Так как $(1+y^2)^\delta \leqslant 2^\delta (1+|x-y|^2)^\delta (1+x^2)^\delta$, то (49) вытекает из (50) Следовательно, поскольку A и B оба суть операторы Гильберта—Шмидта, их произведение принадлежит $\mathcal{J}_1$. ∎

Дополнение 3 к § XI.3. Общий принцип инвариантности для волновых операторов

Развивая теорию Като—Бирмана, мы обнаружили замечательный принцип инвариантности (теорема XI.11) для волновых операторов. Можно задаться вопросом, не выполняется ли этот принцип инвариантности в более общих предположениях, чем принадлежность разности $A-B$ классу операторов со следом. Наша задача в этом дополнении состоит в том, чтобы доказать подобный результат при предположениях того типа, которые делаются в методе Кука.

Теорема XI.23. Пусть A и B — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и φ — такая функция на конечном интервале $(a, b)\subset\mathbb{R}$, что

(i) производная в смысле обобщенных функций φ'' принадлежит L^1 и $\varphi'(x)\geqslant\alpha>0$ при всех $x\in(a, b)$.

(ii) Пусть I — компактный подынтервал в (a, b), а $\mathcal{D}$ — плотное подмножество в $E_I(B)P_{ac}(B)\mathcal{H}$, содержащееся в $\mathcal{M}(B)$ и такое, что для любого $u\in\mathcal{D}$ функция $w(t)=e^{iAt}e^{-iBt}u$ сильно дифференцируема и $\|w'(t)\|\subset L^1(\pm 1, \pm\infty)\cap L^2(\pm 1, \pm\infty)$, $|t|^\alpha\|w'(t)\|\in L^1(\pm 1, \pm\infty)$ при некотором $\alpha>0$.

Тогда для любого $u\in\mathcal{D}$

$$\lim_{t\to\mp\infty} e^{i\varphi(A)t}e^{-i\varphi(B)t}u$$

существуют и равны $\Omega^\pm(A, B)u$.

В частности, предположим, что φ — допустимая функция на открытом множестве T, таком, что $\sigma(A)$, $\sigma(B)\subset\overline{T}$, причем в каждой граничной точке T либо φ имеет конечный предел, либо ни A, ни B не имеют точечного спектра в этой точке. Тогда $\Omega^\pm(\varphi(A), \varphi(B))$ существуют и

$$\Omega^\pm(\varphi(A), \varphi(B))=\Omega^\pm(A, B)E_{T_1}(B)+\Omega^\mp(A, B)E_{T_2}(B),$$

где T_1 (соответственно T_2) есть объединение тех интервалов, где $\varphi'>0$ (соответственно $\varphi'<0$).

Чтобы доказать эту теорему, надо построить теорию преобразования Фурье (слабо) измеримых $\mathcal{H}$-значных функций из $L^p(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ $(p<\infty)$. Простейшим образом это делается так. Обозначим через $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ пространство C^∞-функций из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{H}$, таких, что $\sup\limits_\lambda\|(1+|\lambda|)^n D^\alpha f(\lambda)\|<\infty$ при всех α и n. Определим преобразование Фурье как слабый интеграл (напомним, что все векторнозначные интегралы в этих томах — это слабые интегралы):

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ik\lambda} f(\lambda)\, d\lambda \tag{51}$$

С помощью сопряжения операция $\hat{}$ распространяется на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}; \mathscr{H})$, а тем самым на $L^p(\mathbb{R}; \mathscr{H}) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}; \mathscr{H})$. В частности, выполняется теорема Планшереля. Действительно, реализуя $L^2(\mathbb{R}; \mathscr{H})$ как $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{H}$ (см § II.4), мы видим, что обобщенный фурье-образ есть не что иное, как $\mathscr{F} \otimes 1$. Более того, для $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathscr{H})$ равенство (51) выполняется поточечно.

Пусть $F \in L^1(\mathbb{R})$. Утверждается, что при любом $v \in \mathscr{H}$

$$\hat{F}(A)\, v = (2\pi)^{-1/2} \int F(\lambda)\, e^{-i\lambda A} v\, d\lambda \tag{52}$$

для любого самосопряженного оператора A. Действительно, (52) выполнено, если $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, и, следовательно, с помощью предельных переходов оно переносится и на $F \in L^1(\mathbb{R})$.

