Теорема XI.33. В предположениях теоремы XI.24

$$\underset{\mathbf{a}\to\infty}{\text{s-lim}}\, U_{\mathbf{a}}^{-1}\Omega^{\pm}U_{\mathbf{a}} = I, \quad \underset{\mathbf{a}\to\infty}{\text{s-lim}}\, U_{\mathbf{a}}^{-1}SU_{\mathbf{a}} = I,$$

где $U_{\mathbf{a}}$ — операторы, заданные соотношением $(U_{\mathbf{a}}f)(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}-\mathbf{a})$.

Доказательство. Мы докажем, что $\underset{a\to\infty}{\text{s-lim}}\, U_a^{-1}\Omega^{\pm}U_a = I$, откуда следует, что $\underset{a\to\infty}{\text{w-lim}}\, U_a^{-1}SU_a = I$. Поскольку $\|U_a SU_a^{-1}\| \leqslant 1$, из сла-

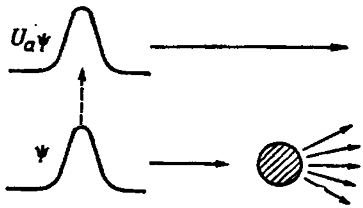


Рис. XI.5. Кластерное свойство.

бой сходимости вытекает сильная сходимость $\underset{a\to\infty}{\text{s-lim}}\, U_a^{-1}SU_a = I$.

Воспользовавшись $\varepsilon/3$-приемом, убедимся, что нужно только доказать равенство

$$\lim_{a\to\infty}\left(U_a^{-1}(\Omega^{\pm}-1)U_a\right)\varphi = 0$$

для всех $\varphi\in\mathscr{S}$. Для таких φ

$$U_a^{-1}(\Omega^{\pm}-1)U_a\varphi = \mp i\int_0^{\mp\infty}\left(U_a^{-1}e^{iHt}Ve^{-iH_0t}U_a\right)\varphi\,dt.$$

Пусть $F_a(t)$ обозначает $\|U_a^{-1}e^{iHt}Ve^{-iH_0t}U_a\varphi\|$. Легко проверить, что $F_a(t) = \|V_ae^{-iH_0t}\varphi\|$, где $V_a(r) = V(r+a)$. Рассматривая второе доказательство теоремы XI.24, видим, что $F_a(t)$ ограничена L^1-функцией от t равномерно по a, потому что L^p-норма V_a не зависит от a. По теореме о мажорированной сходимости достаточно, таким образом, показать, что $F_a(t)\to 0$ при любом фиксированном t. Так как e^{-iH_0t} оставляет $\mathscr{S}$ инвариантным, то нужно только показать, что $\lim_{a\to\infty}\|V_a\varphi\| = 0$ при всех $\varphi\in\mathscr{S}$, а это уже совсем просто. ∎

XI.5. Квантовое рассеяние II: случай N частиц

Теория рассеяния для квантовой системы N частиц сложна по двум причинам — кинематической и динамической. Кинематическая причина проявляется уже при $N=3$. До исключения центра масс в $\mathbb{R}^{3N}=\mathbb{R}^9$ существует естественная система координат $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$. Но если мы решили выбрать в качестве переменной $\mathbf{R}=(\mu_1+\mu_2+\mu_3)^{-1}(\mu_1\mathbf{r}_1+\mu_2\mathbf{r}_2+\mu_3\mathbf{r}_3)$, то для остальных шести координат никакого естественного выбора нет. Например, можно выбрать одну из пар $\langle\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}\rangle$, $\langle\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{23}\rangle$ или $\langle\mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}\rangle$, где $\mathbf{r}_{ij}=\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j$. Можно также сначала изменить координаты в системе 1, 2, перейдя к $\mathbf{R}_{12}=(\mu_1+\mu_2)^{-1}(\mu_1\mathbf{r}_1+\mu_2\mathbf{r}_2)$ и $\mathbf{r}_{12}$, а затем рассмотреть систему трех частиц, вводя координаты $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}_{12}$ и $\zeta_2=\mathbf{R}_{12}-\mathbf{r}_3$ (см. рис. XI.6). Суть в том, что на разных этапах

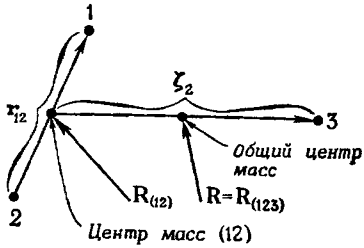


Рис. XI.6. Координаты Якоби $N=3$.

развития теории удобно пользоваться разными координатами, и обычно в процессе доказательства переходят от одних координат к другим. Конечно, это кинематическое усложнение доставляет много неудобств.

Динамические усложнения — это результат обилия разнообразных явлений рассеяния, возникающих уже в системе из трех тел. Допустим, что частицы 1 и 2 могут образовать связанное

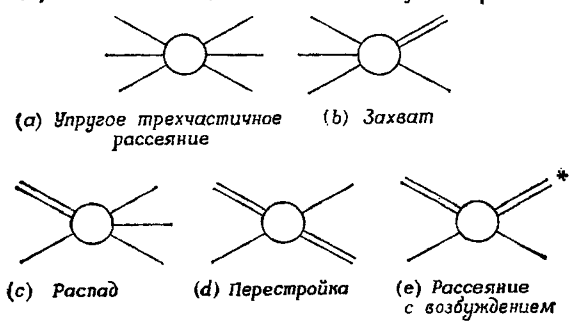


Рис. XI.7. Трехчастичные процессы рассеяния.

состояние. Тогда мы должны ожидать не только рассеяния «свободных» частиц 1, 2, 3 в свободные же частицы (упругое трехчастичное рассеяние), но и процессов захвата, когда сталкиваются «свободные» частицы 1, 2, 3, а выходят связанная пара частиц 1 и 2 и «свободная» частица 3. Эти процессы схематически показаны на рис. XI.7, (a) и (b). Подобным же образом следует рассмотреть **процессы распада** $(12)+3\to 1+2+3$ и **рассеяние с перестройкой** $(12)+3\to 1+(23)$, где (ij) представляет связанный кластер из частиц i и j. Если существует более чем одно связанное состояние частиц 1 и 2, например (12) и $(12)^*$, то надо еще включить **рассеяние с возбуждением** $(12)+3\to(12)^*+3$.

В трехчастичном случае мы должны сначала перечислить все связанные состояния (12), (23) и (13) и для каждого из этих связанных состояний b рассмотреть «канал рассеяния». Вместо состояний, которые асимптотически являются состояниями трех свободных частиц, мы рассмотрим состояния, асимптотически состоящие из частиц 1 и 2, связанных в состояние b, и частицы 3, движущейся свободно относительно (12). В случае N частиц мы должны рассмотреть разбиение на непересекающиеся подмножества $C_1, \ldots, C_k$ и канал рассеяния для каждой совокупности из k связанных состояний, отвечающих разбиению $C_1, \ldots, C_k$. Мы ожидаем переходов между этими каналами. Это усложнение весьма тонко и красиво.

