточно широкий и имеет приблизительно постоянную плотность ρ частиц на единичную площадь в плоскости $\mathbb{R}^2$, перпендикулярной направлению пучка. Достаточно далеко от мишени под некоторым углом рассеяния $\langle\theta, \varphi\rangle$ помещается детектор, который улавливает и подсчитывает все частицы, летящие от мишени внутри некоторого телесного угла размером $\Delta\Omega$ вокруг направления $\langle\theta, \varphi\rangle$. Измеряемая величина есть

$$\frac{\text{число частиц, попадающих на детектор}}{(\Delta\Omega)\,\rho}.$$

Читатель должен самостоятельно убедиться в том, что если угол $\Delta\Omega$ очень мал, а детектор и источник частиц весьма далеки от мишени, то эта величина очень близка к $d\sigma/d\Omega$. Заметим еще, что в том случае когда $F = -\nabla V$ и $V(r)$ есть функция лишь $|\mathbf{r}|$, существует формула, выражающая $(d\sigma/d\Omega)(\theta_0, \varphi_0)$ через угол рассеяния θ, являющийся функцией энергии E, и прицельный параметр b. Точнее (см. задачу 12),

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\theta=\theta_0} = \sum_{\{b\,:\,\theta(b)=\theta_0\}} b \operatorname{cosec}\theta_0 \left(\frac{d\theta}{db}\right)^{-1} \tag{8}$$

при условии, что сумма сходится.

XI.3. Основные принципы теории рассеяния в гильбертовом пространстве

Квантовая динамика описывается унитарной группой на гильбертовом пространстве. Динамика классических волновых уравнений, как мы видели в § X.13, тоже допускает естественную формулировку на языке унитарных групп. По этой причине набор основных задач и принципов, которые мы предложим в этом разделе, играет центральную роль в самых разных теориях рассеяния, которые мы рассмотрим далее в этой главе. Мы начнем с определения обобщенных волновых операторов и опишем элементарную «кинематику», связанную с этим понятием. Существование волновых операторов доказывается в большинстве случаев с помощью общего метода, известного под именем Кука, который мы ниже изложим. При соответствующих условиях, которые обычно более ограничительны, можно доказать существование и полноту с помощью комплекса идей, связанных с именами Като и Бирмана. Метод Кука и теория Като—Бирмана—это два столпа, на которых покоится абстрактная нестационарная теория. В конкретных случаях проверка предположений этих методов требует некоторых технических средств. Некоторые из этих средств рассмотрены в дополнениях 1 и 2 к этому разделу. Мы закончим этот раздел кратким описанием некоторых идей теории рас-