(a) при любом N и $\varepsilon>0$ найдется такое $c_{N,\varepsilon}$, что

$$|\varphi(x,t)|\leqslant c_{N,\varepsilon}(1+|x|+|t|)^{-N},\qquad |x|\geqslant(1+\varepsilon)|t|;$$

(b) при любом $\varepsilon>0$ найдется такое c_ε, что

$$|\varphi(x,t)|\leqslant c_\varepsilon(1+|t|)^{-(n-1)},\qquad |x|\leqslant(1-\varepsilon)|t|;$$

(c) найдется такое d, что

$$|\varphi(x,t)|\leqslant d(1+|t|)^{-(n-1)/2}\quad \text{при всех } x \text{ и } t.$$

Когда n четно, результат (b) наилучший возможный. В самом деле, если $h=\varphi(\cdot,0)=0$ и $l=\varphi_t(\cdot,0)\in C_0^\infty$, то при фиксированном x имеем $\varphi(x,t)\sim c_n t^{-(n-1)}\int l(y)\,dy$, причем $c_n\neq 0$, если n четно. Но если n нечетно и больше единицы, то, в силу принципа Гюйгенса, оценка пункта (a) имеет место в области $|x|\leqslant(1-\varepsilon)|t|$ из пункта (b).

Дополнение 2 к § XI.3. Свойства $f(x)\,g(-i\nabla)$ как элементов $\mathcal{I}_p$

Для применения теорем теории Като—Бирмана часто бывает необходимо доказать, что некоторые операторы вида $f(x)\,g(-i\nabla)$ принадлежат классу операторов со следом. Такие операторы возникают также в ряде других ситуаций, и иногда достаточно располагать более скудной информацией о сингулярных значениях $\{\mu_m\}$, чем сходимость ряда $\sum|\mu_m|$. Напомним, что $\mathcal{I}_p$—это множество таких $A\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$, что $\|A\|_p=(\mathrm{tr}(|A|^p))^{1/p}<\infty$. Свойства $\mathcal{I}_p$ и нормы $\|\cdot\|_p$ можно найти в § VI.6 и в дополнении к § IX.4. Имеют место следующие результаты.

Теорема XI.20. Пусть $2\leqslant q<\infty$ и $f,\,g\in L^q(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f(x)\,g(-i\nabla)\in\mathcal{I}_q$ и

$$\|f(x)\,g(-i\nabla)\|_q\leqslant(2\pi)^{-n/q}\|f\|_q\|g\|_q.$$

Напомним, что $L_\delta^2(\mathbb{R}^n)$ есть множество таких f, что $\|f\|_\delta=\|(1+x^2)^{\delta/2}f(x)\|_{L^2}<\infty$.

Теорема XI.21. Допустим, что f и g принадлежат $L_\delta^2(\mathbb{R}^n)$ с некоторым $\delta>n/2$. Тогда $f(x)\,g(-i\nabla)$ принадлежит классу операторов со следом и

$$\|f(x)\,g(-i\nabla)\|_1\leqslant c_{\delta,n}\|f\|_\delta\|g\|_\delta.$$

Существует необходимое и достаточное условие принадлежности $f(x)\,g(-i\nabla)$ классу $\mathcal{I}_1$ (см. Замечания). Но для приложений обычно достаточно теоремы XI.21.

Теорема XI.22. Пусть $2<q<\infty$ и $g\in L_w^q(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^q(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f(x)\,g(-i\nabla)$—ограниченный оператор с сингулярными значениями

μ_m, удовлетворяющими неравенствам

$$|\mu_m| \leqslant d_{q,n} \|f\|_q \|g\|_{q,w} m^{-1/q}.$$

Когда мы говорим, что $f(x)g(-i\nabla)$ принадлежит $\mathcal{I}_q$, мы имеем в виду, что в $\mathcal{I}_q$ есть оператор A, для которого $(\varphi, A\psi) = (\bar{f}\varphi, g(-i\nabla)\psi)$ при всех φ и ψ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательства теорем XI.20 и XI.21 мы приведем; ссылки в связи с теоремой XI.22 можно найти в Замечаниях Отметим, что теорему XI.20 нельзя распространить ни на какое $q < 2$ (см. задачу 36). Теорема XI.21 тесно связана с тем, что $q \geqslant 2$, так как из $f \in L^2_\delta(\mathbb{R}^n)$ для $\delta > n/2$ следует, что $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, и вообще первое допущение ненамного сильнее второго Теорема XI.22 также связана с теоремой XI.20 в том смысле, что $|\mu_m| \leqslant cm^{-1/q}$ влечет за собой сходимость или только слабую расходимость $\sum |\mu_m|^q$, так что $f(x)g(-i\nabla)$ почти принадлежит $\mathcal{I}_q$. Теорему XI.22 нельзя расширить на f и g из L^q_w. Например, оператор $|x|^{-\alpha}|i\nabla|^{-\alpha}$ даже не компактен, поскольку он коммутирует с унитарной группой масштабных преобразований.