Начнем с описания различных координатных систем. Рассмотрим гамильтонианы

$$\tilde{H}=-\sum_{i=1}^{N}(2\mu_i)^{-1}\Delta_i+\sum_{i<j}V_{ij}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j),\quad \tilde{H}_0=-\sum_{i=1}^{N}(2\mu_i)^{-1}\Delta_i$$

на пространстве $L^2(\mathbb{R}^{3N})$; пусть $\mathbf{r}=\langle\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N\rangle\in\mathbb{R}^{3N}$ и $-\Delta_i$ — лапласиан по переменным $\mathbf{r}_i$. Перейдем теперь к новым координатам: $\mathbf{R}=\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mu_i\mathbf{r}_i$ и еще $N-1$ 3-векторным координатам $\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}$. Потребуем, чтобы эти координаты удовлетворяли двум дополнительным условиям. Во-первых, для каждой пары $i\neq j$ разность $\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j$ должна быть линейной комбинацией переменных ξ_i. Во-вторых, дифференциальный оператор $\tilde{H}_0$, записанный в новых координатах, не должен содержать членов вида $\nabla_{\mathbf{R}}\cdot\nabla_{\xi_i}$. Фактически, как мы увидим, второе условие вытекает из первого. Такая система координат определяет разложение $L^2(\mathbb{R}^{3N})=L^2(\mathbb{R}^3)\otimes L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$ и тензорное разложение $\tilde{H}$ и $\tilde{H}_0$ в сумму

$$\tilde{H}=h_0\otimes 1+1\otimes H,\qquad \tilde{H}_0=h_0\otimes 1+1\otimes H_0,$$

где $h_0=-\left(2\sum_{i=1}^{N}\mu_i\right)^{-1}\Delta_{\mathbf{R}}$. Точный вид H зависит от системы координат, выбранной для $\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}$. Как и в двухчастичном случае, мы можем представлять себе замену координат или как иное описание того же самого оператора, или как унитарное преобразование. Мы примем первую точку зрения. Для некоторых замен координат якобиан будет ненулевой константой, отличной от 1, и потому его надо будет включать во внутреннее произведение.

Мы рассмотрим три специальных выбора координат.

Атомные координаты. Пусть $\eta_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_N$. Тогда

$$H_0 = -\sum_{i=1}^{N-1} (2m_{iN})^{-1} \Delta_i + \sum_{i<j} (\mu_N)^{-1} \nabla_i \cdot \nabla_j,$$

где $(m_{iN})^{-1} = \mu_i^{-1} + \mu_N^{-1}$, $\Delta_i = \Delta_{\eta_i}$ и $\nabla_i = \nabla_{\eta_i}$. Далее,

$$H = H_0 + \sum_{i=1}^{N-1} V_{iN}(\eta_i) + \sum_{i<j<N} V_{ij}(\eta_i - \eta_j).$$

В задаче 52(a) от читателя требуется провести необходимые выкладки. Как подсказывает само название, эта система координат особенно удобна в тех случаях, когда среди частиц имеется одна выделенная, как, например, в атомных ядрах, где ядро — такая выделенная частица. С дополнительными членами $\sum_{i<j} \mu_N^{-1} \nabla_i \cdot \nabla_j$ обычно бывает много мороки. Они называются членами **Юза — Эккарта.** Отметим, что $\bar{H}_0$ не содержит перекрестных членов между $\mathbf{R}$ и η_i. Отсюда следует, что для любого выбора ξ_i, удовлетворяющего первому из указанных выше требований, второе выполнено автоматически.

Координаты Якоби. Пусть

$$\zeta_i = \mathbf{r}_{i+1} - \left(\sum_{j\leqslant i} \mu_j\right)^{-1} \left(\sum_{j\leqslant i} \mu_j \mathbf{r}_j\right), \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

Тогда (задача 52b)

$$H_0 = -\sum_{i=1}^{N-1} (2\nu_i)^{-1} \Delta_{\zeta_i},$$

где $\nu_i^{-1} = \mu_{i+1}^{-1} + \left(\sum_{j\leqslant i} \mu_j\right)^{-1}$ и $H = H_0 + \sum_{i<j} V_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$, а $\mathbf{r}_{ij}$ есть краткое обозначение разности $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, выраженной через ζ_j; так, например,

$$\mathbf{r}_{41} = \zeta_3 + \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \zeta_2 + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \zeta_1.$$

Координаты Якоби получаются переходом сначала от $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$ к $\zeta_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{R}_{(12)} = (\mu_1 + \mu_2)^{-1} (\mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2)$, затем от $\langle \mathbf{R}_{(12)}, \mathbf{r}_3 \rangle$ к $\zeta_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{R}_{(12)}$ и $\mathbf{R}_{(123)} = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^{-1} [(\mu_1 + \mu_2) \mathbf{R}_{(12)} + \mu_3 \mathbf{r}_3]$ и т. д. (см рис. XI.6). На каждом шаге очередная пара переменных заменяется на координату двухчастичного центра масс и относительную координату. Так как в двухчастичной системе при переходе к переменной центра масс не возникает перекрестных членов, то в выписанном выше N-частичном H_0 нет членов Юза—Эккарта В этом преимущество координат Якоби. Их недостаток состоит в сложности выражений для $\mathbf{r}_{ij}$, хотя $\mathbf{r}_{12} = -\zeta_1$ просто. Вообще для всякой заданной перестановки $\langle i_1, \ldots, i_N\rangle$ исходного набора $\langle 1, \ldots, N\rangle$ существует ассоциированная с ней система координат Якоби, в которой $\mathbf{r}_{i_1 i_2}$ выражается просто.

Кластерные координаты Якоби. Последняя система координат, которую мы рассмотрим, особенно важна в теории рассеяния. Чтобы описать распад системы N частиц на связанные группы, введем формальные определения и обозначения, которые будут играть важную роль в этом разделе и в § XIII.5.

Определение. Разбиение D множества $\{1, \ldots, N\}$ на k неперекрывающихся подмножеств $C_1, \ldots, C_k$, объединение которых составляет $\{1, \ldots, N\}$, называется **кластерным разложением.** Если $D = \{C_1, \ldots, C_k\}$ — такое разбиение и i, j — два числа из $\{1, \ldots, N\}$, то будем писать iDj тогда и только тогда, когда i и j принадлежат одному кластеру C_l, и $\sim iDj$, когда они принадлежат разным кластерам. Символы $\sum\limits_{iDj}$ и $\sum\limits_{\sim iDj}$ обозначают суммы по тем парам $\langle i, j\rangle$ с $i < j$, которые удовлетворяют соответственно условию iDj или $\sim iDj$.