Фиксируем функцию $g \in C_0^\infty(a, b)$, такую, что $g = 1$ на I и $0 \leqslant g \leqslant 1$. Определим

$$G(t, s) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\eta - it\varphi(\eta)} g(\eta)\, d\eta.$$

Лемма 1. Пусть φ удовлетворяет условию (i) теоремы XI.23. Тогда:

(a) $G(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ при каждом фиксированном t;

(b) $G(t, s) \to 0$, когда $t \to \pm\infty$, при каждом фиксированном s;

(c) $c(t)^2 \equiv \int_{-\infty}^{0} |G(t, s)|^2\, ds \to 0$ при $t \to \infty$;

(d) при $v \in \mathscr{H}$ и самосопряженном A

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)\, e^{-isA} v\, ds = e^{-it\varphi(A)} g(A)\, v.$$

Доказательство. (a) Для каждого фиксированного t функция $G(t, \cdot)$ есть фурье-образ некоторой функции с компактным носителем и вторыми производными из L^1. Следовательно, $(1+t^2) \times G(t, \cdot) \in L^\infty$, так что $G(t, \cdot)$ заведомо принадлежит L^1.

(b) Очевидно, $|G(t, s)| \leqslant (2\pi)^{-1/2} \|g\|_1$, так что достаточно доказать (b) для g, являющейся суммой функций вида $e^{-is\eta} \chi_\Omega(\eta)\, \varphi'(\eta)$, которые плотны в $L^1(I)$. Для таких g результат доказывается легко.

(c) есть просто переформулировка леммы 3 (b) § 3, а (d) следует из (52). ∎

Лемма 2. Пусть $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ такова, что ее фурье-образ лежит в $L^1(\mathbb{R}; \mathcal{H})$, и пусть C самосопряжен. Пусть $G(t, s)$ такая же, как в лемме 1. Тогда интеграл

$$J_h(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)\, e^{-isC} h(s)\, ds$$

существует и

$$\lim_{t \to \pm\infty} \| J_h(t) \| = 0. \tag{53}$$

Доказательство. Так как $\hat{h} \in L^1$, то h принадлежит L^∞, так что нужный интеграл существует в силу леммы 1 (a). Пусть $v \in \mathcal{H}$. Тогда

$$(v, J_h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{G(t, s)}\, e^{+isC} v, h(s))\, ds =$$

$$= \int (e^{it\varphi(C-k)} g(C-k)\, v, \hat{h}(k))\, dk$$

в силу теоремы Планшереля и леммы 1 (d). Поэтому

$$\| J_h(t) \| \leqslant \| \hat{h} \|_{L^1}. \tag{54}$$

Вследствие (54) достаточно показать, что (53) выполняется для тотального подмножества $\hat{h}$ в L^1, так что рассмотрим случай $\hat{h}(k) = f(k)\, u$; $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{H}$. В этом случае $J_h(t) = F_t(C)\, u$, где

$$F_t(s) = \int f(k)\, e^{-it\varphi(s-k)} g(s-k)\, dk.$$

Далее, $\| F_t \|_\infty \leqslant \| f \|_1$ при всех t и $F_t(s) \to 0$ при каждом фиксированном s, когда $t \to \pm\infty$, в силу леммы 1 (b). Следовательно, по теореме VII.2 (d), $\underset{t \to \pm\infty}{\text{s-lim}}\, F_t(C) = 0$, и лемма доказана. ∎

Лемма 3. Пусть $h(t)$ — сильно дифференцируемая функция из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{H}$; предположим, что

(i) $\| h(t) \| \to 0$, когда $t \to \infty$;
(ii) $\| h'(t) \| \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$;
(iii) $|t|^\alpha \| h'(t) \| \in L^1(\mathbb{R})$ при некотором $\alpha > 0$.

Тогда $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{H})$.

