ляется на мишень. Пучок достаточно широкий и имеет приблизительно постоянную плотность ρ частиц на единичную площадь в плоскости $\mathbb{R}^2$, перпендикулярной направлению пучка. Достаточно далеко от мишени под некоторым углом рассеяния $\langle\theta, \varphi\rangle$ помещается детектор, который улавливает и подсчитывает все частицы, летящие от мишени внутри некоторого телесного угла размером $\Delta\Omega$ вокруг направления $\langle\theta, \varphi\rangle$. Измеряемая величина есть

$$\frac{\text{число частиц, попадающих на детектор}}{(\Delta\Omega)\,\rho}.$$

Читатель должен самостоятельно убедиться в том, что если угол $\Delta\Omega$ очень мал, а детектор и источник частиц весьма далеки от мишени, то эта величина очень близка к $d\sigma/d\Omega$. Заметим еще, что в том случае когда $F = -\nabla V$ и $V(r)$ есть функция лишь $|\mathbf{r}|$, существует формула, выражающая $(d\sigma/d\Omega)(\theta_0, \varphi_0)$ через угол рассеяния θ, являющийся функцией энергии E, и прицельный параметр b. Точнее (см. задачу 12),

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\theta=\theta_0} = \sum_{\{b\,:\,\theta(b)=\theta_0\}} b \operatorname{cosec}\theta_0 \left(\frac{d\theta}{db}\right)^{-1} \tag{8}$$

при условии, что сумма сходится.

XI.3. Основные принципы теории рассеяния в гильбертовом пространстве

Квантовая динамика описывается унитарной группой на гильбертовом пространстве. Динамика классических волновых уравнений, как мы видели в § X.13, тоже допускает естественную формулировку на языке унитарных групп. По этой причине набор основных задач и принципов, которые мы предложим в этом разделе, играет центральную роль в самых разных теориях рассеяния, которые мы рассмотрим далее в этой главе. Мы начнем с определения обобщенных волновых операторов и опишем элементарную «кинематику», связанную с этим понятием. Существование волновых операторов доказывается в большинстве случаев с помощью общего метода, известного под именем Кука, который мы ниже изложим. При соответствующих условиях, которые обычно более ограничительны, можно доказать существование и полноту с помощью комплекса идей, связанных с именами Като и Бирмана. Метод Кука и теория Като—Бирмана—это два столпа, на которых покоится абстрактная нестационарная теория. В конкретных случаях проверка предположений этих методов требует некоторых технических средств. Некоторые из этих средств рассмотрены в дополнениях 1 и 2 к этому разделу. Мы закончим этот раздел кратким описанием некоторых идей теории рассеяния для пары гильбертовых пространств и доказательством соответствующей теоремы типа Като — Бирмана.

Рассмотрим две унитарные группы e^{-iAt} и e^{-iBt}, которые представляют взаимодействующую динамику и сравниваемую с ней «свободную» динамику. Что это значит, что $e^{-iAt}\varphi$ выглядит «асимптотически свободным» при $t\to-\infty$? Очевидно, это означает существование такого вектора φ_+, что

$$\lim_{t\to-\infty}\|e^{-iBt}\varphi_+-e^{-iAt}\varphi\|=0. \qquad (9)$$

Заметим, что (9) эквивалентно равенству $\lim\limits_{t\to-\infty}\|e^{iAt}e^{-iBt}\varphi_+-\varphi\|=0$, и, таким образом, основная проблема существования сводится к доказательству существования сильных пределов. В большинстве приложений B имеет только абсолютно непрерывный спектр. Однако если это не так, то надо выбирать φ_+ из абсолютно непрерывного подпространства оператора B. Например, если φ_+ есть собственный вектор B, то указанный выше сильный предел существует только в том случае, когда φ_+ также собственный вектор оператора A с тем же собственным значением (задача 15) Поэтому определение волновых операторов мы дадим после проектирования всех величин на абсолютно непрерывное подпространство оператора B. Когда мы будем рассматривать вопрос о полноте, станет ясно, что это очень разумный выбор!

Определение. Пусть A и B — самосопряженные операторы на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и пусть $P_{ac}(B)$ — проектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора B. Будем говорить, что **обобщенные волновые операторы** $\Omega^\pm(A, B)$ существуют, если существуют сильные пределы

$$\Omega^\pm(A, B)=\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty}e^{iAt}e^{-iBt}P_{ac}(B). \qquad (10)$$

Если $\Omega^\pm(A, B)$ существуют, определим

$$\mathcal{H}_{in}=\operatorname{Ran}\Omega^+,\qquad \mathcal{H}_{out}=\operatorname{Ran}\Omega^-.$$

Для удобства обозначений иногда будем писать $\mathcal{H}_+$ вместо $\mathcal{H}_{in}$ и $\mathcal{H}_-$ вместо $\mathcal{H}_{out}$

Оказывается, сильные пределы в (10) — это как раз то, что следует рассматривать. В случае $P_{ac}(B)=1$ пределы *по норме* существуют в (10), лишь если $A=B$ (задача 15). С другой стороны, как мы увидим, если A имеет чисто дискретный спектр, то слабый предел в (10) существует (и равен нулю), несмотря на то что A и B могут быть совершенно непохожи.

Несколько странное соглашение о том, что $t\to\mp\infty$ отвечают $\Omega^\pm$, взято из физической литературы и связано с формализмом «стационарной» теории рассеяния: как будет видно в § 6, Ω^+ связан с $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(x+i\varepsilon-A)^{-1}$, а Ω^- —с $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(x-i\varepsilon-A)^{-1}$.

Следующее предложение показывает, что, независимо от ее физического значения, теория рассеяния есть полезный инструмент спектрального анализа. По этой причине некоторые части этой главы тесно связаны с гл. XIII.

Предложение 1. Предположим, что $\Omega^\pm(A, B)$ существуют. Тогда:

(a) $\Omega^\pm$ суть частичные изометрии с начальным подпространством $P_{ac}(B)\mathcal{H}$ и конечными подпространствами $\mathcal{H}_\pm$;

(b) $\mathcal{H}_\pm$ суть инвариантные подпространства оператора A и

$$\Omega^\pm[D(B)]\subset D(A), \quad A\Omega^\pm(A, B)=\Omega^\pm(A, B)B; \tag{11}$$

(c) $\mathcal{H}_\pm\subset \operatorname{Ran} P_{ac}(A)$.

Доказательство. (a) Если $u\in[P_{ac}(B)\mathcal{H}]^\perp$, то, очевидно, $\Omega^\pm u=0$. Если $u\in P_{ac}(B)\mathcal{H}$, то $\|e^{iAt}e^{-iBt}P_{ac}(B)u\|=\|u\|$ при всех t, так что $\|\Omega^\pm(A, B)u\|=\|u\|$.

(b) Так как при любом фиксированном s

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{iAt}e^{-iBt}P_{ac}(B)=\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{iA(t+s)}e^{-iB(t+s)}P_{ac}(B),$$

то $\Omega^\pm(A, B)=e^{iAs}\Omega^\pm(A, B)e^{-iBs}$, или, эквивалентно,

$$e^{-iAs}\Omega^\pm(A, B)=\Omega^\pm(A, B)e^{-iBs}. \tag{12}$$

Тогда (11) следует из теоремы Стоуна и из (12). Из (12) также ясно, что $\mathcal{H}_\pm$ суть инвариантные подпространства оператора e^{-iAs}.

(c) Из (a) и (b) следует, что $A\restriction\mathcal{H}_\pm$ унитарно эквивалентен $B\restriction P_{ac}(B)\mathcal{H}$, причем унитарная эквивалентность осуществляется посредством отображения $\Omega^\pm$: $P_{ac}(B)\mathcal{H}\to\mathcal{H}_\pm$. Следовательно, спектр $A\restriction\mathcal{H}_\pm$ абсолютно непрерывен. ∎

В квантовой теории, где A и B —операторы энергии, условие (12) выражает закон сохранения энергии; см. § 4.