Определение. Пусть $D = \{C_l\}_{l=1}^{k}$ — кластерное разложение. Положим

$$\tilde{H}(C_l) = -\sum_{i \in C_l} (2\mu_i)^{-1} \Delta_i + \sum_{i<j,\ i,\ j \in C_l} V_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

Определим **гамильтониан** $H(C_l)$ **кластера** C_l как $\tilde{H}(C_l)$ за вычетом энергии движения его центра масс.

$H(C_l)$ есть оператор в $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$; он не зависит от координат в других кластерах, так что $H(C_l) = h_{C_l} \otimes 1$, если $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$ представлено в виде $L^2(\mathbb{R}^{3n_l-3}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{3N-3n_l})$, где n_l есть число элементов в C_l. Мы будем впредь пользоваться одним и тем же символом $H(C_l)$ как для оператора в $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$, так и для оператора в $L^2(\mathbb{R}^{3n_l-3})$, который мы выше обозначили h_{C_l}. Если мы захотим подчеркнуть, какой из операторов имеется в виду, то будем говорить о «$H(C_l)$ как операторе на $\mathcal{H}$» или о «$H(C_l)$ как операторе на $\mathcal{H}_{C_l}$», где $\mathcal{H}_{C_l}$ — пространство $L^2(\mathbb{R}^{3n_l-3})$ функций от внутренних координат кластера C_l.

Определение. Пусть $D = \{C_l\}_{l=1}^{k}$ — кластерное разложение. Определим **межкластерный потенциал** I_D посредством

$$I_D = \sum_{\sim iDj} V_{ij}.$$

Таким образом, I_D есть сумма взаимодействий между частицами в разных кластерах.

Определение. Пусть $D=\{C_l\}_{l=1}^k$ — кластерное разложение и $\tilde{H}_D=\tilde{H}-I_D=\sum_{k=1}^{l}\tilde{H}(C_l)$. Определим **кластерный гамильтониан** H_D как $\tilde{H}_D$ за вычетом энергии движения центра масс. Тогда

$$H_D=H-I_D.$$

Поскольку I_D зависит только от разностей координат r_i-r_j, на нем не сказывается отделение центра масс.

Заметим, что $H_D\neq\sum_{l=1}^{k}H(C_l)$; на самом деле $H_D=T_D+\sum_{l=1}^{k}H(C_l)$, где T_D — кинетическая энергия движения центров масс отдельных кластеров за вычетом энергии движения общего центра масс. Таким образом, в соответствии с разбиением $3N-3$ координат на k множеств внутренних координат кластеров $C_1,\ldots,C_k$ плюс множество $3(k-1)$ координат, описывающих относительное положение центров масс кластеров $\{C_l\}_{l=1}^k$, гильбертово пространство $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$ записывается в виде

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_D\otimes\mathcal{H}_{C_1}\otimes\mathcal{H}_{C_2}\otimes\ldots\otimes\mathcal{H}_{C_l},$$

причем

$$T_D=t_D\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1,$$
$$H(C_1)=1\otimes h_{C_1}\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H(C_l)=1\otimes 1\otimes\ldots\otimes h_{C_l}.$$

Кластерные координаты Якоби выбраны как раз так, чтобы упростить T_D. Чтобы получить эти координаты, перейдем сначала от $\langle\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N\rangle$ к

$$\left\langle\mathbf{R}_1,\ldots,\mathbf{R}_k,\ \xi_1^{(C_1)},\ldots,\xi_{n_1-1}^{(C_1)},\ldots,\xi_{n_k-1}^{(C_k)}\right\rangle,$$

где $\mathbf{R}_l=\left(\sum_{i\in C_l}\mu_i\right)^{-1}\sum_{i\in C_l}\mu_i\mathbf{r}_i$, а $\xi_1^{(C_l)},\ldots,\xi_{n_l-1}^{(C_l)}$ — координаты, которые вместе с $\mathbf{R}_l$ образуют множество координат кластера C_l. Например, можно фиксировать некоторое $j\in C_l$ и положить $\{\xi_m^{(C_l)}\}_{m=1}^{n_l-1}=\{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\}_{i\in C_l,\ i\neq j}$. Тогда $H(C_l)$ — дифференциальный оператор по переменным $\xi_m^{(C_l)}$. Следовательно,

$$\tilde{H}=\sum_{l=1}^{k}(-2m_{C_l})^{-1}\Delta_{R_l}+\sum_{l=1}^{k}H(C_l)+I_D,$$

где $m_{C_l} = \sum_{i \in C_l} \mu_i$. Будем далее рассматривать $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_k$ как множество переменных системы k частиц и выберем в качестве первых $k-1$ координат новой системы координаты Якоби $\{\zeta_l\}_{l=1}^{k-1}$ для $\langle \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_k \rangle$, в качестве следующих $N-k$ координат $\{\xi_m^{(C_l)}\}$, где $1 \leqslant m \leqslant n_l - 1$ и $1 \leqslant l \leqslant k$, и, наконец, в качестве последней координаты центр масс. Тогда

$$H_D = \sum_{l=1}^{k-1} (-2M_l)^{-1} \Delta_{\zeta_l} + \sum_{l=1}^{k} H(C_l),$$

где $M_l^{-1} = m_{C_{l+1}}^{-1} + \left(\sum_{h \leqslant l} m_{C_h} \right)^{-1}$. Так мы получаем систему координат, в которой H_D имеет очень простой вид. Отдельные члены в двух суммах выражаются через независимые координаты и, следовательно, коммутируют друг с другом. Заметим также, что если $i \in C_1$, $j \in C_2$, то $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = -\zeta_1 + \hat{\xi}_i^{(C_1)} - \hat{\xi}_j^{(C_2)}$, где $\hat{\xi}_i^{(C_l)}$ есть некоторая комбинация внутренних координат в C_l, которая дает расстояние от $\mathbf{r}_i$ до центра масс кластера C_l.

Чтобы проследить, как применяются эти определения, рассмотрим простейший нетривиальный пример.

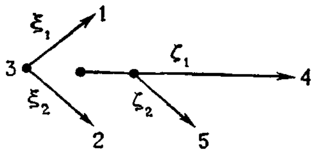


Рис. XI.8. Кластерные координаты Якоби, $N=5$.