Доказательство. Пусть G — фурье-образ h'. Тогда, по (ii) и (iii), $G \in L^\infty \cap L^2$ и $\| G(k) - G(l) \| \leqslant c_\theta |k - l|^\theta$ при $\theta = \min\{\alpha, 1\}$. По (i),

$$\int (v, h'(t))\, dt = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} (v, h'(t))\, dt = \lim_{a \to \infty} [(v, h(a)) - (v, h(-a))] = 0,$$

так что $G(0)=0$. Следовательно, $\|G(k)\| \leqslant c|k|^{\theta}$. Пусть $K(k) = (ik)^{-1} G(k)$. Тогда $\int\limits_{|k| \geqslant 1} |K(k)|\,dk < \infty$, так как k^{-1} и G обе принадлежат $L^2(\pm 1, \pm\infty)$. Более того, $\int\limits_{-1}^{+1} |K(k)|\,dk < \infty$, ибо $|K(k)| \leqslant C|k|^{\theta-1}$.

Доказательство было бы закончено, если бы мы показал , что $\check{K}=h$. Но $\check{K}$ и h имеют одинаковые производные, так что $\check{K}=h+v$, где v — некоторый постоянный вектор Так как $K \in L^1$, то $\check{K}(t) \to 0$ при $t \to \infty$ вследствие леммы Римана — Лебега, поэтому из условия (i) следует, что $v=0$. ∎

Доказательство теоремы XI.23. Фиксируем $u \in \mathscr{D}$ и положим

$$I(t) = e^{-it\varphi(A)}\Omega^{-}u - e^{-it\varphi(B)}u.$$

Нужно показать, что $I(t) \to 0$, когда $t \to \infty$. Пусть $w(t) = e^{iAt}e^{-iBt}u$ и $w_{-}=\Omega^{-}u$. Тогда, по лемме 1(d) и благодаря тому, что $g(B)u=u$, $g(A)\Omega^{-}u=\Omega^{-}g(B)u=\Omega^{-}u$, имеем

$$I(t) = (2\pi)^{-1/2}\int G(t, s)\, e^{-isA}[w_{-} - w(s)]\,ds.$$

Выберем положительные C^{∞}-функции K_0 и $K_{\pm}$ так, чтобы было $K_0 \in C_0^{\infty}$, $\operatorname{supp} K_{\pm} \subset [\pm 1, \pm\infty)$ и $K_{+}+K_{-}+K_0=(2\pi)^{-1/2}$. Тогда $I(t) = \sum\limits_{j=1}^{4} I_j(t)$, где

$$I_j(t) = \int K_{\alpha(j)}(s)\, G(t, s)\, e^{-isA}[w_{-} - w(s)]\,ds$$

для $j=1, 2$, причем $\alpha(1)=0$, $\alpha(2)=+$,

$$I_3(t) = \int K_{-}(s)\, G(t, s)\, e^{-isA}[w_{+} - w(s)]\,ds,$$

$$I_4(t) = \int K_{-}(s)\, G(t, s)\, e^{-isA}[w_{-} - w_{+}]\,ds,$$

причем $w_{+}=\Omega^{+}u$. По предположениям теоремы, а также по леммам 2 и 3, $I_2(t)$ и $I_3(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. Так как

$$|I_1(t)| \leqslant 2\|u\|(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{\operatorname{supp} K_0} |G(t, s)|\,ds,$$

то $I_1(t) \to 0$, когда $t \to \infty$, вследствие неравенства $|G(t, s)| \leqslant (2\pi)^{-1/2}\|g\|_1$, леммы 1(b) и теоремы о мажорированной сходимости.

Остается только показать, что $I_4(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Но, в силу леммы 1 § 3, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |(v, e^{-isB}u)|^2 \leqslant 2\pi |||u|||^2 \|v\|^2$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |(v, e^{-isA}w_{\pm})|^2\,ds \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |((\Omega^{\pm})^{*}v, e^{-isB}u)|^2\,ds \leqslant 2\pi\|v\|^2\, |||u|||^2.$$

Отсюда следует, что

$$\int |K_-(s)|^2 |(v, e^{-isA}(w_- - w_+))|^2 ds \leqslant \text{const} \|v\|^2,$$

поэтому $|I_4(t)| \leqslant \text{const}\, c(t)$, где $c(t)$ определена в лемме 1 (с). В силу этой леммы, $I_4(t) \to 0$. ∎

В большинстве случаев, когда реально нужна инвариантность волновых операторов (см. пример 1 (заново) в § 10 или пример 4 в § 11), предположения теории Като—Бирмана выполнены, а из них в качестве следствия уже вытекает инвариантность волновых операторов. Тем не менее теорема XI.23 интересна, так как она показывает, что принцип инвариантности может иметь место даже тогда, когда нет никаких сведений об асимптотической полноте.