Часто бывает полезно следующее

Предложение 2 (цепное правило). Если $\Omega^\pm(A, B)$ и $\Omega^\pm(B, C)$ существуют, то существуют также $\Omega^\pm(A, C)$, причем

$$\Omega^\pm(A, C)=\Omega^\pm(A, B)\Omega^\pm(B, C).$$

Доказательство. Согласно предложению 1(c), $\operatorname{Ran}\Omega^\pm(B, C)\subset\subset\operatorname{Ran}P_{ac}(B)$, поэтому

$$\lim_{t\to\mp\infty}\|(1-P_{ac}(B))e^{itB}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi\|=0$$

при любом φ. Следовательно,

$$e^{itA}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi = e^{itA}e^{-itB}P_{ac}(B)e^{itB}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi + \\ + e^{itA}e^{-itB}(1-P_{ac}(B))e^{itB}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi$$

сходится к $\Omega^\pm(A, B)\Omega^\pm(B, C)\varphi$ при $t \to \mp\infty$, так как произведение сильно сходящихся семейств равномерно ограниченных операторов сильно сходится. ∎

Как отмечалось в § 1, слабая асимптотическая полнота сводится к равенству $\mathscr{H}_{in} = \mathscr{H}_{out}$, в то время как асимптотическая полнота — к равенству $\mathscr{H}_{in} = \mathscr{H}_{out} = [P_{pp}(A)\mathscr{H}]^\perp$, где P_{pp} есть проектор на пространство $\mathscr{H}_{pp}$, порождаемое собственными векторами оператора A. Для абстрактной теории полезно следующее промежуточное понятие.

Определение. Допустим, что $\Omega^\pm(A, B)$ существуют. Говорят, что они **полны**, в том и только в том случае, если

$$\operatorname{Ran}\Omega^+ = \operatorname{Ran}\Omega^- = \operatorname{Ran}P_{ac}(A).$$

Таким образом, асимптотическая полнота эквивалентна двум утверждениям: $\Omega^\pm$ полны и $\sigma_{sing}(A) = \varnothing$. Так как последнее утверждение — чисто спектральное, его изучение естественно не связывать непосредственно с теорией рассеяния. Оно рассмотрено в гл. XIII.

Следующий замечательный факт сводит полноту к вопросу существования.

Предложение 3. Допустим, что $\Omega^\pm(A, B)$ существуют. Они полны тогда и только тогда, когда существуют $\Omega^\pm(B, A)$.

Доказательство. Предположим, что как $\Omega^\pm(A, B)$, так и $\Omega^\pm(B, A)$ существуют. Тогда, согласно цепному правилу, $P_{ac}(A) = \Omega^\pm(A, A) = \Omega^\pm(A, B)\Omega^\pm(B, A)$, так что

$$P_{ac}(A)\mathscr{H} \subset \operatorname{Ran}\Omega^\pm(A, B).$$

Так как мы уже знаем, что $\operatorname{Ran}\Omega^\pm(A, B) \subset P_{ac}(A)\mathscr{H}$, то полнота имеет место.

Обратно, предположим, что $\Omega^\pm(A, B)$ существуют и полны. Пусть $\varphi \in P_{ac}(A)\mathscr{H}$. Тогда существует такое ψ, что $\varphi = \Omega^\pm(A, B)\psi$. Согласно соображениям, изложенным в начале этого раздела, отсюда следует, что $\|e^{-iAt}\varphi - e^{-iBt}P_{ac}(B)\psi\| \to 0$ при $t \to -\infty$. Так как e^{-iBt} унитарен, $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{iBt}e^{-iAt}\varphi$ существует и равен $P_{ac}(B)\psi$. ∎

На первый взгляд предложение 3, казалось бы, говорит о том, что установить полноту ничуть не трудней, чем существование. На самом деле вопрос о полноте обычно гораздо труднее. Причина состоит в том, что в приложениях оператор B, описывающий свободную динамику, «простой»: в типичном случае это дифференциальный (или псевдодифференциальный) оператор в частных производных с постоянными коэффициентами. Получив явные формулы для e^{-iBt}, легко показать с помощью метода Кука, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют Но в отсутствие явных формул для e^{-iAt} нелегко показать, что существуют $\Omega^{\pm}(B, A)$. Предложение 3 наводит на мысль поискать такое условие на A и B, из которого следовало бы, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют, и которое было бы *симметрично* по A и B, потому что тогда из этого условия вытекало бы, что и $\Omega^{\pm}(A, B)$, и $\Omega^{\pm}(B, A)$ существуют, а тем самым $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны. Это тот механизм, с помощью которого мы получаем полноту в теории Като — Бирмана.

* * *

Метод Кука основан на том наблюдении, что если f — функция из C^1 на $\mathbb{R}$, причем $f' \in L^1(\mathbb{R})$, то $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ существует, так как

$$|f(t)-f(s)| = \left|\int_s^t f'(u)\,du\right| \leqslant \int_s^t |f'(u)|\,du \to 0,$$

когда $s < t$ и обе переменные стремятся к ∞.

Теорема XI.4 (метод Кука). Пусть A и B — самосопряженные операторы. Предположим, что существует множество $\mathscr{D} \subset D(B) \cap P_{ac}(B)\mathscr{H}$, которое плотно в $P_{ac}(B)\mathscr{H}$, так что для любого $\varphi \in \mathscr{D}$ найдется T_0, удовлетворяющее условиям

(a) $e^{-iBt}\varphi \in D(A)$ при $|t| > T_0$;

(b) $\displaystyle\int_{T_0}^{\infty} [\|(B-A)e^{-iBt}\varphi\| + \|(B-A)e^{+iBt}\varphi\|]\,dt < \infty.$ (13)

Тогда $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}$, и пусть $\eta(t) = e^{+iAt}e^{-iBt}\varphi$. Так как $e^{-iBt}\varphi \in D(A) \cap D(B)$ при $t > T_0$, то $\eta(t)$ сильно дифференцируема на (T_0, ∞) и

$$\eta'(t) = -ie^{iAt}(B-A)e^{-iBt}\varphi.$$

Таким образом, при $t > s > T_0$

$$\|\eta(t)-\eta(s)\| \leqslant \int_s^t \|\eta'(u)\|\,du \leqslant \int_s^t \|(B-A)e^{-iBu}\varphi\|\,du,$$

в силу (13), стремится к нулю, когда $s\to\infty$. Итак, $\eta(t)$ образуют направленность Коши при $t\to\infty$, поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} e^{iAt}e^{-iBt}P_{ac}(B)\psi$ существует при всех $\psi\in\mathcal{D}$. Этот предел также тривиально существует для всех $\psi\in[P_{ac}(B)\mathcal{H}]^{\perp}$ и, следовательно, по предположению для ψ, лежащих в плотном множестве. Так как $e^{iAt}e^{-iBt}P_{ac}(B)$ есть семейство равномерно ограниченных операторов, то из существования предела для плотного множества ψ следует существование предела для всех ψ в силу $\varepsilon/3$-приема. Тем самым доказано, что Ω^- существует. Доказательство для Ω^+ аналогично. ∎

В приложениях часто приходится оценивать $\|(B-A)e^{-iBt}\varphi\|$. Когда B — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, это можно сделать с помощью метода стационарной фазы (см. дополнение 1).

В ряде случаев бывают нужны различные расширения теоремы XI.4. Следующее расширение оказывается полезным, когда $B-A$ содержит некоторые «локальные особенности» (см. § 4).

Теорема XI.5 (теорема Купша — Сандаса). Пусть A и B — самосопряженные операторы. Предположим, что существуют ограниченный оператор χ и подпространство $\mathcal{D}\subset D(B)\cap P_{ac}(B)\mathcal{H}$, плотное в $P_{ac}(B)\mathcal{H}$, такие, что для любого $\varphi\in\mathcal{D}$ найдется T_0, удовлетворяющее условиям

(a) $(1-\chi)e^{-iBt}\varphi\in D(A)$ при $|t|>T_0$;

(b) $\int\limits_{T_0}^{\infty}[\|Ce^{-iBt}\varphi\|+\|Ce^{+iBt}\varphi\|]\,dt<\infty$, где $C=A(1-\chi)-(1-\chi)B$.

Предположим далее, что $\chi(B+i)^{-n}$ компактен при некотором n и что $\mathcal{D}\subset D(B^n)$. Тогда $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют.