Пример (кластерные координаты Якоби). Пусть $N=5$. Рассмотрим разбиение $D=\{C_1, C_2, C_3\}$, $C_1=\{1, 2, 3\}$, $C_2=\{4\}$, $C_3=\{5\}$. Тогда

$$\mathbf{R}_1 = (\mu_1+\mu_2+\mu_3)^{-1}(\mu_1\mathbf{r}_1+\mu_2\mathbf{r}_2+\mu_3\mathbf{r}_3),$$
$$\xi_1^{(C_1)} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \qquad \xi_2^{(C_1)} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3,$$
$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_4, \qquad \mathbf{R}_3 = \mathbf{r}_5, \qquad \zeta_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1,$$
$$\zeta_2 = \mathbf{R}_3 - (\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4)^{-1}[(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\mathbf{R}_1 + \mu_4\mathbf{R}_2].$$

Кластерными координатами Якоби будут $\langle \zeta_1, \zeta_2, \xi_1^{(C_1)}, \xi_2^{(C_1)} \rangle$, см. рис. XI.8. Для того чтобы увидеть, откуда появляется $\mathbf{r}_{ij}$ ($i \in C_1$, $j \in C_2$), заметим, что

$$\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3 = \zeta_1 + (\mu_1+\mu_2+\mu_3)^{-1}[\mu_1\xi_1^{(C_1)} + \mu_2\xi_2^{(C_1)}].$$

Закончив на этом обсуждение кинематики систем N частиц, обратимся к вопросам существования в теории рассеяния. Воспользуемся теми же техническими приемами, что и в случае двух частиц, но с учетом уже известных нам усложнений. Во-первых, за счет кинематики усложняются обозначения, и это потребует от читателя постоянного внимания; во-вторых, обилие различных явлений рассеяния заставит нас рассматривать не только $\underset{t\to\mp\infty}{\text{s-lim}}\, e^{iHt}e^{-iH_0t}$, но и много других объектов. В самом деле, допустим, что $\psi = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}\varphi$. Тогда $e^{-iHt}\psi$ стремится к $e^{-iH_0t}\varphi$ при $t\to+\infty$ и выглядит как состояние с N свободно движущимися частицами. Если мы хотим описать состояния, которые асимптотически выглядят как свободно движущиеся связанные кластеры $C_1, \ldots, C_k$, то нам нужно, чтобы $e^{-iHt}\psi$ имел вид $e^{-iAt}\psi$, где A описывает свободно движущиеся связанные кластеры. Значит, оператор A должен включать в себя силы, объединяющие частицы в кластеры, но не должен содержать сил, действующих между кластерами. Поэтому мы возьмем $A = H_D$, $D = \{C_1, \ldots, C_k\}$ и будем рассматривать некоторый определенный предел.

Определение. Пусть H — гамильтониан системы N частиц с отделенным движением центра масс. Пусть $D = \{C_1, \ldots, C_k\}$ — кластерное разложение множества $\{1, \ldots, N\}$. Если существуют $\Omega_D^{\pm} = \underset{t\to\mp\infty}{\text{s-lim}}\, e^{iHt}e^{-iH_Dt}$, то будем говорить, что существуют **кластерные волновые операторы канала.**

Теорема XI.34 (теорема Хака). Пусть

$$H = \sum_{i=1}^{N-1}(-2\mu_i)^{-1}\Delta_i + \sum_{i<j} V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}),$$

причем $V_{ij}\in L^2(\mathbb{R}^3)+L^p(\mathbb{R}^3)$ с $2<p<3$ для всех i, j. Тогда кластерные волновые операторы канала $\Omega_D^{\pm}$ существуют для каждого кластерного разложения D.

Доказательство. Основная схема доказательства в точности повторяет второе доказательство теоремы XI.24. Выберем систему кластерных координат Якоби $\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}$; $\xi_1^{(C_1)}, \ldots, \xi_{n_1-1}^{(C_1)}, \ldots$ $\ldots, \xi_{n_k-1}^{(C_k)}$, где $\{\xi^{(C_l)}\}$ — семейство внутренних координат кластера C_l и $\{\zeta\}$ — координаты Якоби движения центров масс кластеров. Рассмотрим множество

$$\mathcal{D}_D = \{\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1})\,\eta_1(\xi^{(C_1)})\ldots\eta_k(\xi^{(C_k)}) \mid \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3k-3}) \text{ и } \eta_l \in D(H(C_l)),\ \ \|\eta_l\| = 1\}.$$

Конечные линейные комбинации векторов из $\mathscr{D}_D$ плотны, так что достаточно доказать, что $\lim\limits_{t\to\mp\infty} e^{+iHt}e^{-iH_Dt}\psi$ существует для всех $\psi\in\mathscr{D}_D$.

Согласно методу Кука, нужно доказать, что

$$\left\|\frac{d}{dt}\left(e^{+iHt}e^{-iH_Dt}\psi\right)\right\|=\|I_De^{-iH_Dt}\psi\|$$

принадлежит $L^1(\pm1, \pm\infty)$ при всех $\psi\in\mathscr{D}_D$. Так как I_D—конечная сумма, достаточно показать, что $\|V_{ij}e^{-iH_Dt}\psi\|\in L^1(\pm1, \pm\infty)$ при всех i и j, таких, что $\sim iDj$. Поскольку каждый V_{ij} есть сумма двух членов, одного из L^2 и другого из L^r, можно считать, что V_{ij} лежит либо в L^2, либо в L^r $(2<r<3)$, и воспользоваться неравенством треугольника для оценки всей суммы. При данных i, j мы выберем такие координаты Якоби, чтобы было $\zeta_1=R_a-R_b$, где $i\in C_a$, $j\in C_b$ Так как изменение координат Якоби, отвечающих набору $\langle R_1, \ldots, R_k\rangle$, за счет изменения порядка оставляет $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{3k-3})$ инвариантным, то не возникает трудностей в связи с тем, что нам приходится изменять смысл ζ_l, когда мы меняем i и j.

Заметим далее, что отдельные члены в

$$H_D=\sum_{l=1}^{k-1}(-2M_l)^{-1}\Delta_l+\sum_{l=1}^{k}H(C_l)$$

коммутируют, так что

$$e^{-itH_D}=\left(\prod_{l=1}^{k-1}e^{+it\,(2M_l)^{-1}\Delta_l}\right)\prod_{l=1}^{k}e^{-itH\,(C_l)}.$$

Далее, V_{ij} зависит лишь от ζ_1 и внутренних координат C_1, C_2, так что V_{ij} коммутирует с $e^{is\Delta_l}$, $l\neq1$, и с $e^{-itH\,(C_l)}$, $l\neq1, 2$. Таким образом,

$$\|V_{ij}e^{-itH_D}\psi\|=\left\|V_{ij}(e^{is\Delta_1}\varphi)(\eta_{1,\,t})(\eta_{2,\,t})\prod_{l=3}^{k}\eta^{(C_l)}\right\|,$$

где $s=t\,(2M_1)^{-1}$, и $\eta_{l,\,t}=e^{-iH(C_l)t}\eta_l$. Потенциал V_{ij} зависит только от ζ_1 и внутренних координат из C_1 и C_2, так что

$$\|V_{ij}e^{-itH_D}\psi\|=\|V_{ij}(e^{is\Delta_1}\varphi)(\eta_{1,\,t})(\eta_{2,\,t})\|_{C_1,\,C_2;\,\zeta},$$

