ложения 5 следует, что $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ полны. Воспользовавшись *еще раз* условием (с), заключаем из пункта (d) предложения 5 и леммы 2, что $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ суть частичные изометрии из $\operatorname{Ran} P_{ac}(B)$ в $\operatorname{Ran} P_{ac}(A)$. ∎

Дополнение 1 к § XI.3. Метод стационарной фазы

В этом дополнении мы изложим метод оценки $[e^{-itB}]\varphi(x)$ в случае, когда B — дифференциальный или псевдодифференциальный оператор. Затем мы покажем, как применяются эти оценки, доказав, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют, если $A-B$ есть оператор умножения на соответствующую функцию. Наконец, мы обсудим, как, основываясь на этих оценках, обращаться с волновыми уравнениями второго порядка § 10 и 16.

Ключевая идея метода — это идея стационарной фазы. Перепишем $e^{-itB}\varphi(x)$ в виде $\int u(k)\, e^{i\omega f(k)}\, dk$, где $\omega \to \infty$, когда $t \to \infty$. Если $\omega \to \infty$, то быстрые осцилляции в $e^{i\omega f(k)}$ гасят друг друга. Такая компенсация меньше в тех точках, где f меняется медленнее всего, т. е. в тех точках, где $(\nabla f)(k)=0$. Эти точки называются точками **стационарной фазы**. Мы сначала оценим интеграл в тех точках, где $\nabla f \neq 0$, а потом исследуем точки стационарной фазы.

Для заданного открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ пусть $C^l(\mathcal{O})$ обозначает пространство l раз дифференцируемых функций на $\mathcal{O}$, на котором введена топология как на пространстве Фреше с помощью полунорм

$$\|f\|_K = \sup_{k \in K} \sum_{|\alpha| \leqslant l} |D^\alpha f(k)|,$$

где K пробегает все компактные подмножества в $\mathcal{O}$. Сначала мы выделим точки стационарной фазы в асимптотиках интегралов вида $\int e^{i\omega f(k)} u(k)\, dk$.

Теорема XI.14. Пусть K — компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что f — вещественнозначная функция, определенная в окрестности $\mathcal{O}$ подмножества K, такая, что $f \in C^{l+1}(\mathcal{O})$ и $\operatorname{grad} f$ не обращается в нуль на всем K. Тогда для всех $u \in C_0^l(K^{\text{int}})$

$$\left| \int e^{i\omega f(k)} u(k)\, dk \right| \leqslant c(1+|\omega|)^{-l} \|u\|_{l,\infty}, \tag{39}$$

$$\text{где } \|u\|_{l,\infty} = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \|D^\alpha u\|_\infty .$$

Кроме того, если $M \subset C^{l+1}(\mathcal{O})$ есть компактное подмножество в C^{l+1}, на котором $(\operatorname{grad} f)(k)$ не обращается в нуль ни при каких $k \in K$ и $f \in M$, то постоянная c в (39) может быть выбрана равномерно для всех $f \in M$.

Доказательство. Сначала фиксируем f. Для всякого $k \in K$ можно найти окрестность U_k этого k, $a_k > 0$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$, такие, что $|\partial f/\partial k_j| \geqslant a_k$ во всех точках из U_k. Вследствие компактности K его можно покрыть конечным числом таких множеств $U_1, \ldots, U_n$. Найдем далее $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_0^\infty(\mathfrak{G})$, такие, что $\operatorname{supp} \varphi_l \subset U_l$ и $\sum \varphi_l(y) = 1$ для $y \in K$. Записывая подынтегральное выражение в виде

$$e^{i\omega f(k)} u(k) = \sum_j e^{i\omega f(k)} (u\varphi_j)(k)$$

и пользуясь тем, что $\|\varphi_j u\|_{l, \infty} \leqslant C \|u\|_{l, \infty}$, мы видим, что рассмотрение свелось к случаю, когда $\partial f/\partial k_1 \geqslant a > 0$ на всем K.