Этот результат получается после простого видоизменения доказательства теоремы о методе Кука из общего результата, который будет сформулирован ниже как лемма 2. В задаче 19 от читателя требуется провести это доказательство.

В методе Кука, к сожалению, требуется, чтобы $B-A$ была задана как оператор, а не как квадратичная форма. Следующий результат позволяет разобраться и с формами.

Теорема XI.6. Пусть B — положительный самосопряженный оператор, и пусть $C_0, \ldots, C_n, D_0, \ldots, D_n$ — замкнутые операторы, удовлетворяющие условиям

(i) $D(C_i)\cap D(B_i)\supset Q(B)$ при $i=1, \ldots, n$ и $\|C_i\varphi\|^2\leqslant \alpha_i(\varphi, B\varphi)+\beta_i\|\varphi\|^2$, $\|D_i\varphi\|^2\leqslant\alpha_i(\varphi, B\varphi)+\beta_i\|\varphi\|^2$ для всех $\varphi\in Q(B)$;

(ii) $C_0=1$, $Q(D_0)\supset Q(B)$ и $|(\varphi, D_0\varphi)|\leqslant\alpha_0(\varphi, B\varphi)+\beta_0(\varphi, \varphi)$ для всех $\varphi\in Q(B)$;

(iii) квадратичная форма $\sum\limits_{i=0}^{n} C_i^* D_i^*$, определенная на $Q(B)$, симметрична и $\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i<1$;

(iv) существует множество $\mathscr{D}$, содержащееся в $\operatorname{Ran} P_{ac}(B)\cap\cap D(B)$, плотное в $P_{ac}(B)\mathscr{H}$ и такое, что для $\varphi\in\mathscr{D}$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\|D_i e^{-iBt}\varphi\|\,dt<\infty.$$

Тогда сумма в смысле форм $A=B+\sum\limits_{i=0}^{n} C_i^* D_i$ есть самосопряженный оператор и $\Omega^\pm(A, B)$ существуют.

Доказательство. В силу (i), (ii) и (iii), $\sum\limits_{i=0}^{n} C_i^* D_i$ есть относительно ограниченное в смысле форм возмущение B с относительной гранью $\alpha\equiv\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i<1$. Отсюда следует, что A самосопряжен и что $Q(A)=Q(B)$. В частности, нормы

$$\|\varphi\|_B=\|(B+1)^{1/2}\varphi\|,\qquad \|\varphi\|_A=\|(A+E)^{1/2}\varphi\|$$

на $Q(B)$ эквивалентны, т. е. $c_1\|\varphi\|_B\leqslant\|\varphi\|_A\leqslant c_2\|\varphi\|_B$. Здесь E — некоторое фиксированное число, такое, что $A+E\geqslant 1$. Отображение e^{-iBt} есть, очевидно, изометрия относительно $\|\cdot\|_B$. А так как e^{-iAt} есть изометрия отосительно $\|\cdot\|_A$, то, в силу отмеченной выше эквивалентности, имеем

$$\|e^{-iAt}\varphi\|_B\leqslant c\|\varphi\|_B, \tag{14}$$

где $c=c_1^{-1}c_2$ и не зависит от t. Пусть $W(t)=e^{iAt}e^{-iBt}$. Тогда для $\varphi\in\mathscr{D}$ и $t\geqslant s$

$$\|(W(t)-W(s))\varphi\|^2=(W(t)\varphi, (W(t)-W(s))\varphi)-\\ -(W(s)\varphi, (W(t)-W(s))\varphi).$$

Мы докажем, что при $t, s\to\infty$ каждый из этих членов стремится к нулю, поэтому, как и в теореме Кука, $\Omega^\pm(A, B)$ существуют. Рассмотрим первый член (второй аналогичен). Мы утверждаем, что

$$(W(t)\varphi, (W(t)-W(s))\varphi)=i\int\limits_{s}^{t}\sum_{j=0}^{n}(C_j e^{-iAu}W(t)\varphi, D_j e^{-iBu}\varphi)\,du. \tag{15}$$

Это равенство следует (см. задачу 20) из сделанных предположений и из того, что, согласно (14), e^{-iAu} и e^{-iBu} переводят $Q(B)$ в себя. В силу (14) и предположений (i) и (ii), для всех t, u

$$\sup_j \| C_j e^{-iAu} W(t)\varphi \| \leqslant \gamma \|\varphi\|_B$$

с некоторым γ (*не зависящим ни от* t, *ни от* u). Отсюда, в силу (15), следует, что

$$|(W(t)\varphi, (W(t)-W(s))\varphi)| \leqslant \gamma \|\varphi\|_B \int_s^t \sum_{j=0}^n \|D_j e^{-iBu}\varphi\| du.$$

Как в теореме Кука, в силу условия (iv), правая часть неравенства стремится к нулю при s и $t \to \infty$. ∎

* * *

Обратимся теперь к комплексу результатов, который мы назвали теорией Като — Бирмана. В этой теории употребляется понятие класса операторов со следом, введенное в § VI.6. Чтобы понять идею, лежащую в основе этой теории, допустим, что $B-A$ есть оператор ранга 1, т. е. что $(B-A)\varphi = (\psi, \varphi)\psi$. Если бы мы воспользовались методом Кука, чтобы показать, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют, мы искали бы такое φ, что $(\psi, e^{-itB}\varphi) \in L^1(\mathbb{R})$. Так как $\varphi \in P_{ac}(B)\mathscr{H}$, мы знаем, что спектральная мера $d(\varphi, E_\lambda\varphi)$ равна $|f(\lambda)|^2 d\lambda$ с некоторой f. Ниже мы увидим, что тогда $d(\psi, E_\lambda\varphi) = g(\lambda)|f(\lambda)|^2 d\lambda$ с некоторой $g \in L^2(\mathbb{R}, f^2 d\lambda)$ и, таким образом,

$$(\psi, e^{-itB}\varphi) = \int e^{-it\lambda} g(\lambda) |f(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Следовательно, $(\psi, e^{-itB}\varphi)$ есть фурье-образ $(2\pi)^{1/2} g|f|^2$. Вообще говоря, нелегко усмотреть, когда фурье-образ принадлежит L^1, но сделать так, чтобы он был из L^2, просто. Поэтому мы начнем с отыскания множества таких φ, что $(\psi, e^{-itB}\varphi) \in L^2(\mathbb{R})$.

Определение. Пусть B — самосопряженный оператор и $\{E_\Omega\}$ — его спектральное семейство. Через $\mathscr{M}(B)$ обозначим множество всех $\varphi \in \mathscr{H}$, таких, что $d(\varphi, E_\lambda\varphi) = |f(\lambda)|^2 d\lambda$, где $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Пусть $|||\varphi|||$ есть L^∞-норма функции f.

Нетрудно доказать (см. задачу 17), что $|||\cdot|||$ есть норма и что $\mathscr{M}(B)$ плотно (по $\mathscr{H}$-норме) в $\operatorname{Ran} P_{ac}(B)$.

Лемма 1. Для любого $\varphi \in \mathscr{M}(B)$ и любого $\psi \in \mathscr{H}$

$$\int |(\psi, e^{-itB}\varphi)|^2 dt \leqslant 2\pi \|\psi\|^2 |||\varphi|||^2. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть Q — проектор на циклическое подпространство, порождаемое B и φ. Пусть $d(\varphi, E_\lambda \varphi) = |f(\lambda)|^2 d\lambda$. Согласно общей спектральной теории (см. гл. VII и § VIII.3), $Q\mathcal{H}$ унитарно эквивалентно $L^2(\mathbb{R}, |f(\lambda)|^2 d\lambda)$, причем φ отвечает вектору $\varphi(\lambda) \equiv 1$ и e^{-itB} есть умножение на $e^{-it\lambda}$. Пусть $\eta(\lambda)$ отвечает вектору $Q\psi$. Тогда

$$(\psi, e^{-itB}\varphi) = (Q\psi, e^{-itB}\varphi) = \int \eta(\lambda) |f(\lambda)|^2 e^{-it\lambda} d\lambda, \tag{17}$$

так что, по теореме Планшереля,

$$\int |(\psi, e^{-itB}\varphi)|^2 dt = 2\pi \int |\eta(\lambda)|^2 |f(\lambda)|^4 d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant 2\pi \|f\|_\infty^2 \int |\eta(\lambda)|^2 |f(\lambda)|^2 d\lambda.$$

По определению, $\|f\|_\infty = |||\varphi|||$ и, значит,

$$\int |\eta(\lambda)|^2 |f(\lambda)|^2 d\lambda = \|Q\psi\|^2 \leqslant \|\psi\|^2. \blacksquare$$

Нам потребуется еще одно простое следствие представления унитарной группы через фурье-образ.