где символ $\|\cdot\|_{C_1,\,C_2;\,\zeta}$ обозначает L^2-норму с интегрированием по переменным $\xi^{(C_1)}$, $\xi^{(C_2)}$ и ζ. Следовательно,

$$\|V_{ij}e^{-itH_D}\psi\|^2=\int F(\zeta_2, \ldots, \zeta_{k-1};\, t)\,d\zeta_2\ldots d\zeta_{k-1},$$

где

$$F(\zeta_2, \ldots, \zeta_{k-1}; t) = \int |V_{ij}^{(t)}(\zeta_1)|^2 \, |e^{is\Delta_1}\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1})|^2 \, d\zeta_1,$$

$$|V_{ij}^{(t)}(\zeta_1)|^2 = \int |\eta_{1,t}(\xi_1^{(C_1)})|^2 \, |\eta_{2,t}(\xi_1^{(C_2)})|^2 \, |V_{ij}(\zeta_1 - \xi_i^{(C_1)} - \xi_j^{(C_2)})|^2 \times \\ \times d\xi^{(C_1)} \, d\xi^{(C_2)}.$$

Если мы проделаем в последнем интеграле все интегрирования по $\xi^{(C_1)}$, $\xi^{(C_2)}$, кроме интегрирования по $\xi_i^{(C_1)} + \xi_j^{(C_2)}$, то увидим, что $|V_{ij}^{(t)}|^2$ есть свертка $|V_{ij}|^2 \in L^{r/2}$ с функцией из L^1 с L^1-нормой $(\|\eta_{1,t}\|_2 \|\eta_{2,t}\|_2)^2 = 1$. Следовательно, по неравенству Юнга, $\|V_{ij}^{(t)}\|_r \leqslant \leqslant \|V_{ij}\|_r$. В результате этой оценки и расплывания волнового пакета, обусловленного действием оператора $e^{is\Delta_1}$, заключаем, что

$$0 \leqslant F(\zeta_2, \ldots, \zeta_{k-1}) \leqslant \|V_{ij}^{(t)}\|_r^2 (s^{-3/2+3/p})^2 \int |\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1})|^2 \, d\zeta_1,$$

где p задается в теореме XI.24 и, в частности, $p > 6$. Наконец, заключаем, что

$$\|V_{ij} e^{-iHt}\psi\|^2 \leqslant [\|V_{ij}\|_r \, s^{-3/2+3/p} \|\varphi\|_2]^2,$$

и, следовательно, $\|V_{ij} e^{-itH}\psi\| \in L^1(\pm 1, \pm\infty)$. Этим завершается доказательство ▮

Главная особенность приведенного доказательства состоит в том, что в нем вопрос о существовании для случая N частиц сводится к тем же оценкам, которые употреблялись в двухчастичном случае. Пользуясь свойствами форм, рассмотренными при доказательстве теоремы XI.26, и вариантом метода Кука на языке форм (теорема XI.6), легко получаем следующий результат.

Теорема XI.35. Пусть

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} (-2\mu_i)^{-1} \Delta_i + \sum_{i<j} V_{ij}(r_{ij})$$

в $L^2(\mathbb{R}^{(N-1)n})$. Допустим, что каждый V_{ij} удовлетворяет условию

$$(1 + |r|^2)^{1/2+\varepsilon} V_{ij}(r) \in L^p(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

где $p = n/2$ при $n \geqslant 3$, $p = 1$ при $n = 1$ и $p > 1$ при $n = 2$. Тогда кластерные волновые операторы каналов $\Omega_D^{\pm}$ существуют для каждого кластерного разложения D.

Теперь мы знаем, что $\Omega_D^{\pm}$ существуют, и хотим построить состояния рассеяния. Не всякая функция $\psi = \Omega_D^- \varkappa$ описывает состояние, которое по мере стремления t к ∞ приближается к системе $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ связанных кластеров, свободно движущихся друг относительно друга. Все, что нам известно,— это стремление состояний $e^{-iHt}\psi$ к $e^{-iH_D t}\varkappa$. Но $\operatorname{s-lim}_{t\to\infty} e^{+iH_D t}e^{-iH_0 t}$ существует, поэтому если $\varkappa=\lim_{t\to\infty} e^{iH_D t}e^{-iH_0 t}\eta$, то $e^{-iHt}\psi$ и $e^{-iH_0 t}\eta$ при $t\to\infty$ тоже выглядят одинаково. Суть дела в том, что, для того чтобы ψ при $t\to\infty$ имела вид связанных кластеров, условия $e^{-itH}\psi-e^{-itH_D}\varkappa\to 0$ при произвольной $\varkappa$ еще недостаточно. Надо, чтобы $\varkappa$ имела вид $\varkappa(\zeta, \xi^{(C_1)}, \ldots, \xi^{(C_k)}) = \varphi(\zeta)\,\eta_1(\xi^{(C_1)})\ldots\eta_k(\xi^{(C_k)})$, где каждое η_l есть связанное состояние гамильтониана $H(C_l)$. Мы приходим таким путем к следующему определению.

Определение. Канал есть кластерное разложение $D=\{C_1, \ldots, C_k\}$ вместе с такими функциями $\eta_l\in\mathscr{H}_l$, что каждая из них есть собственная функция $H(C_l)$ с собственным значением E_l. Для обозначения каналов мы будем пользоваться символами α, β, ... и будем иногда писать

$$\alpha=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_k \\ \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_k \end{pmatrix}.$$

Собственные значения $E_1, \ldots, E_k$ будем обозначать $\{E_l^{(\alpha)}\}_{l=1}^k$ и называть собственными энергиями канала. Кластерное разложение D, соответствующее каналу α, будет обозначаться $D(\alpha)$.

Два канала, в которых η_l различаются только на комплексные множители, не считаются разными. Таким образом, точнее следовало бы определить канал как кластерное разложение с «лучами собственных функций». Если C_l содержит только одну частицу, то мы пишем $\mathscr{H}_{C_l}=\mathbb{C}$ (нет внутренних координат), $H(C_l)\equiv 0$, η_l есть $1\in\mathbb{C}$ и $E_l^{(\alpha)}=0$.