Так как $\partial f/\partial k_1 \neq 0$ на K, то при помощи теоремы о неявной функции можно найти окрестность V_k любого $k \in K$ и C^{l+1}-функцию g, такие, что $g(f(k), k_2, \ldots, k_n) = \langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ при всех $k \in V_k$. Пользуясь, как и выше, разбиением единицы $\{\varphi_l\}$, можно считать, что одна функция g годится для всего K. Пусть $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle = \langle f(k), k_2, \ldots, k_n \rangle$. Тогда

$$\int u(k) e^{i\omega f(k)} dk = \int u(g(y)) e^{i\omega y_1} \left[\frac{\partial f}{\partial k_1}(g(y)) \right]^{-1} dy =$$

$$= \int \left[\left(\frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^l e^{i\omega y_1} \right] (u \circ g) \left(\frac{\partial f}{\partial k_1} \right)^{-1} dy =$$

$$= \omega^{-l} \int e^{i\omega y_1} \left(i \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^l \left[(u \circ g) \left(\frac{\partial f}{\partial k_1} \right)^{-1} \right] dy.$$

Следовательно,

$$(1 + |\omega|)^l \left| \int u(k) e^{i\omega f(k)} dk \right| \leqslant D \| (u \circ g) (\partial f/\partial k_1)^{-1} \|_{l, \infty},$$

что доказывает (39).

Из приведенного доказательства видно, что в некоторой окрестности N функции f в $C^{l+1}(\mathfrak{G})$ можно пользоваться одним и тем же U_k и т. д. и получить таким образом (39) с фиксированной константой c' для всех $f \in N$. Покрывая M такими окрестностями, получим последнее утверждение теоремы. ∎

Следствие. Пусть $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принадлежит C^∞, и пусть $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — такая функция, что $\hat{u}$ имеет компактный носитель. Пусть $\mathcal{G}$ — открытое множество, содержащее компактное множество $\{\operatorname{grad} P(k) \mid k \in \operatorname{supp} \hat{u}\}$. Пусть

$$u_t(\mathrm{x}) = (2\pi)^{-n/2} \int \exp[i(\mathrm{x} \cdot \mathrm{k} - tP(\mathrm{k}))] \hat{u}(\mathrm{k})\, d\mathrm{k}. \quad (40a)$$

Тогда для любого m существуют c, зависящая от m, u, и $\mathcal{G}$, такие, что

$$|u_t(\mathrm{x})| \leqslant c(1 + |\mathrm{x}| + |t|)^{-m} \quad (40b)$$

для всех x, t, для которых x/t не лежит в $\mathcal{G}$.

Доказательство. Положим $f(k)=(|x|+|t|)^{-1}[x\cdot k-tP(k)]$ и $\omega=|x|+|t|$, так что (40b) принимает вид (39). Так как $\nabla_k f=(|x|+|t|)^{-1}[x-t\nabla_k P]$, если $x/t\notin\mathscr{G}$, то $\nabla_k f$ не обращается в нуль. Далее, можно устремить x/t к ∞ в заданном направлении и получить предельные функции, градиент которых тоже не исчезает. Значит, функции f лежат в соответствующем компактном подмножестве в C^{m+1}, откуда и вытекает (40b). ∎

Оценка (40) имеет красивую и простую интерпретацию. Представим себе классическую систему с импульсом k и гамильтоновой функцией $P(k)$, не зависящей от x. Такая система имеет постоянную скорость $v=\nabla P(k)$. Значит, классический «пакет» $\hat{u}(k)$ имеет скорости из $\mathscr{G}$. Неравенство (40) говорит о том, что вне классически разрешенной области «квантовый» волновой пакет $u_t(x)$ очень быстро спадает. Далее мы рассмотрим вклад изолированных точек, в которых $\operatorname{grad} f$ исчезает.