Лемма 2. Для любого $\varphi \in P_{ac}(B)$, когда $t \to \pm\infty$, $e^{-itB}\varphi \to 0$ в слабом смысле. Если C компактен, то $\|Ce^{-itB}\varphi\| \to 0$ при $t \to \pm\infty$.

Доказательство. Вследствие (17) и того что f и ηf принадлежат L^2, $(\psi, e^{-itB}\varphi)$ есть фурье-образ некоторой функции из L^1. Таким образом, в силу леммы Римана — Лебега (теорема IX.7), $(\psi, e^{-itB}\varphi) \to 0$. Следовательно, $\|Fe^{-itB}\varphi\| \to 0$ для любого оператора F конечного ранга. Для компактных операторов результат получается с помощью $\varepsilon/3$-приема (§I.1). $\blacksquare$

Результаты теории Като — Бирмана мы выведем из следующей теоремы

Теорема XI.7 (теорема Пирсона). Пусть A и B — самосопряженные операторы, и пусть J — ограниченный оператор. Предположим, что существует оператор C из класса операторов со следом, такой, что $C = AJ - JB$ в том смысле, что для всех $\varphi \in D(A)$ и $\psi \in D(B)$

$$(\varphi, C\psi) = (A\varphi, J\psi) - (\varphi, JB\psi).$$

Тогда существуют

$$\Omega^\pm(A, B; J) \equiv \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iAt} J e^{-iBt} P_{ac}(B).$$

Доказательство. Пусть $W(t) = e^{iAt} J e^{-iBt}$; рассмотрим случай $t \to +\infty$. Тогда, в силу рассуждений о плотности, применяемых в методе Кука, достаточно показать, что

$$\lim_{t < s;\ t \to \infty} \| (W(t) - W(s)) \varphi \|^2 = 0 \tag{18}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{M}(B)$. Мы докажем это, разбив левую часть (18) на две части, из которых одна подпадает под лемму 1, а другая — под лемму 2. Пусть

$$F_{ab}(X) = \int_a^b e^{iBt} X e^{-iBt} dt$$

с ограниченным оператором X и с $a < b$. Заметим сначала, что

$$W(t)^* W(s) - e^{iaB} W(t)^* W(s) e^{-iaB} = F_{0a}(Y(t, s)), \tag{19}$$

где

$$Y(t, s) = -i[e^{itB} J^* e^{-i(t-s)A} C e^{-isB} - e^{itB} C^* e^{-i(t-s)A} J e^{-isB}].$$

Мы докажем (19), не занимаясь вопросами области определения, и предоставим читателю вычислить матричные элементы и восполнить детали, относящиеся к областям определения. Идея состоит в том, чтобы записать разность в левой части как интеграл от ее производной. Пусть

$$Q(b) = e^{ibB} W(t)^* W(s) e^{-ibB}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{dQ(b)}{db} &= ie^{ibB}[Be^{itB} J^* e^{-i(t-s)A} J e^{-isB} - e^{itB} J^* e^{-i(t-s)A} J e^{-isB} B] e^{-ibB} = \\ &= ie^{ibB}[e^{itB} J^* e^{-i(t-s)A} C e^{-isB} - e^{itB} C^* e^{-i(t-s)A} J e^{-isB}] e^{-ibB} = \\ &= -e^{ibB} Y(t, s) e^{-ibB}.\end{aligned}$$

Интегрируя эту производную, получаем (19).

При фиксированных t и s разность

$$W(t) - W(s) = i \int_s^t e^{iuA} C e^{-iuB} du$$

компактна, так что по лемме 2

$$\lim_{a \to \infty} e^{iaB} W(t)^* (W(t) - W(s)) e^{-iaB} \varphi = 0,$$

если $\varphi \in \mathcal{M}(B)$. Из (19) следует, что для $\varphi \in \mathcal{M}(B)$

$$(\varphi, W(t)^* (W(t) - W(s)) \varphi) = \lim_{a \to \infty} (\varphi, F_{0a}(Y(t, t) - Y(t, s)) \varphi). \tag{20}$$

Поскольку C имеет след, для него справедливо разложение (см. (VI.6))

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\varphi_n, \cdot) \psi_n,$$

где $\sum \lambda_n = \|C\|_1$ — норме C как элемента $\mathfrak{I}_1$, $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ ортонормированы и $\lambda_n > 0$. Мы утверждаем, что для любого ограниченного оператора X и $a > 0$

$$|(\varphi, F_{0c}(e^{iaB}XCe^{-iaB})\varphi)| \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi \|C\|_1)^{1/2} \|X\| \||\varphi\|| \left[\sum_n \lambda_n \int_u^{\infty} |(\varphi_n, e^{-ixB}\varphi)|^2 dx\right]^{1/2}. \quad (21)$$

В самом деле, в силу вышеприведенного канонического разложения,

$$\text{левая часть (21)} \leqslant \left|\sum_n \lambda_n \int_u^{a+u} (e^{-ixB}\varphi, X\psi_n)(\varphi_n, e^{-ixB}\varphi)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left[\sum_n \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} |(X\psi_n, e^{-ixB}\varphi)|^2 dx\right]^{1/2} \left[\sum_n \lambda_n \int_u^{\infty} |(\varphi_n, e^{-ixB}\varphi)|^2 dx\right]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \text{правая часть (21)}.$$

Во второй строчке мы дважды воспользовались неравенством Шварца, а на последнем шаге применили лемму 1. В силу (20) и (21),

$$\|(W(t) - W(s))\varphi\|^2 \leqslant 8(2\pi\|C\|_1)^{1/2} \||\varphi\|| \|J\| \times$$
$$\times \left[\sum_n \lambda_n \int_{\min\{t,\,s\}}^{\infty} |(\varphi_n, e^{-ixB}\varphi)|^2 dx\right]^{1/2}. \quad (22)$$

Во-первых, из этого уравнения и леммы 1 следует, что

$$\|(W(t) - W(s))\varphi\|^2 \leqslant 16\pi \|C\|_1 \||\varphi\||^2 \|J\|, \quad (23)$$

а во-вторых, поскольку $\sum_n \lambda_n |(\varphi_n, e^{-ixB}\varphi)|^2$ принадлежит L^1, отсюда следует (18). ∎

Из этой теоремы и неравенства (23) получаем

Следствие. В предположениях теоремы XI.7

$$\|[\Omega^{\pm}(A, B; J) - J]\varphi\|^2 \leqslant 16\pi \|C\|_1 \||\varphi\||^2 \|J\|. \quad (24)$$

Доказательство. В неравенстве (23) положим $s = 0$ и устремим $t \to \pm\infty$ ∎

Если $AJ - JB$ принадлежит классу операторов со следом, то это же относится и к $BJ^* - J^*A$, так что оба предела s-lim $e^{iAt} Je^{-iBt} P_{ac}(B)$ и s-lim $e^{iBt}J^*e^{-iAt} P_{ac}(A)$ существуют. В общем случае для произвольного J отсюда не следует полнота ни одного из сильных пределов (рассмотрим, например, $J = 0$); однако если $J = 1$, то применимо предложение 3, и мы немедленно приходим к такому следствию.

Теорема XI.8 (теорема Като — Розенблюма). Если A и B — самосопряженные операторы и $A - B \in \mathcal{I}_1$ — классу операторов со следом, то $\Omega^\pm(A, B)$ существуют и полны.

В этой теореме A и B могут быть не ограничены, $A - B$ принадлежит $\mathcal{I}_1$ в смысле теоремы XI. 7, т. е. $(A\varphi, \psi) = (\varphi, B\psi) + (\varphi, C\psi)$ с некоторым $C \in \mathcal{I}_1$ и $\varphi \in D(A)$, $\psi \in D(B)$. Тогда отсюда следует, что $D(A) = D(B)$ и $A\varphi = B\varphi + C\varphi$ для $\varphi \in D(A)$.