Важное предписание. Перечисляя все каналы $\alpha=\begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_k \\ \eta_1 & \ldots & \eta_k \end{pmatrix}$ в случае, если какой-либо $H(C_l)$ имеет вырожденные собственные значения, мы сначала должны сделать некоторый предварительный выбор. Конкретно, если E_0 есть собственное значение $H(C_l)$ с кратностью n, следует сначала выбрать n ортонормированных функций из $\{\eta \mid H(C_l)\eta=E_0\eta\}$, а затем потребовать, чтобы для любого α, для которого $E_l^{(\alpha)}=E_0$, η_l была одной из этих n функций. Таким образом, если α и β — разные каналы, то либо $D(\alpha)\neq D(\beta)$, либо $D(\alpha)=D(\beta)$ и найдется такое l, что $\eta_l^{(\alpha)}$ ортогональна к $\eta_l^{(\beta)}$.

Определение. Пусть α — некоторый канал. Выберем кластерные координаты Якоби для разложения $D(\alpha)$, скажем $\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1},$

$\xi_1^{(C_1)}, \ldots, \xi_{n_k-1}^{(C_k)}\rangle$. Назовем $\mathscr{H}_\alpha = L^2(\mathbb{R}^{3k-3})$ гильбертовым пространством канала и определим **вложение канала** $\mathscr{T}_\alpha$: $\mathscr{H}_\alpha \to \mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$ равенством

$$(\mathscr{T}_\alpha\varphi)(\zeta, \xi^{(C_l)}) = \varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}) \prod_{l=1}^{k} \eta_l(\xi^{(C_l)}).$$

Волновые операторы канала $\Omega_\alpha^\pm$: $\mathscr{H}_\alpha \to \mathscr{H}$ определим как

$$\Omega_\alpha^\pm = \Omega_{D(\alpha)}^\pm \mathscr{T}_\alpha.$$

Гамильтониан канала H_α на $\mathscr{H}_\alpha$ определим как

$$H_\alpha = H_\alpha^{(0)} + \sum_{l=1}^{k} E_l^{(\alpha)},$$

где $H_\alpha^{(0)} = \sum_{l=1}^{k-1} (-2M_l)^{-1} \Delta_l$ в координатах Якоби.

Волновые операторы $\Omega_\alpha^\pm$ имеют простую непосредственную физическую интерпретацию. Действительно, если $\psi = \Omega_\alpha^\pm\varphi$, то $e^{-iHt}\psi$ приближается к $(e^{-iH_\alpha^{(0)}t}\varphi)\left(\prod_{l=1}^{k} e^{-itE_l^{(\alpha)}}\eta_l\right)$, когда $t \to \mp\infty$. Но это есть в точности волновая функция связанных кластеров η_l, свободно движущихся друг относительно друга. При такой физической интерпретации мы ожидаем, что $\operatorname{Ran}\Omega_\alpha^\pm$ ортогональны к $\operatorname{Ran}\Omega_\beta^\pm$. Таким образом мы избегаем многократного учета асимптотических состояний, входящих в $\{\operatorname{Ran}\Omega_D^\pm\}$. Прежде чем доказывать, что $\operatorname{Ran}\Omega_\alpha^\pm$ и $\operatorname{Ran}\Omega_\beta^\pm$ ортогональны при $\alpha \neq \beta$, мы скомбинируем эти каналы удобным образом.

Определение. Пусть $\mathscr{C}$ — совокупность всех каналов с учетом сделанного выше предписания, если некоторый $H(C_l)$ имеет вырожденное собственное значение. Определим: **асимптотическое гильбертово пространство** $\mathscr{H}_{\text{asym}} = \bigoplus_{\alpha\in\mathscr{C}} \mathscr{H}_\alpha$, **«свободный» гамильтониан** $H_{\text{asym}} = \bigoplus_{\alpha\in\mathscr{C}} H_\alpha$ на $\mathscr{H}_{\text{asym}}$, **преобразование вложения** $\mathscr{T}$: $\mathscr{H}_{\text{asym}} \to \mathscr{H}$, $\mathscr{T} = \bigoplus_{\alpha\in\mathscr{C}} \mathscr{T}_\alpha$, и **волновые операторы** $\Omega^\pm$: $\mathscr{H}_{\text{asym}} \to \mathscr{H}$, $\Omega^\pm = \bigoplus_{\alpha\in\mathscr{C}} \Omega_\alpha^\pm$. Пусть $\mathscr{H}_\pm = \operatorname{Ran}\Omega^\pm$.

Теорема XI.36. Допустим, что волновые операторы каналов существуют. Тогда:

(а) $$\Omega^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{iHt}\mathscr{T}e^{-iH_{\text{asym}}t};$$

(b) (ортогональность каналов) если $\alpha \neq \beta$, то $\operatorname{Ran}\Omega_\alpha^\pm$ ортогональны к $\operatorname{Ran}\Omega_\beta^\pm$;
(c) $\Omega^\pm$ суть изометрические отображения из $\mathcal{H}_{\text{asym}}$ в $\mathcal{H}$;
(d) $e^{iHt}\Omega^\pm = \Omega^\pm e^{iH_{\text{asym}}t}$;
(e) $\mathcal{H}_\pm \subset \mathcal{H}_{\text{ac}}(H)$.

Доказательство (a) является прямым следствием того, что $e^{-iH_{D(\alpha)}t}\mathcal{J}_\alpha = \mathcal{J}_\alpha e^{-iH_\alpha t}$.

(b) Пусть $\varphi_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$, $\varphi_\beta \in \mathcal{H}_\beta$. Тогда $\Omega_\alpha^\pm \varphi_\alpha = \underset{t \to \mp\infty}{\text{s-lim}}\, e^{iHt}\mathcal{J}_\alpha e^{-iH_\alpha t}\varphi_\alpha$ и так же для φ_β. Следовательно, поскольку e^{+iHt} унитарен, достаточно доказать, что $\lim\limits_{t \to \mp\infty} (\mathcal{J}_\alpha e^{-iH_\alpha t}\varphi_\alpha, \mathcal{J}_\beta e^{-iH_\beta t}\varphi_\beta) = 0$, для того чтобы заключить, что $(\Omega_\alpha^\pm \varphi_\alpha, \Omega_\beta^\pm \varphi_\beta) = 0$. Рассмотрим по отдельности случаи $D(\alpha) = D(\beta)$ и $D(\alpha) \neq D(\beta)$. Допустим сначала, что $D(\alpha) = D(\beta)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{J}_\alpha e^{-iH_\alpha t}\varphi_\alpha, \mathcal{J}_\beta e^{-iH_\beta t}\varphi_\beta) &= (e^{-iH_{D(\alpha)}t}\mathcal{J}_\alpha\varphi_\alpha, e^{-iH_{D(\beta)}t}\mathcal{J}_\beta\varphi_\beta) = \\
&= (\mathcal{J}_\alpha\varphi_\alpha, \mathcal{J}_\beta\varphi_\beta) = \left(\varphi_\alpha \prod_{l=1}^{k} \eta_l^{(\alpha)}, \varphi_\beta \prod_{l=1}^{k} \eta_l^{(\beta)}\right) = \\
&= (\varphi_\alpha, \varphi_\beta) \left[\prod_{l=1}^{k} (\eta_l^{(\alpha)}, \eta_l^{(\beta)})\right] = 0,
\end{aligned}
$$

поскольку $(\eta_l^{(\alpha)}, \eta_l^{(\beta)}) = 0$ при некотором l в соответствии с нашим предписанием.