Доказательство теоремы XI.20. Если $q = \infty$, то f и g принадлежат L^∞, так что $\|f(x)g(-i\nabla)\|_{\text{op}} \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Если $q = 2$, то $f(x)g(-i\nabla)$ — интегральный оператор с ядром $f(x)(2\pi)^{-n/2}\check{g}(x-y)$ (см теорему IX.29), так что $f(x)g(-i\nabla)$ есть оператор Гильберта — Шмидта и $\|f(x)g(-i\nabla)\|_2 \leqslant (2\pi)^{-n/2}\|f\|_2\|g\|_2$. Общий случай теперь можно рассмотреть с помощью интерполяционных методов дополнения к § IX 4 (задача 35).

Доказательство теоремы XI.21. Запишем $f(x)g(-i\nabla) = AB$, где

$$A = f(x)(1-\Delta)^{-\delta/2}(1+x^2)^{\delta/2}, \qquad B = (1+x^2)^{-\delta/2}(1-\Delta)^{\delta/2}g(-i\nabla).$$

Тогда B — оператор Гильберта — Шмидта в силу теоремы XI.20. Пусть h есть фурье-образ $(1+k^2)^{-\delta/2}$, умноженный на $(2\pi)^{-n/2}$. Тогда A — интегральный оператор с ядром $f(x)h(x-y)(1+y^2)^{\delta/2}$. Так как $f \in L^2_\delta$, то, чтобы показать, что A — оператор Гильберта — Шмидта, надо лишь убедиться, что

$$\int (1+y^2)^\delta |h(x-y)|^2 dy \leqslant c(1+x^2)^\delta. \tag{49}$$

Далее, $(1+k^2)^{-\delta/2}$ имеет аналитическое продолжение H на $\{z \mid |\mathrm{Im}\, z| < 1\}$, которое удовлетворяет условию $\int |H(k+i\varkappa)|^2 dk < \infty$, так что, по принципу Пэли — Винера (см. теорему IX.13), $\int e^{2a|x|}|h(x)|^2 dx < \infty$ для всех достаточно малых a. В частности,

$$\int (1+x^2)^\delta |h(x)|^2 dx < \infty. \tag{50}$$

Так как $(1+y^2)^\delta \leqslant 2^\delta (1+|x-y|^2)^\delta (1+x^2)^\delta$, то (49) вытекает из (50). Следовательно, поскольку A и B оба суть операторы Гильберта—Шмидта, их произведение принадлежит $\mathcal{I}_1$. ∎

Дополнение 3 к § XI.3. Общий принцип инвариантности для волновых операторов

Развивая теорию Като—Бирмана, мы обнаружили замечательный принцип инвариантности (теорема XI.11) для волновых операторов. Можно задаться вопросом, не выполняется ли этот принцип инвариантности в более общих предположениях, чем принадлежность разности $A-B$ классу операторов со следом. Наша задача в этом дополнении состоит в том, чтобы доказать подобный результат при предположениях того типа, которые делаются в методе Кука.

Теорема XI.23. Пусть A и B — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и φ — такая функция на конечном интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$, что

(i) производная в смысле обобщенных функций φ'' принадлежит L^1 и $\varphi'(x) \geqslant \alpha > 0$ при всех $x \in (a, b)$.

(ii) Пусть I — компактный подынтервал в (a, b), а $\mathcal{D}$ — плотное подмножество в $E_I(B) P_{ac}(B)\mathcal{H}$, содержащееся в $\mathcal{M}(B)$ и такое, что для любого $u \in \mathcal{D}$ функция $w(t) = e^{iAt}e^{-iBt}u$ сильно дифференцируема и $\|w'(t)\| \subset L^1(\pm 1, \pm\infty) \cap L^2(\pm 1, \pm\infty)$, $|t|^\alpha \|w'(t)\| \in L^1(\pm 1, \pm\infty)$ при некотором $\alpha > 0$.

Тогда для любого $u \in \mathcal{D}$

$$\lim_{t \to \mp\infty} e^{i\varphi(A)t} e^{-i\varphi(B)t} u$$

существуют и равны $\Omega^\pm(A, B)u$.

В частности, предположим, что φ — допустимая функция на открытом множестве T, таком, что $\sigma(A), \sigma(B) \subset \overline{T}$, причем в каждой граничной точке T либо φ имеет конечный предел, либо ни A, ни B не имеют точечного спектра в этой точке. Тогда $\Omega^\pm(\varphi(A), \varphi(B))$ существуют и

$$\Omega^\pm(\varphi(A), \varphi(B)) = \Omega^\pm(A, B) E_{T_1}(B) + \Omega^\mp(A, B) E_{T_2}(B),$$

где T_1 (соответственно T_2) есть объединение тех интервалов, где $\varphi' > 0$ (соответственно $\varphi' < 0$).

Чтобы доказать эту теорему, надо построить теорию преобразования Фурье (слабо) измеримых $\mathcal{H}$-значных функций из $L^p(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ $(p < \infty)$. Простейшим образом это делается так. Обозначим через $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ пространство C^∞-функций из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{H}$, таких, что $\sup_\lambda \|(1+|\lambda|)^n D^\alpha f(\lambda)\| < \infty$ при всех α и n. Определим преобра-