Следствие. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, A, B — самосопряженные операторы. Предположим, что $\Omega^\pm(A, B)$ существуют и что каждый $A_n - A$ принадлежит $\mathcal{I}_1$, причем $\|A_n - A\|_1 \to 0$, когда $n \to \infty$. Тогда для каждого n существуют $\Omega^\pm(B\ A_n)$ и при $n \to \infty$

$$\Omega^\pm(A, B) = \text{s-lim}\, \Omega^\pm(A_n, B).$$

Если $\Omega^\pm(B, A)$ существуют, то и $\Omega^\pm(B, A_n)$ существуют для каждого n и для всех $\varphi \in \operatorname{Ran} P_{\text{ac}}(A)$

$$\Omega^\pm(B, A)\varphi = \lim_{n \to \infty} \Omega^\pm(B, A_n)\varphi.$$

Доказательство. В силу цепного правила достаточно доказать, что

$$\text{s-}\lim_{n \to \infty} \Omega^\pm(A_n, A) = P_{\text{ac}}(A) \tag{25}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \Omega^\pm(A, A_n)\varphi = \varphi \quad \text{при} \quad \varphi \in \operatorname{Ran} P_{\text{ac}}(A). \tag{26}$$

Из следствия теоремы XI.7 мы немедленно заключаем, что (25) выполняется. Пусть φ лежит в $\operatorname{Ran} P_{\text{ac}}(A)$, и пусть $\varphi_n = \Omega^+(A_n, A)\varphi$. Вследствие (25) $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$, когда $n \to \infty$. Значит,

$$\|\Omega^+(A, A_n)(\varphi_n - \varphi)\| \to 0.$$

Но в силу полноты $\Omega^+(A_n, A)$, имеем $\Omega^+(A, A_n)\varphi_n = \varphi$, так что последнее предельное соотношение и означает справедливость (26). ∎

Может случиться, что $\Omega^\pm(B, A_n)\varphi$ не стремится к нулю при $n \to \infty$ для $\varphi \in [\operatorname{Ran} P_{\text{ac}}(A)]^\perp$ (задача 22).

Условие принадлежности классу операторов со следом в теореме XI.8 нельзя заменить ни условием принадлежности $A - B$ классу операторов Гильберта — Шмидта, ни даже требованием принадлежности $A - B$ любому $\mathcal{I}_p$ с $p > 1$; см. обсуждение в Замечаниях. Одна з трудностей с теоремой XI.8 состоит в том, что в квантовой механике $B - A$ даже не ограничен.

Теорема XI.9 (теорема Куроды — Бирмана). Пусть A и B — такие самосопряженные операторы, что $(A+i)^{-1}-(B+i)^{-1}\in \mathcal{J}_1$. Тогда $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Доказательство. Пусть $J=(A+i)^{-1}(B+i)^{-1}$. Тогда в смысле средних значений

$$AJ-JB=(B+i)^{-1}-(A+i)^{-1}$$

и левая часть принадлежит классу операторов со следом, поэтому, согласно теореме Пирсона, существует

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{iAt}(A+i)^{-1}(B+i)^{-1}e^{-iBt}P_{ac}(B).$$

Применяя это к вектору вида $(B+i)\varphi$, $\varphi\in D(B)$, заключаем, что существуют

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{iAt}(A+i)^{-1}e^{-iBt}P_{ac}(B).$$

Далее, по предположению, разность $(A+i)^{-1}-(B+i)^{-1}$ компактна, так что, по лемме 2,

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty}[(A+i)^{-1}-(B+i)^{-1}]e^{-iBt}P_{ac}(B)=0.$$

Отсюда следует, что существуют

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{iAt}(B+i)^{-1}e^{-iBt}P_{ac}(B).$$

Применяя это к вектору вида $(B+i)\varphi$, заключаем, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют. По симметрии существуют $\Omega^{\pm}(B, A)$ и, таким образом, имеет место полнота. ∎

Чтобы сформулировать следующий результат, потребуется одно техническое определение.

Определение. Пусть A и B — самосопряженные операторы. Будем говорить, что A **подчинен** B, если найдутся такие непрерывные функции f и g на $\mathbb{R}$, что $f(x)\geqslant 1$, $g(x)\geqslant 1$, $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=\infty$ и $D(g(B))\subset D(f(A))$, а $f(A)g(B)^{-1}$ ограничен. Если A подчинен B, а B подчинен A, то будем говорить, что они **взаимно подчинены**.

Требование подчиненности — очень слабое условие. Например, вследствие теоремы о замкнутом графике, если $D(A)=D(B)$ или если A и B полуограничены и $Q(A)=Q(B)$, то A и B взаимно подчинены.

Теорема XI.10 (теорема Бирмана). Пусть A и B — самосопряженные операторы со спектральными проекторами $E_\Omega(A)$, $E_\Omega(B)$ соответственно. Предположим, что

(a) $E_I(A)(A-B)E_I(B)\in\mathcal{J}_1$ для каждого ограниченного интервала I;

(b) A и B взаимно подчинены.

Тогда $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Доказательство. По симметрии и в силу предложения 3, достаточно показать, что существуют $\Omega^{\pm}(A, B)$. Пусть $E_a(C)\equiv \equiv E_{(-a,\,a)}C$ и $E'_a(C)\equiv E_{(-\infty,\,-a]\cup[a,\,\infty)}(C)$, где C есть либо A, либо B. Если $J=E_a(A)E_a(B)$, то $AJ-JB\in\mathcal{J}_1$ по предположению (a), так что $\operatorname{s-lim}\limits_{t\to\pm\infty} e^{iAt}E_a(A)E_a(B)e^{-iBt}$ существуют по теореме Пирсона. Пусть $\varphi\in\operatorname{Ran}E_{a_0}(B)$ для некоторого a_0; тогда для $a>a_0$ существуют

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{iAt}E_a(A)e^{-iBt}\varphi,$$

и чтобы показать, что существуют $\Omega^{\pm}(A, B)\varphi$, достаточно убедиться в том, что

$$\lim_{a\to\infty}\Big[\sup_t \|E'_a(A)e^{-iBt}\varphi\|\Big]=0. \tag{27}$$

Пусть теперь f и g — функции, участвующие в определении подчиненности A оператору B. Пусть $F(a)=\inf\limits_{|x|\geqslant a} f(x)$. Тогда $F(a)\to\infty$ при $a\to\infty$, так как $f\to\infty$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\|E'_a(A)e^{-iBt}\varphi\| &\leqslant F(a)^{-1}\|f(A)E'_a(A)e^{-iBt}\varphi\|\leqslant\\ &\leqslant F(a)^{-1}\|f(A)g(B)^{-1}\|\|g(B)e^{-iBt}\varphi\|\leqslant\\ &\leqslant F(a)^{-1}\|f(A)g(B)^{-1}\|\Big[\sup_{|x|\leqslant a_0}|g(x)|\Big]\|\varphi\|,\end{aligned}$$

и, значит, (27) выполнено. ∎

Теоремы Куроды — Бирмана и Бирмана имеют следствия, касающиеся сильной сходимости, подобные предыдущим следствиям. Мы отнесли их к задачам (задачи 23, 24).

Есть множество условий, возникающих в приложениях, которые не покрываются предыдущими рассуждениями. Например, допустим, что $A\geqslant 0$, $B\geqslant 0$ и $A^2-B^2\in\mathcal{J}_1$. Существуют ли $\Omega^{\pm}(A, B)$? Или рассмотрим $A=-\Delta+V$, $B=-\Delta$ на $\mathbb{R}^n$ Если $n\geqslant 4$, то $(A+i)^{-1}-(B+i)^{-1}$ не принадлежит $\mathcal{J}_1$ ни при каких нетривиальных V; однако, как мы увидим, $(A+E)^{-k}-(B+E)^{-k}$ принадлежит $\mathcal{J}_1$, если k достаточно велико. Следует ли отсюда, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют? Ответ на оба вопроса положительный вследствие общего принципа, который мы сейчас опишем.