Будем теперь считать, что $D(\alpha) \neq D(\beta)$. Пусть $E = \sum\limits_{l=1}^{k_\beta} E_l^{(\beta)} - \sum\limits_{l=1}^{k_\alpha} E_l^{(\alpha)}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{J}_\alpha e^{-itH_\alpha}\varphi_\alpha, \mathcal{J}_\beta e^{-itH_\beta}\varphi_\beta) &= e^{-itE}(\mathcal{J}_\alpha e^{-itH_\alpha(0)}\varphi_\alpha, \mathcal{J}_\beta e^{-itH_\beta(0)}\varphi_\beta) = \\
&= e^{-itE}(\mathcal{J}_\alpha\varphi_\alpha, e^{-it[H_\beta(0) - H_\alpha(0)]}\mathcal{J}_\beta\varphi_\beta).
\end{aligned}
$$

$H_\beta(0) - H_\alpha(0) \neq 0$, так как $D(\alpha) \neq D(\beta)$. Если перейти к фурье-образам, то $H_\beta(0) - H_\alpha(0)$ будет умножением на некоторую функцию $f_{\alpha\beta}(p)$, являющуюся квадратичной формой по p и потому в некоторой системе координат имеющую вид $f_{\alpha\beta}(p) = \sum\limits_{i=1}^{3N-3} a_i p_i^2$ с какими-то $a_i \neq 0$. Перенумеруем p_i так, чтобы было $a_1, \ldots, a_m \neq 0$; $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = 0$. Пусть ψ_1 и ψ_2 принадлежат $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3N-3})$. Тогда вследствие (IX.31)

$$
\begin{aligned}
(\psi_1, e^{-it(H_\beta(0) - H_\alpha(0))}\psi_2) &= \\
&= \int \overline{\psi_1(x_1, \ldots, x_m, z_{m+1}, \ldots, z_{3N-3})}\, K(x, y) \times \\
&\quad \times \psi_2(y_1, \ldots, y_m, z_{m+1}, \ldots, z_{3N-3})\, d^m x\, d^m y\, d^{3N-3-m} z,
\end{aligned}
$$

где

$$K(x, y) = (-1)^\sigma t^{-m/2} (2\pi i)^{-m/2} \prod_{i=1}^{m} |a_i|^{-1/2} \exp(i\,|x_i - y_i|^2/4a_i t)$$

и σ зависит от числа отрицательных a_i.

Из-за множителя $t^{-m/2}$ величина $(\psi_1, e^{-it(H_\beta(0)-H_\alpha(0))}\psi_2) \to 0$ при $t \to \infty$. С помощью $\varepsilon/3$-приема убеждаемся, что $(\psi_1, e^{-it(H_\beta(0)-H_\alpha(0))}\psi_2) \to 0$ при всех ψ_1, ψ_2 и, в частности, $(\mathscr{T}_\alpha\varphi_\alpha, e^{-it(H_\beta(0)-H_\alpha(0))}\mathscr{T}_\beta\varphi_\beta) \to 0$. Это доказывает ортогональность каналов.

(c) Пусть $\psi \in \mathscr{H}_{\text{asym}}$. Тогда $\Omega^\pm\psi = \sum_\alpha \Omega_\alpha^\pm \psi_\alpha$. Так как $\Omega_\alpha^\pm\psi_\alpha$ ортогональны друг другу, то

$$\|\Omega^\pm\psi\|^2 = \sum_\alpha \|\Omega_\alpha^\pm\psi_\alpha\|^2 = \sum_\alpha \|\Omega_{D(\alpha)}^\pm \mathscr{T}_\alpha \psi_\alpha\|^2 = \sum_\alpha \|\psi_\alpha\|^2 = \|\psi\|^2,$$

где мы воспользовались тем, что все $\mathscr{T}_\alpha$ и все $\Omega_\alpha^\pm$ изометричны.

(d) и (e) доказываются как в двухчастичном случае. ∎

Заметим, что преобразование $\mathscr{T}$ неизометрично, так как $\operatorname{Ran}\mathscr{T}_\alpha$ неортогональны друг другу. Например, $\operatorname{Ran}\mathscr{T}_\alpha = \mathscr{H}$, если α — единственный канал с $D(\alpha) = \{\{1\}, \ldots, \{N\}\}$. Доказательство изометричности $\Omega^\pm$ существенно опиралось на то, что $\operatorname{Ran}\Omega_\alpha^\pm$ ортогональны к $\operatorname{Ran}\Omega_\beta^\pm$ при $\alpha \neq \beta$. Это в свою очередь следует главным образом из того, что $\lim_{t\to\pm\infty} \|\mathscr{T} e^{-iH_{\text{asym}}t}\psi\| = \|\psi\|$ для всех ψ, что было доказано выше в пункте (b).

Определим теперь S-оператор.

Определение. Пусть S: $\mathscr{H}_{\text{asym}} \to \mathscr{H}_{\text{asym}}$ есть оператор $S = (\Omega^-)^*\Omega^+$. Он называется **S-оператором, S-матрицей, или оператором рассеяния.** Мы определим также $S_{\alpha\beta}$: $\mathscr{H}_\beta \to \mathscr{H}_\alpha$, полагая $S_{\alpha\beta} = (\Omega_\alpha^-)^*\Omega_\beta^+$, так что $S = \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta}$.

Например, положим $N = 3$ и допустим, что β — единственный канал с $D(\beta) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, а α — канал $D(\alpha) = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$. Тогда $S_{\alpha\beta}$ описывает процесс захвата, а $S_{\beta\alpha}$ — распада.

Введем обычное

Определение. Если $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \operatorname{Ran}\Omega^- = \mathscr{H}_{\text{ac}}(H)$, будем говорить, что рассеяние для системы N тел **полно.**

С помощью довольно сложных методов может быть доказана следующая

Теорема XI.37. Пусть $N=3$, $\tilde{H}=\sum_{i=1}^{3}(-2m_i)^{-1}\Delta_i+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}V_{ij}$. Допустим, что

(i) каждый V_{ij} удовлетворяет условию $V_{ij}\in L^{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)\cap L^{3/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ и $(1+|x|)^{2+\varepsilon}V_{ij}\in L^2+L^\infty$ (грубо говоря, мы требуем, чтобы $V_{ij}(x)$ убывала как $|x|^{-2-\varepsilon}$);

(ii) никакая двухчастичная подсистема не имеет «резонанса или связанного состояния с нулевой энергией» в следующем точном смысле. Пусть $\mu_{ij}=(m_i^{-1}+m_j^{-1})^{-1}$. Пусть $k_{ij}(\lambda)=-(2\mu_{ij})^{-1}\Delta+\lambda V_{ij}(x)$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда размерность спектрального проектора на $(-\infty, 0)$ для $k_{ij}(\lambda)$ не зависит от λ для $|\lambda-1|<\delta$ с некоторым $\delta>0$. Более того, ни один $k_{ij}(1)$ не имеет положительных собственных значений.