Теорема XI.15. Пусть f — вещественнозначная C^∞-функция, определенная в окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$. Допустим, что $(\operatorname{grad} f)(0)=0$ и что матрица $A_{ij}=(\partial^2 f/\partial k_i\partial k_j)(0)$ обратима. Тогда существует такая окрестность нуля $\mathscr{O}$, что при любом $s>n/2$ найдется c, для которой при всех $u\in C_0^\infty(\mathscr{O})$ и $\omega\geqslant 1$

$$\left|\int u(k)\,e^{i\omega f(k)}\,dk\right|\leqslant c\omega^{-n/2}\|u\|_{s,\infty}. \tag{41}$$

Кроме того, если задана одна такая f_0, то существуют окрестности нуля $\mathscr{O}_1$ и $\mathscr{O}_2$, такие, что $\overline{\mathscr{O}}_1\subset\mathscr{O}_2\subset\mathscr{O}$, и окрестность $\mathscr{N}$ функции f_0 в $C^l(\mathscr{O}_2)$-топологии (с некоторым l), такая, что (41) выполнено для всех $u\in C_0^\infty(\mathscr{O}_1)$ и всех $f\in\mathscr{N}$.

Доказательство. Сначала выберем некоторую f, удовлетворяющую условиям теоремы. Утверждается, что существуют $\mathscr{O}$ и обратимое C^∞-отображение $X\colon \mathscr{O}\longrightarrow\mathscr{O}'$, такое, что $X(k)=k+O(k^2)$ и

$$f(k)=f(0)+{}^1/_2\,(X(k),\ AX(k)). \tag{42}$$

Так как $(\operatorname{grad} f)(0)=0$, то, по теореме Тейлора с учетом остаточного члена, $f(k)=f(0)+{}^1/_2\,(B(k)k,\ k)$, где

$$(B(k))_{ij}=2\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial k_i\partial k_j}(sk)(1-s)\,ds.$$

Будем искать теперь C^∞-функцию $R(k)$ со значениями в множестве $n\times n$-матриц, такую, что $R^*(k)AR(k)=B(k)$; в самом деле, если мы выберем $X(k)=R(k)k$, то (42) будет выполнено. Пусть M — векторное пространство $n\times n$-матриц и M_s — векторное пространство симметричных $n\times n$-матриц. Рассмотрим функцию F из $M\times M_s$ в M_s, заданную равенством $F(R,B)=R^*AR-B$. Тогда

$(D_RF)|_{R=I,\, B=A}$ — градиент по переменным R — есть отображение T из M в M_s, заданное как $T(C)=C^*A+AC$. Если задано $D\in M_s$, то $T(^1/_2A^{-1}D)=D$; значит, T сюръективно, так как A невырожденна. Поскольку $F(I,A)=0$, то, по теореме о неявной функции, для некоторой окрестности $\mathcal{A}$ точки A существует C^∞-функция R: $\mathcal{A}\longrightarrow M$, такая, что

$$R^*(B)\,AR(B)=A,\quad R(A)=1.$$

Выберем $\mathfrak{G}$ так, чтобы $B(k)\in\mathcal{A}$, если $k\in\mathfrak{G}$. Положим $X(k)=R(B(k))\,k$. Тогда X принадлежит C^∞, удовлетворяет условию (42), и так как $B(k)=A+O(k)$, то $R(B(k))=1+O(k)$, откуда $X(k)=k+O(k^2)$.