Определение. Функция φ на открытом подмножестве $T\subset\mathbb{R}$ называется **допустимой**, если $T=\bigcup\limits_{1}^{N} I_n$, где $I_n=(\alpha_n, \beta_n)$ не перекрываются, N конечно или бесконечно и

(a) вторая производная в смысле обобщенных функций φ'' принадлежит L^1 на каждом компактном подынтервале из T;

(b) φ' на каждом интервале (α_n, β_n) либо *строго* положительна, либо *строго* отрицательна.

Пример 1. Если $T=(0, \infty)=I_1$, то $\varphi(x)=x^{1/2}$ допустима. Отметим, что если $A^2=A_1$, $B^2=B_1$, то до тех пор, пока $A, B \geqslant 0$, имеем $A=\varphi(A_1)$, $B=\varphi(B_1)$ и $A_1-B_1 \in \mathfrak{I}_1$, если $A^2-B^2 \in \mathfrak{I}_1$.

Пример 2. Если $T=(0, \infty)=I_1$, то $\varphi(x)=x^{-1/n}-a$ допустима. Заметим, что если $A>-a$, $B>-a$ и $A_1=(A+a)^{-n}$, $B_1=(B+a)^{-n}$, то $A=\varphi(A_1)$, $B=\varphi(B_1)$ и $A_1-B_1 \in \mathfrak{I}_1$, если $(A+a)^{-n}-(B+a)^{-n} \in \mathfrak{I}_1$.

Теорема XI.11 (принцип инвариантности — случай операторов со следом). Пусть φ — допустимая функция на открытом множестве T. Предположим, что A и B — самосопряженные операторы, причем $\sigma(A)$, $\sigma(B) \subset \overline{T}$, и что в каждой граничной точке T либо φ имеет конечный предел, либо ни A, ни B не имеют в ней точечного спектра. Допустим, что $A-B$ принадлежит классу операторов со следом. Тогда $\Omega^{\pm}(\varphi(A), \varphi(B))$ существуют, полны и

$$\Omega^{\pm}(\varphi(A), \varphi(B))=\Omega^{\pm}(A, B)\, E_{T_1}(B)+\Omega^{\pm}(A, B)\, E_{T_2}(B),$$

где T_1 (соответственно T_2) — объединение тех интервалов, где $\varphi'>0$ (соответственно $\varphi'<0$).

Вообще, те же выводы имеют место в том случае, если условие $A-B \in \mathfrak{I}_1$ заменить предположениями либо теоремы Бирмана, либо теоремы Куроды — Бирмана.

Условие в граничных точках наложено лишь для того, чтобы можно было аккуратно определить $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$.

Прежде чем доказывать теорему, заметим, что существует ее вариант для того случая, когда применим метод Кука; см. дополнение 3. В связи с примерами 1 и 2 и в качестве их продолжения отметим, что справедливы такие утверждения:

Следствие 1. Если A и B — положительные операторы и $A^2-B^2 \in \mathfrak{I}_1$, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Следствие 2. Если A и B — положительные операторы и $(A^2+1)^{-1}-(B^2+1)^{-1} \in \mathfrak{I}_1$, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Следствие 3. Если A и B — такие операторы, что $A, B \geqslant -a+I$ и $(A+a)^{-k}-(B+a)^{-k} \in \mathfrak{I}_1$ для некоторого k, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Следствие 4. Если A и B — самосопряженные операторы и $e^{-A}-e^{-B} \in \mathfrak{I}_1$, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Мы еще вернемся к условиям, которые обеспечивают выполнение требований следствия 3. Слабая форма следствия 3, достаточная для всех приложений, может быть доказана с помощью метода, которым доказывалась теорема XI.9 (задача 25) В качестве подготовки к доказательству теоремы XI.11 докажем следующую лемму.

Лемма 3. Пусть φ — допустимая функция. Тогда

(a) если $Y \subset \mathbb{R}$ имеет нулевую меру Лебега, то $\varphi[Y \cap T]$ и $\varphi^{-1}(Y)$ имеют нулевую меру;

(b) для любой $w \in L^2(\alpha_n, \beta_n)$ в случае $\varphi' > 0$ на (α_n, β_n) имеем

$$\lim_{s \to \infty} \int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty e^{-i(t\lambda + s\varphi(\lambda))} w(\lambda)\, d\lambda \right|^2 dt = 0. \tag{28}$$

Если $\varphi' < 0$ на (α_n, β_n), то $s \to \infty$ в (28) надо заменить на $s \to -\infty$.

Доказательство. (a) См. задачу 26.

(b) Так как $(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^\infty e^{i(t\lambda + s\varphi(\lambda))} w(\lambda)\, d\lambda$ есть обратный фурье-образ $e^{is\varphi(\lambda)} w(\lambda)$, то из теоремы Планшереля следует, что

$$2\pi \|w\|^2 \geqslant \int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty e^{i(t\lambda + s\varphi(\lambda))} w(\lambda)\, d\lambda \right|^2 dt.$$

Поэтому необходимо доказать (28) только для таких w, линейные комбинации которых плотны в $L^2(\alpha_n, \beta_n)$, например для w, являющихся характеристическими функциями отрезков $[a, b] \subset (\alpha_n, \beta_n)$. Так как φ'' из L^1 на (α_n, β_n), то φ есть C^1-функция и, следовательно, $\inf_{\lambda \in [a, b]} \varphi'(t) = \gamma > 0$. Пользуясь тем, что

$$e^{-i(t\lambda + s\varphi(\lambda))} = i(t + s\varphi'(\lambda))^{-1} \frac{d}{d\lambda} \left(e^{-i(t\lambda + s\varphi(\lambda))}\right)$$

при $t > 0$, $s > 0$, мы видим, что

$$\left| \int_a^b e^{-i(t\lambda + s\varphi(\lambda))} d\lambda \right| = \left| \int_a^b (t + s\varphi'(\lambda))^{-1} \frac{d}{d\lambda} e^{-i(t\lambda + s\varphi(\lambda))} d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant (t + s\varphi'(b))^{-1} + (t + s\varphi'(a))^{-1} + (t + s\gamma)^{-2} s \int_a^b |\varphi''(\lambda)|\, d\lambda,$$

где последнее неравенство получено интегрированием по частям. Устремляя s к ∞ и замечая, что каждый член стремится к нулю в $L^2(0, \infty)$ как функция t, мы приходим к (28). ∎

Доказательство теоремы XI.11. Пусть $C \equiv A - B = \sum \lambda_n (\psi_n, \cdot)\psi_n$, и пусть $\eta \in \operatorname{Ran} E_{(\alpha_n, \beta_n)}(B) \cap \mathcal{M}(B)$. Тогда, согласно (22),

$$\|(\Omega^{\pm}(A, B) - 1) e^{-i\varphi(B)s}\eta\|^2 \leqslant c\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \int_0^{\infty} |(\psi_n, e^{-iBt - i\varphi(B)s}\eta)|^2 dt\right)^{1/2}. \tag{29}$$

В силу леммы 3(b), все отдельные интегралы в правой части (29) стремятся к нулю при $s \to \infty$ (соответственно $s \to -\infty$), если $\varphi' > 0$ ($\varphi' < 0$). Так как каждый интеграл ограничен вследствие леммы 1 величиной $2\pi\|\psi_n\|^2 |||\eta|||^2$ и $\sum |\lambda_n| \|\psi_n\|^2 = \operatorname{Tr}(|C|) < \infty$, то сумма в правой части (29) стремится к нулю. Согласно предложению 1, $\Omega^{\pm}(A, B) e^{-i\varphi(B)s} = e^{-i\varphi(A)s}\Omega^{\pm}(A, B)$, так что

$$\lim_{s \to \pm\infty} e^{i\varphi(A)s} e^{-i\varphi(B)s}\eta = \begin{cases} \Omega^{\mp}(A, B)\eta & (\varphi' > 0), \\ \Omega^{\pm}(A, B)\eta & (\varphi' < 0). \end{cases}$$

По лемме 3(a) $P_{ac}(\varphi(B)) = P_{ac}(B)$, так что в том случае, когда след $A - B$ конечен, теорема доказана.