Пример 1. Допустим, что выполнены условия теоремы XI.16, причем (45) заменено более сильным допущением

$$\int_{+1}^{\infty} t^{\alpha} \left(\int_{a<|x|<b} |V(xt)|^2 dx \right)^{1/2} dt < \infty.$$

Это условие, в частности, справедливо, если $|V(x)| \leqslant c|x|^{-1-\varepsilon}$ вблизи ∞ Тогда $\Omega^{\pm}(H^2, H_0^2)$ существуют.

Пример 2. Мы хотим применить принцип инвариантности для того, чтобы показать отсутствие релятивистских поправок для рассеяния электронов во внешнем магнитном поле (не обязательно постоянном), по крайней мере в том приближении, когда магнитный момент электрона полагается равным $e\hbar/mc$ (физическое значение этой величины отличается от этого примерно на 1% вследствие поправок, относимых за счет квантовой электродинамики). В единицах, в которых $\hbar = c = 1$, нерелятивистский гамильтониан уравнения Шредингера есть оператор

$$H_S(A) = \frac{(p - eA)^2}{2m} + \frac{e}{2m}(\sigma \cdot B),$$

действующий в $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$, где, как обычно, $p = -i\,\text{grad}$. Вектор σ состоит из спиновых матриц Паули

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

A есть магнитный векторный потенциал и $B = \text{rot}\, A$. Релятивистская теория описывается гамильтонианом Дирака

$$H_D(A) = \alpha \cdot (p - eA) + m\beta,$$

действующим в $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$. Если $\mathbb{C}^4$ реализовано в виде $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, то принятый выбор α, β таков

$$\alpha_i = \sigma_1 \otimes \sigma_i, \quad \beta = \sigma_3 \otimes 1.$$

Прямая элементарная формальная выкладка показывает, что

$$1 \otimes H_S(A) = (2m)^{-1}[H_D^2(A) - m^2].$$

Если A из C^1, причем A и ∇A ограничены, то эта формальная выкладка приводит к равенству на уровне самосопряженных операторов. Если, кроме того, $|A(r)| \leqslant C(1+r)^{-1-\varepsilon}$, то $\Omega^{\pm}(H_D(A), H_D(0))$ существуют, как можно установить методом стационарной фазы. Далее, если применим принцип инвариантности (теорема XI.23), то

$$\Omega^{\pm}(H_D(A), H_D(0)) = 1 \otimes \Omega^{\pm}(H_S(A), H_S(0)).$$

Тем самым продемонстрировано отсутствие релятивистских поправок к рассеянию, по крайней мере если рассеяние описывается в переменных координат и импульсов. Разумеется, если в описании участвуют асимптотические скорости или энергии, то не следует забывать о релятивистской кинематике.

XI.4. Квантовое рассеяние I: двухчастичный случай

Мы рассмотрим особенно подробно рассеяние в двухчастичной квантовой системе, или, что эквивалентно, рассеяние одной частицы во внешнем потенциале. Это наиболее тщательно изученный раздел теории рассеяния, и здесь существует множество разнообразных интересных результатов.

Гильбертово пространство системы двух частиц представимо в виде

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}^6),$$

а свободный гамильтониан равен

$$\tilde{H}_0 = -\frac{1}{2\mu_1}\Delta_1 - \frac{1}{2\mu_2}\Delta_2,$$

где Δ_i — трехмерный лапласиан по координате $\mathbf{r}_i$, причем $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$, а пара $\mathbf{r} = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$ — точка в $\mathbb{R}^6$. Гамильтониан со взаимодействием равен

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

где V — функция из $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Поэтому, согласно теореме Като (теорема X.16), $\tilde{H}$ самосопряжен в $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$. Позже мы наложим на V более жесткие ограничения.

Прежде всего произведем замену координат, чтобы отделить движение центра масс. Новыми координатами будут

$$\mathbf{R} = (\mu_1 + \mu_2)^{-1}(\mu_1\mathbf{r}_1 + \mu_2\mathbf{r}_2), \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Пусть U — унитарный оператор в $L^2(\mathbb{R}^6)$, заданный отображением

$$(Uf)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f((\mu_1 + \mu_2)^{-1}(\mu_1\mathbf{x} + \mu_2\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}),$$