Положим теперь $y=X(k)$. Тогда

$$\left|\int u(k)\,e^{i\omega f(k)}\,dk\right|=$$
$$=\left|\int u(X^{-1}(y))\,e^{i\omega(y,\,Ay)/2}\left[\det\left(\frac{\partial X}{\partial k}\circ X^{-1}(y)\right)\right]^{-1}dy\right|=$$
$$=\left|\int v(y)\,e^{i\omega(y,\,Ay)/2}\,dy\right|,$$

где $v(y)=u(X^{-1}(y))\left[\det(\partial X/\partial k\circ X^{-1}(y))\right]^{-1}$. По теореме Планшереля,

$$\int v(y)\,e^{i\omega(y,\,Ay)/2}\,dy=c_1\omega^{-n/2}\int\check{v}(k)\,e^{i(k,\,A^{-1}k)/2\omega}\,dk \qquad (43)$$

с подходящей константой c_1, зависящей от A. Таким образом,

$$\left|\int u(k)\,e^{i\omega f(k)}\,dk\right|\leqslant|c_1|\,\omega^{-n/2}\,\|\check{v}\|_1\leqslant c_2\omega^{-n/2}\|(1-\Delta)^{n/2}v\|_2\leqslant$$
$$\leqslant c\omega^{-n/2}\|u\|_{s,\,\infty}.$$

Остается доказать утверждение о равномерности в конце теоремы. Прежде всего заметим, что для всех f вблизи f_0 в топологии $C^2(\mathfrak{G})$ существует единственная точка $k(f)$ вблизи нуля, в которой $(\operatorname{grad}f)(k(f))=0$. В самом деле, пусть $\mathcal{G}$: $\mathfrak{G}\times C^2(\mathfrak{G})\longrightarrow\mathbb{R}^n$ — отображение, заданное равенством $\mathcal{G}(k,f)=(\operatorname{grad}f)(k)$. Тогда $\mathcal{G}(0,f_0)=0$, а $D_k\mathcal{G}|_{k=0,\,f=f_0}$ можно считать обратимым отображением A. Последнее утверждение следует из теоремы о неявной функции. Теперь утверждение о равномерности можно получить, замечая, что размер $\mathfrak{G}$ и константа c в приведенном доказательстве зависят лишь от конечного числа производных. ∎

Следствие. Пусть P есть C^∞-функция на $\mathbb{R}^n$, и пусть $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — такая функция, что $\hat{u}$ имеет компактный носитель и пересечение

$$\operatorname{supp}\hat{u}\cap\{k\mid\det[\partial^2P/\partial k_i\partial k_j]=0\}$$

пусто. Пусть $u_t(x)$ задано посредством (40а). Тогда

$$|u_t(x)| \leqslant c|t|^{-n/2} \tag{44}$$

для $|t| > 1$ и для всех x.

Доказательство. Пусть $\mathscr{Y}$ — ограниченная окрестность $\operatorname{supp} \hat{u}$, такая, что $\det[\partial^2 P/\partial k_i \partial k_j] \neq 0$, если $k \in \bar{\mathscr{Y}}$. В силу следствия теоремы XI.14, нужно доказать (44) лишь для x/t из $\mathscr{G} = \{\operatorname{grad} P(k) \mid k \in \mathscr{Y}\}$. Для каждого $p = x/t$ из $\mathscr{G}$ градиент

$$\nabla_k[(|x|+|t|)^{-1}(x \cdot k - tP(k))]$$

исчезает лишь в конечном числе точек в $\mathscr{Y}$, так что, привлекая разбиение единицы и теорему XI.15, убеждаемся в том, что (44) выполнено для $p = x/t$. Вследствие равномерности — одного из утверждений той же теоремы — эта оценка выполнена на самом деле в некоторой окрестности p. В силу компактности $\bar{\mathscr{G}}$, оценка (44) выполнена для всех x и t ∎

Чтобы понять, как можно использовать эти оценки в теории рассеяния, докажем следующую теорему.