Чтобы доказать ее в более общих предположениях, рассуждаем следующим образом. Если $AJ - JB$ принадлежит $\mathcal{I}_1$, то $\operatorname{s-lim}_{t \to \pm\infty} e^{i\varphi(A)t} J e^{-i\varphi(B)t}$ существуют и удовлетворяют аналогичному уравнению принципа инвариантности. Доказательство совпадает с проведенным выше. Пользуясь этим более общим результатом и вводя операторы J, подобно тому как это делалось при доказательстве теорем Куроды—Бирмана и Бирмана, легко распространить принцип инвариантности также и на эти случаи. При этом J зависят от A и B, а не от $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$. Вопросы непрерывности мы снова оставляем читателю (задача 28). ∎

Теорема XI.12. Пусть B — положительный самосопряженный оператор. Предположим, что C — симметрическое ограниченное в смысле форм возмущение B с относительной гранью $\alpha < 1$ и что

$$(B+1)^{-1/2} C (B+1)^{-k-1/2} \in \mathcal{I}_1. \tag{30}$$

Тогда $A = B + C$ есть форма самосопряженного оператора, удовлетворяющая условию

$$(A+E)^{-k} - (B+E)^{-k} \in \mathcal{I}_1 \tag{31}$$

при всех достаточно больших E. В частности, $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Доказательство. Последнее утверждение вытекает из (31) и третьего следствия теоремы XI.11. С помощью повторного применения тождества

$$(A+E)^{-1} = (B+E)^{-1} - (A+E)^{-1} C (B+E)^{-1}$$

находим, что

$$(A+E)^{-k}=(B+E)^{-k}-\sum_{j=1}^{k}(A+E)^{-j}C(B+E)^{-k+j-1},$$

так что (31) вытекает из

$$(A+E)^{-j}C(B+E)^{-k-1+j}\in\mathfrak{I}_1,\quad j=1,\ \ldots,\ k. \tag{32}$$

С помощью рассуждения, основанного на комплексной интерполяции (задача 29a), это получается из

$$(A+E)^{-1/2}C(B+E)^{-k-1/2}\in\mathfrak{I}_1,\qquad (A+E)^{-k-1/2}C(B+E)^{-1/2}\in\mathfrak{I}_1. \tag{33}$$

Первое включение в (33) вытекает из условий теоремы (30) и из ограниченности $(A+E)^{-1/2}(B+1)^{1/2}$. Остается доказать только второе включение для больших по модулю отрицательных E. Выберем E настолько отрицательным, что

$$\|(B+E)^{-1/2}C(B+E)^{-1/2}\|=\gamma<1. \tag{34}$$

Тогда

$$(A+E)^{-1}=(B+E)^{-1/2}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}[-(B+E)^{-1/2}C(B+E)^{-1/2}]^j\right\}(B+E)^{-1/2},$$

так что

$$(B+E)^{-1/2}(A+E)^{-k}C(B+E)^{-1/2}=$$
$$=\sum(-1)^{m-1}\left[\prod_{i=1}^{m}(B+E)^{-1/2-l_i}C(B+E)^{-1/2}\right], \tag{35}$$

где сумма берется по соответствующему семейству членов, для которого $l_1+\ldots+l_m=k$. При помощи комплексной интерполяции между (30) и (34) (задача 29b) получаем, что

$$(B+E)^{-1/2-l_i}C(B+E)^{-1/2}\in\mathfrak{I}_{k/l_i},\quad l_i=1,\ \ldots,\ k, \tag{36}$$

где $\mathfrak{I}_p$ — двусторонние идеалы в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, описанные в дополнении к § IX.4. Пользуясь неравенством Гёльдера для этих идеалов в каждом члене (35), применяя (34) к сомножителям с $l_i=0$ и (36) к сомножителям с $l_i>0$, видим, что каждый член в правой части (35) принадлежит $\mathfrak{I}_1$ и что его норма ограничена величиной $\text{const}\,\gamma^m$. Вследствие множителя γ^m сумма в (35) сходится, так что $(B+E)^{-1/2}(A+E)^{-k}C(B+E)^{-1/2}$ принадлежит $\mathfrak{I}_1$. Поскольку $(A+E)^{-1/2}(B+E)^{+1/2}$ ограничен, второе утверждеиие в (33) выполнено. ∎

Суть доказанной теоремы в том, что во многих приложениях, когда B — дифференциальный оператор, а C — оператор низшего порядка, можно проверить, выполнено или нет условие (30). Главный абстрактный результат описан в дополнении 2.

* * *

В заключение этого раздела скажем несколько слов о теории рассеяния в паре гильбертовых пространств. В § 10 будут рассмотрены физические системы, для которых метод пары гильбертовых пространств представляется естественным. В этом разделе мы дадим способ сведения задачи для двух гильбертовых пространств к задаче в одном пространстве. В типичных приложениях можно пользоваться или этой теорией сведения, или теоремой XI.13.

Определение. Пусть B и A — два самосопряженных оператора в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ соответственно, и пусть J — ограниченный оператор из $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_2$. Будем говорить, что $\Omega^\pm(A, B; J)$ существуют, в том и только том случае, если существуют сильные пределы

$$\Omega^\pm(A, B; J) = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iAt} J e^{-iBt} P_{ac}(B).$$

Операторы $\Omega^\pm(A, B; J)$ могут не быть изометрическими, и тем не менее справедливо

Предложение 4. $(\operatorname{Ker}\Omega^+)^\perp \equiv \mathscr{H}'_{\text{in}}$ есть инвариантное пространство оператора B, и $\mathscr{H}_{\text{in}} \equiv \overline{\operatorname{Ran}\Omega^+}$ есть инвариантное пространство оператора A. Далее, $B \restriction \mathscr{H}'_{\text{in}}$ *унитарно* эквивалентен $A \restriction \mathscr{H}_{\text{in}}$. В частности, спектр $A \restriction \mathscr{H}_{\text{in}}$ абсолютно непрерывен.

Доказательство. Как в обычной теории,

$$e^{-iAt}\Omega^+ = \Omega^+ e^{-iBt}, \tag{37}$$

откуда следует, что e^{-iBt} (соответственно e^{-iAt}) оставляет $\mathscr{H}'_{\text{in}}$ (соответственно $\mathscr{H}_{\text{in}}$) инвариантным. Легко видеть, что полярное разложение оператора из $\mathscr{H}_1$ в себя расширяется до операторов из $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_2$. В результате Ω^+ имеет разложение $\Omega^+ = V|\Omega^+|$, где $|\Omega^+| = [(\Omega^+)^*\Omega^+]^{1/2}$ в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_1)$, а V — частичная изометрия с начальным пространством $\mathscr{H}'_{\text{in}} \subset \mathscr{H}_1$ и конечным подпространством $\mathscr{H}_{\text{in}} \subset \mathscr{H}_2$. Утверждается, что

$$e^{-iAt}V = Ve^{-iBt}, \tag{38}$$

откуда будет следовать утверждение об унитарной эквивалентности. Вследствие (37) $(\Omega^+)^* e^{-iAt} = e^{-iBt}(\Omega^+)^*$, поэтому

$$(\Omega^+)^*\Omega^+ e^{-iBt} = (\Omega^+)^* e^{-iAt}\Omega^+ = e^{-iBt}(\Omega^+)^*\Omega^+.$$

В силу единственности положительного квадратного корня (теорема VI.9), $|\Omega^+|e^{-iBt}=e^{-iBt}|\Omega^+|$, так что из (37) следует, что

$$e^{-iAt}V|\Omega^+|=Ve^{-iBt}|\Omega^+|.$$

В результате (38) выполняется в применении к векторам из $\overline{\operatorname{Ran}|\Omega^+|}$. Для завершения доказательства (38) заметим, что на векторах φ из $(\operatorname{Ran}|\Omega^+|)^\perp=\operatorname{Ker}|\Omega^+|=\operatorname{Ker}V$, очевидно, $e^{-iAt}V\varphi=0$. Более того, $Ve^{-iBt}\varphi=0$, так как мы видели, что e^{-iBt} оставляет $\operatorname{Ker}|\Omega^+|=(\mathscr{H}'_{\text{in}})^\perp$ инвариантным. ∎

Легко видеть, что теперь, по цепному правилу, если $\Omega^\pm(A, B; J_1)$ и $\Omega^\pm(B, C; J_2)$ существуют, то существуют также $\Omega^\pm(A, C; J_1J_2)$ и они равны $\Omega^\pm(A, B; J_1)\,\Omega^\pm(B, C; J_2)$.