Теорема XI.16. Пусть P — такая вещественнозначная C^∞-функция на $\mathbb{R}^n$, что множество

$$M \equiv \{k \mid \operatorname{grad} P(k) = 0 \text{ или } \det(\partial^2 P/\partial k_i \partial k_j) = 0\}$$

имеет меру нуль. Пусть V — такая вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^n$, что при некотором m

$$(1+|x|)^{-m} V \in L^2 \tag{45a}$$

и при всех $a, b > 0$

$$\int_1^\infty \left(\int_{a<|x|<b} |V(xt)|^2 dx \right)^{1/2} dt < \infty. \tag{45b}$$

Пусть $H_0 = P(-i\nabla)$, и пусть H — самосопряженное расширение $H_0 + V$, определенное на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует

$$\operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}.$$

Доказательство. По методу Кука достаточно доказать, что

$$\int_1^\infty \| V e^{\pm itH_0} u \| dt < \infty$$

для всех u из $\mathscr{D}$ — некоторого подмножества в $\mathscr{F}^{-1}[C_0^\infty]$, плотного в L^2. Пусть $\mathscr{D} = \{u \mid \hat{u} \in C_0^\infty, \operatorname{supp} \hat{u} \cap M = \varnothing\}$. Для таких u

положим

$$2a = \inf_{k \in \operatorname{supp} \hat{u}} |\operatorname{grad} P(k)|, \quad b/2 = \sup_{k \in \operatorname{supp} \hat{u}} |\operatorname{grad} P(k)|.$$

Тогда, в силу следствия теоремы XI.14 и предположения $(1+|x|)^{-m} V \in L^2$, получаем

$$\int_{|x| \geqslant b|t| \text{ или } |x| \leqslant a|t|} |V(x)|^2 |u_t(x)|^2 dx \leqslant c(1+|t|)^{-n},$$

так что остается доказать неравенство

$$\int_1^\infty \left(\int_{at < |x| < bt} |V(x)|^2 |u_{\pm t}(x)|^2 dx \right)^{1/2} dt < \infty.$$

Так как $|u_{\pm t}(x)|^2 \leqslant ct^{-n}$ согласно следствию теоремы XI.15, то эта оценка вытекает из (45b), если сделать замену переменных $x \mapsto tx$. ∎

Пока мы показали, как с помощью метода стационарной фазы оценить поведение при больших временах решений уравнения типа Шредингера $iu_t = P(-i\nabla) u$. Те же идеи позволяют сделать оценки поведения при больших временах решений уравнений свободных классических релятивистских полей

$$\varphi_{tt} = (\Delta - m^2)\varphi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{46}$$

Будем называть решение уравнения (46) **регулярным волновым пакетом**, если фурье-образы начальных данных $f = \widehat{\varphi(\cdot, 0)}$ и $g = \widehat{\varphi_t(\cdot, 0)}$ принадлежат C^∞ и имеют компактный носитель; кроме того, если $m = 0$, *то потребуем еще, чтобы* $k = 0$ *не входило в носитель*. В аксиоматической квантовой теории поля некоторые авторы называют регулярные волновые пакеты «гладкими решениями».

Очевидно, $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, где

$$\varphi_\pm(x, t) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{\pm it\mu(k)} e^{ik \cdot x} u_\pm(k)\, d^n k;$$

$$\mu(k) = \begin{cases} \sqrt{k^2 + m^2}, & m > 0; \\ |k|, & m = 0; \end{cases} \qquad u_\pm(k) = {}^1\!/_2 (\hat{f} \mp i\mu^{-1} \hat{g}).$$

Заметим, что если φ — регулярный волновой пакет, то $u_\pm \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, и если $m = 0$, то $0 \notin \operatorname{supp} u_\pm$.

Так как $\partial\mu/\partial k_i = k_i / \sqrt{k^2 + m^2}$ и

$$M_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \mu}{\partial k_i\, \partial k_j} = (k^2 + m^2)^{-1/2} [\delta_{ij} - k_i k_j (k^2 + m^2)^{-1}],$$

то

$$\rho_\pm \equiv \sup\{\,|\operatorname{grad}\mu(k)|\,|\,k\in\operatorname{supp}u_\pm\}$$

меньше единицы, если $m>0$, и равно единице, если $m=0$. Более того, если $m>0$, то $\{M_{ij}\}$ строго положительно определена и потому обратима. Эта матрица имеет $n-1$ собственных значений, равных $(k^2+m^2)^{-1/2}$, и одно, равное $m^2(k^2+m^2)^{-3/2}$. Если $m=0$ и $k\neq 0$, то $\{M_{ij}\}$ строго положительно определена в направлениях, ортогональных к k, однако k — собственный вектор с нулевым собственным значением.

Для случая $m>0$ методы стационарной фазы непосредственно применимы и приводят к следующей теореме.

Теорема XI.17. Пусть φ — регулярный волновой пакет для уравнения Клейна — Гордона (46) с $m\neq 0$. Тогда

(a) при некотором $\rho<1$ и любом N найдется такая c_N, что

$$|\varphi(x, t)|\leqslant c_N(|x|+|t|+1)^{-N}, \quad \text{если } |x|\geqslant \rho t;$$

(b) найдется такая постоянная d, что

$$|\varphi(x, t)|\leqslant d(1+|t|)^{-n/2} \quad \text{при всех } x, t,$$

где n — размерность пространства.

Можно выбрать $\rho={}^1/_2(1+\max\rho_\pm)$. По существу (a) есть некоторого рода условие конечности скорости распространения для уравнения Клейна — Гордона. Так как начальные данные не имеют компактного носителя по x, то мы не можем ожидать исчезновения решения, когда $|x|$ велико по сравнению с $|t|$, однако оно быстро убывает. Отметим, что при такой «конечной скорости распространения» скорость в действительности меньше единицы.

Для нужд § 16 отметим такое следствие теоремы XI.17

Следствие. Если φ — регулярный волновой пакет уравнения Клейна — Гордона (46) с $m\neq 0$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(t, x)|\,dx\leqslant C(1+|t|)^{n/2}.$$

Доказательство. Разобьем область интегрирования по x на две части: $|x|\leqslant t$ и $|x|\geqslant t$. По условию (b) первый интеграл может быть оценен следующим образом:

$$d(1+|t|)^{-n/2}\int_{|x|\leqslant t} d^n x\leqslant c_1|t|^{n/2}.$$

Второй интеграл, по условию (a), стремится к нулю скорее, чем любая степень $|t|$, и, в частности, ограничен константой c_2. Выберем теперь $C=\max\{c_1, c_2\}$. ∎

Теперь рассмотрим случай $m=0$. Теорема XI.14 непосредственно применима и приводит к оценке

$$|\varphi(x, t)| \leqslant c_{M,\varepsilon}(|x|+|t|+1)^{-M}, \text{ если } |x| \geqslant (1+\varepsilon)|t| \text{ или } |x| \leqslant (1-\varepsilon)|t|$$

Подчеркнем роль условия $0 \notin \operatorname{supp} u_{\pm}$ при $m=0$, ибо, например, последняя оценка в одномерном случае ($n=1$) не справедлива, если $g=\widehat{\varphi_t(\cdot, 0)}$ таковы, что $g(0) \neq 0$. Фактически в одномерном случае решения уравнения $\varphi_{tt}=\varphi_{xx}$ с начальными данными в $\mathscr{S}$ удовлетворяют условию

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(x, t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_t(y, 0)\,dy \tag{47}$$

для любого *фиксированного* x, так что $\varphi(x, t)$ не стремится к нулю при $|x| \leqslant (1-\varepsilon)|t|$. Условие (47) следует из явной формы решения в одном измерении:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \varphi_t(y, 0)\,dy + \frac{1}{2}[\varphi(x+t, 0)+\varphi(x-t, 0)].$$