Может случиться, что $\mathscr{H}'_{\text{in}}$ не совпадает с $\operatorname{Ran}P_{\text{ac}}(B)$; пусть, например, $J=0$.

Определение. Если $(\operatorname{Ker}\Omega^\pm)^\perp=\operatorname{Ran}P_{\text{ac}}(B)$, мы называем $\Omega^\pm$ **полуполными**. Если, кроме того, $\operatorname{Ran}\Omega^\pm=\operatorname{Ran}P_{\text{ac}}(A)$, мы называем $\Omega^\pm$ **полными**.

В физических ситуациях часто есть некоторый произвол в выборе J. Поэтому важно иметь критерии, обеспечивающие равенство $\Omega^\pm(A, B; J_1)=\Omega^\pm(A, B; J_2)$.

Определение. Будем говорить, что операторы $J_1, J_2\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ **асимптотически B-эквивалентны**, если

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty}\{(J_1-J_2)e^{-iBt}P_{\text{ac}}(B)\}=0.$$

В большинстве приложений в этом убеждаются посредством доказательства компактности J_1-J_2 или компактности $(J_1-J_2)\times\times(B+i)^{-k}$ при некотором k (задача 18).

Определение. Пусть $J\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ и $J'\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$. Будем говорить, что J' есть **B-асимптотический левый обратный к** J (для краткости B-левый обратный), в том и только том случае, когда $J'J$ асимптотически B-эквивалентен единичному оператору I.

Доказательство следующего аналога предложения 3 мы оставляем читателю (задача 30).

Предложение 5. Пусть B и A — самосопряженные операторы на гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ соответственно. Пусть $J\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$, и предположим, что $\Omega^\pm(A, B; J)$ существуют.

(a) Пусть $J_1\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$. В этом случае J_1 асимптотически B-эквивалентен J тогда и только тогда, когда $\Omega^\pm(A, B; J_1)$ существуют и равны $\Omega^\pm(A, B; J)$.

(b) Если J имеет B-левый обратный, то $\Omega^\pm$ **полуполны.**

(c) Пусть J' — любой B-левый обратный. Тогда $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ полны в том и только том случае, если $\Omega^{\pm}(B, A; J')$ существуют и J является A-асимптотическим левым обратным к J'.
(d) Если J^* есть B-левый обратный к J, то $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ суть частичные изометрии с начальным пространством $\operatorname{Ran} P_{ac}(B)$.

Отметим, что теорема Пирсона сохраняется без всяких изменений в формулировке и в доказательстве, если определить $\mathfrak{I}_1(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ как множество таких операторов $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, для которых $(A^*A)^{1/2} \in \mathfrak{I}_1(\mathcal{H}_1)$.

Теорема XI.13 (теорема Белопольского — Бирмана). Пусть B и A — два самосопряженных оператора на гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ соответственно, имеющие спектральные разложения $E_\Omega(A)$ и $E_\Omega(B)$ Допустим, что $J \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ удовлетворяет условиям

(a) J имеет двусторонний ограниченный обратный;
(b) для любого ограниченного интервала I

$$E_I(A)(AJ - JB)E_I(B) \in \mathfrak{I}_1;$$

(c) для любого ограниченного интервала I оператор $(J^*J-1)\times \times E_I(B)$ компактен;

а также *либо*

(d$_1$) $JD(B) = D(A)$,

либо

(d$_2$) $JQ(B) = Q(A)$.

Тогда $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ существуют, полны и являются частично изометрическими операторами с начальным пространством $\operatorname{Ran} P_{ac}(B)$ и конечным пространством $\operatorname{Ran} P_{ac}(A)$.

Доказательство. Пусть $J_I = E_I(A) J E_I(B)$ и $J_I' = E_I(B) J^{-1} E_I(A)$. В силу обобщенной теоремы Пирсона и условия (b), операторы $\Omega^{\pm}(A, B; J_I)$ и $\Omega^{\pm}(B, A; J_I^*)$ существуют. Более того, мы утверждаем, что J_I' асимптотически A-эквивалентен J_I^*. Действительно, в силу (c), $E_I(B)(J^*J-1)$ компактен, значит, $E_I(B)(J^*-J^{-1})$ компактен и, следовательно, $J_I^*-J_I'$ компактен. Тогда из леммы 2 вытекает асимптотическая эквивалентность. Следовательно, $\Omega^{\pm}(B, A; J_I')$ существуют по пункту (a) предложения 5.

В силу условия (d), мы можем с помощью метода теоремы XI.10 показать, что

$$\lim_{a\to\infty}\left\{\sup_t (\| E_{(-\infty, -a)\cup(a, \infty)}(A) J e^{-iBt}\varphi\|)\right\} = 0,$$

если $\varphi \in \operatorname{Ran} E_I(B)$, так что $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ существуют. Подобным образом существуют и $\Omega^{\pm}(B, A; J^{-1})$. Тогда из пункта (c) предложения 5 следует, что $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ полны. Воспользовавшись *еще раз* условием (c), заключаем из пункта (d) предложения 5 и леммы 2, что $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ суть частичные изометрии из $\operatorname{Ran} P_{ac}(B)$ в $\operatorname{Ran} P_{ac}(A)$. ∎

Дополнение 1 к § XI.3. Метод стационарной фазы

В этом дополнении мы изложим метод оценки $[e^{-itB}]\varphi(x)$ в случае, когда B — дифференциальный или псевдодифференциальный оператор. Затем мы покажем, как применяются эти оценки, доказав, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют, если $A-B$ есть оператор умножения на соответствующую функцию. Наконец, мы обсудим, как, основываясь на этих оценках, обращаться с волновыми уравнениями второго порядка § 10 и 16.

Ключевая идея метода — это идея стационарной фазы. Перепишем $e^{-itB}\varphi(x)$ в виде $\int u(k)\, e^{i\omega f(k)}\, dk$, где $\omega \to \infty$, когда $t \to \infty$. Если $\omega \to \infty$, то быстрые осцилляции в $e^{i\omega f(k)}$ гасят друг друга. Такая компенсация меньше в тех точках, где f меняется медленнее всего, т. е. в тех точках, где $(\nabla f)(k) = 0$. Эти точки называются точками **стационарной фазы**. Мы сначала оценим интеграл в тех точках, где $\nabla f \neq 0$, а потом исследуем точки стационарной фазы.

Для заданного открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ пусть $C^l(\mathcal{O})$ обозначает пространство l раз дифференцируемых функций на $\mathcal{O}$, на котором введена топология как на пространстве Фреше с помощью полунорм

$$\|f\|_K = \sup_{k \in K} \sum_{|\alpha| \leqslant l} |D^\alpha f(k)|,$$

где K пробегает все компактные подмножества в $\mathcal{O}$. Сначала мы выделим точки стационарной фазы в асимптотиках интегралов вида $\int e^{i\omega f(k)} u(k)\, dk$.

Теорема XI.14. Пусть K — компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что f — вещественнозначная функция, определенная в окрестности $\mathcal{O}$ подмножества K, такая, что $f \in C^{l+1}(\mathcal{O})$ и $\operatorname{grad} f$ не обращается в нуль на всем K. Тогда для всех $u \in C_0^l(K^{\text{int}})$

$$\left| \int e^{i\omega f(k)} u(k)\, dk \right| \leqslant c(1+|\omega|)^{-l} \|u\|_{l,\infty}, \tag{39}$$

$$\text{где } \|u\|_{l,\infty} = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \|D^\alpha u\|_\infty .$$

Кроме того, если $M \subset C^{l+1}(\mathcal{O})$ есть компактное подмножество в C^{l+1}, на котором $(\operatorname{grad} f)(k)$ не обращается в нуль ни при каких $k \in K$ и $f \in M$, то постоянная c в (39) может быть выбрана равномерно для всех $f \in M$.