Эта формула также показывает, что $\|\varphi\|_\infty$ в случае $n=1$ не убывает как $|t|^{-n/2}$; на самом деле доказательство быстрого убывания, справедливое при $m>0$, не проходит при $m=0$, так как $\{M_{ij}\}$ уже необратима. Однако $\{M_{ij}\}$ невырожденна в $n-1$ направлениях; поэтому мы ожидаем и докажем, что φ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x, t)| \leqslant d\,|t|^{-(n-1)/2}. \tag{48}$$

Если d не зависит от x, то (48) достаточно доказать для любого фиксированного направления x, так что мы возьмем $x=\langle x_1, 0, \ldots, 0\rangle$, $x_1>0$. Значит, надо проследить за

$$\varphi_{\pm}(x, t) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm it|k|+ik_1x_1} u_{\pm}(k)\,d^nk.$$

Мы исследуем φ_- для положительных t; остальные доказательства аналогичны. Выберем $\varepsilon>0$ таким образом, чтобы u_- исчезала в шаре радиуса 2ε вокруг нуля. Выберем χ_1 и $\chi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы было $\chi_1+\chi_2=1$ и $\chi_1(k)=0$ при $k_1<\varepsilon$, $\chi_2(k)=0$ при $k_1>{}^3/_2\,\varepsilon$. Запишем

$$\varphi_-(x, t) = (2\pi)^{-n/2}\int_{k_1>\varepsilon} e^{-it|k|+ik_1x_1}\chi_1(k)\,u_-(k)\,dk + (2\pi)^{-n/2}\int_{\substack{k_1<3\varepsilon/2\\ |k|\geqslant 2\varepsilon}} e^{-it|k|+ik_1x_1}\chi_2(k)\,u_-(k)\,dk.$$

Так как $\nabla_k(-t|k|+k_1x_1)$ исчезает только при $k_1>0$, $k_2=\ldots$ $\ldots=k_n=0$, то вторая область интегрирования не содержит точек стационарной фазы и, значит, второй интеграл стремится к нулю быстрее любой степени t. В итоге осталось исследовать только первый интеграл. Для этого сделаем замену переменных, выделяющую направление, вдоль которого фаза стационарна. Определим

$$K_1(k)=k_1,$$
$$K_j(k)=\frac{k_j}{\sqrt{k_2^2+\ldots+k_n^2}}(|k|-k_1)^{1/2},\qquad j=2,\ \ldots,\ n.$$

Очевидно, $k\longmapsto K$ есть диффеоморфизм на $\mathcal{N}=\{k\mid k_1>\varepsilon\}$. Поскольку $|k|=K_1+\sum\limits_{j=2}^{N}K_j(k)^2$, то при подходящих g и h имеем

$$\left|(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathcal{N}}e^{-it|k|+ik_1x_1}\chi_1(k)\,u_-(k)\,d^nk\right|=$$
$$=\left|(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{K[\mathcal{N}]}\exp\left[iK_1(x_1-t)-it\sum_{j=2}^{n}K_j^2\right]g(K)\,d^nK\right|\leqslant$$
$$\leqslant t^{-(n-1)/2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\exp\left(-(4ti)^{-1}\sum_{j=2}^{n}y_j^2\right)\right|\times$$
$$\times|h(x_1-t,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)|\,d^{n-1}y,$$

откуда следует оценка (48). Итак, имеет место

Теорема XI.18. Пусть φ — регулярный волновой пакет волнового уравнения (46) с $m=0$. Тогда

(a) при любом $\varepsilon>0$ и любом N найдется такая $c_{N,\varepsilon}$, что $|\varphi(x,\ t)|\leqslant c_{N,\varepsilon}(1+|x|+|t|)^{-N}$, если $|x|<(1-\varepsilon)|t|$ или $|x|>(1+\varepsilon)|t|$;

(b) для некоторого d при всех x и t

$$|\varphi(x,\ t)|\leqslant d\,|t|^{-(n-1)/2}.$$

Наше определение регулярного волнового пакета при $m=0$ включает требование, что фурье-образы начальных данных обращаются в нуль вблизи начала координат. В сущности, для пункта (b) это условие не нужно. На самом деле, опираясь на явные формулы для решения или на более подробный анализ методом стационарной фазы (задача 33), можно доказать, что имеет место следующая

Теорема XI.19. Пусть $\varphi(x,\ t)$ — решение (46) при $m=0$ с начальными данными в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда:

(a) при любом N и $\varepsilon>0$ найдется такое $c_{N,\,\varepsilon}$, что

$$|\varphi(x,\,t)|\leqslant c_{N,\,\varepsilon}(1+|x|+|t|)^{-N},\qquad |x|\geqslant(1+\varepsilon)|t|;$$

(b) при любом $\varepsilon>0$ найдется такое c_ε, что

$$|\varphi(x,\,t)|\leqslant c_\varepsilon(1+|t|)^{-(n-1)},\qquad |x|\leqslant(1-\varepsilon)|t|;$$

(c) найдется такое d, что

$$|\varphi(x,\,t)|\leqslant d(1+|t|)^{-(n-1)/2}\qquad \text{при всех } x \text{ и } t.$$

Когда n четно, результат (b) наилучший возможный. В самом деле, если $h=\varphi(\cdot,\,0)=0$ и $l=\varphi_t(\cdot,\,0)\in C_0^\infty$, то при фиксированном x имеем $\varphi(x,\,t)\sim c_n t^{-(n-1)}\int l(y)\,dy$, причем $c_n\neq 0$, если n четно. Но если n нечетно и больше единицы, то, в силу принципа Гюйгенса, оценка пункта (a) имеет место в области $|x|\leqslant(1-\varepsilon)|t|$ из пункта (b).

Дополнение 2 к § XI.3. Свойства $f(x)\,g(-i\nabla)$ как элементов $\mathcal{J}_p$

Для применения теорем теории Като—Бирмана часто бывает необходимо доказать, что некоторые операторы вида $f(x)\,g(-i\nabla)$ принадлежат классу операторов со следом. Такие операторы возникают также в ряде других ситуаций, и иногда достаточно располагать более скудной информацией о сингулярных значениях $\{\mu_m\}$, чем сходимость ряда $\sum|\mu_m|$. Напомним, что $\mathcal{J}_p$—это множество таких $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, что $\|A\|_p=(\operatorname{tr}(|A|^p))^{1/p}<\infty$. Свойства $\mathcal{J}_p$ и нормы $\|\cdot\|_p$ можно найти в § VI.6 и в дополнении к § IX.4. Имеют место следующие результаты.

Теорема XI.20. Пусть $2\leqslant q<\infty$ и $f,\,g\in L^q(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f(x)\,g(-i\nabla)\in\mathcal{J}_q$ и

$$\|f(x)\,g(-i\nabla)\|_q\leqslant(2\pi)^{-n/q}\|f\|_q\|g\|_q.$$

Напомним, что $L_\delta^2(\mathbb{R}^n)$ есть множество таких f, что $\|f\|_\delta=\|(1+x^2)^{\delta/2}f(x)\|_{L^2}<\infty$.

Теорема XI.21. Допустим, что f и g принадлежат $L_\delta^2(\mathbb{R}^n)$ с некоторым $\delta>n/2$. Тогда $f(x)\,g(-i\nabla)$ принадлежит классу операторов со следом и

$$\|f(x)\,g(-i\nabla)\|_1\leqslant c_{\delta,\,n}\|f\|_\delta\|g\|_\delta.$$

Существует необходимое и достаточное условие принадлежности $f(x)\,g(-i\nabla)$ классу $\mathcal{J}_1$ (см. Замечания). Но для приложений обычно достаточно теоремы XI.21.

Теорема XI.22. Пусть $2<q<\infty$ и $g\in L_w^q(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^q(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f(x)\,g(-i\nabla)$—ограниченный оператор с сингулярными значениями