Тогда $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-=\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H)$.

Для некоторых систем N частиц с единственным каналом (т. е. для систем, не имеющих связанных состояний с гамильтонианом $H(C)$) полнота доказана; см. теорему XIII.27 для слабой связи и теорему XIII.32 для потенциалов отталкивания.

Кажется весьма правдоподобным, что методы § 17 будут обобщены и позволят доказать достаточно сильные результаты об асимптотической полноте для многочастичных гамильтонианов.

Есть, наконец, еще одна тема в рассеянии N частиц, которую мы хотим здесь рассмотреть. Это так называемые кластерные свойства оператора $\Omega^\pm$ и определение «связной части» S-матрицы. Кластерные свойства играют главную роль в дальнейшем развитии теории рассеяния N частиц, особенно в физической литературе. Но мы хотим предупредить читателя, что технические детали здесь крайне сложны и, в сущности, их можно опустить, так как мы не собираемся к этому возвращаться в дальнейшем. Кластерные свойства проще выразить, если не выделять движение центра масс. Поэтому введем следующие определения:

$$\tilde{\mathscr{H}}=L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathscr{H},\quad \tilde{\mathscr{H}}_{\mathrm{asym}}=L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathscr{H}_{\mathrm{asym}},$$
$$\tilde{\Omega}_D^\pm=1\otimes\Omega_D^\pm,\quad \tilde{\Omega}_\alpha^\pm=1\otimes\Omega_\alpha^\pm,\quad \tilde{S}=1\otimes S,\quad \tilde{\mathscr{T}}_\alpha=1\otimes\mathscr{T}_\alpha,$$
$$\tilde{H}=h_0^{\mathrm{CM}}\otimes 1+1\otimes H,\quad \tilde{H}_{\mathrm{asym}}=h_0^{\mathrm{CM}}\otimes 1+1\otimes H_{\mathrm{asym}}.$$

Пусть $i\in\{1, \ldots, N\}$, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$. Определим $U^i(\mathbf{a})$ на $\tilde{\mathscr{H}}$ равенством

$$(U^i(\mathbf{a})f)(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)=f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i-\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

Для данного разбиения $D=\{C_1, \ldots, C_k\}$ и данных $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\in\mathbb{R}^3$ определим $U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ на $\tilde{\mathscr{H}}$, полагая

$$U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)=\Big(\prod_{i\in C_1}U^i(\mathbf{a}_1)\Big)\Big(\prod_{i\in C_2}U^i(\mathbf{a}_2)\Big)\cdots\Big(\prod_{i\in C_k}U^i(\mathbf{a}_k)\Big).$$

Таким образом, $U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ сдвигает кластеры друг относительно друга. Чтобы сформулировать основной технический результат, а затем дать его интерпретацию, нам потребуются еще некоторые понятия.

Определение. Пусть $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ — два кластерных разложения. Будем говорить, что $D^{(2)}$ есть **измельчение** $D^{(1)}$, и писать $D^{(1)} \lhd D^{(2)}$, если каждый элемент $C_l^{(2)} \in D^{(2)}$ является подмножеством некоторого $C_j^{(1)} \in D^{(1)}$.

Таким образом, D_2 есть измельчение D_1, если каждый кластер в D_1 может быть получен объединением одного или нескольких кластеров в D_2. Мы пишем $D_1 \lhd D_2$, чтобы указать, что некоторые из множеств в D_2 объединяются и образуют множества в D_1.

Если D — некоторое кластерное разложение, то ему соответствует естественное разложение $\tilde{\mathscr{H}}$ в тензорное произведение $\bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\mathscr{H}}_{C_l}$, где $\tilde{\mathscr{H}}_{C_l}$ — пространство функций от координат $\{\mathbf{r}_i \mid i \in C_l\}$. Допустим, что $D \lhd D'$. Тогда D' индуцирует в каждом $C_l \in D$ кластерное разложение D'_l — семейство элементов из D', содержащихся в C_l. В этом случае мы будем в качестве кластерного волнового оператора канала вводить оператор $\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l}$ на пространстве $\tilde{\mathscr{H}}_{C_l}$, отвечающий разбиению D'_l кластера C_l. Таким образом,

$$\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l} = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} \exp(it\tilde{H}(C_l)) \exp\Bigl(-it \sum_{C'_j \subset C_l} \tilde{H}(C'_j)\Bigr).$$

Теорема XI.38. Пусть $V_{ij} \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^r(\mathbb{R}^3)$, $2 < r < 3$.

(a) Если $D \lhd D'$, то

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\min |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty \\ i \neq j}} U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)^{-1} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'} U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l}.$$

(b) Если $D \lhd D'$, то

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\min |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty \\ i \neq j}} U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)^{-1} (\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'})^* U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = \bigotimes_{l=1}^{k} (\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l})^*.$$

(c) Если $D \ntriangleleft D'$ и β — любой канал с $D(\beta) = D'$, то

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\min |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty \\ i \neq j}} (\tilde{\Omega}^{\pm}_{\beta})^* U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = 0.$$

Доказательство. Доказательство (a) в основном совпадает с доказательством теоремы XI.33, так что мы наметим только главные идеи, оставляя детали читателю (задача 54). Сначала заметим, что

$$U_D(a_1, \ldots, a_k) \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l} = \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l} U_D(a_1, \ldots, a_k),$$

так как $\prod_{i \in \mathscr{C}_l} U_i(a_i)$ коммутирует с $\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l}$, и что

$$\bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l} = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{i\tilde{H}_{D'} t} e^{-i\tilde{H}_{D'} t}.$$

Следовательно,

$$\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'} = \left(\operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{i\tilde{H}t} e^{-i\tilde{H}_D t}\right) \left[\bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l}\right] = \tilde{\Omega}^{\pm}_D \left[\bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l}\right],$$

и для доказательства сильного стремления к нулю $U_D^{-1}\left(\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'} - \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l}\right) U_D$ надо доказать только, что

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\min |a_i - a_j| \to \infty \\ i \neq j}} U_D^{-1}(a)[\tilde{\Omega}^{\pm}_D - 1] U_D(a) = 0. \tag{75}$$

Но если $\varphi \in D(H_0)$, то

$$(\tilde{\Omega}^{\pm}_D - 1)\varphi = i \int_0^{\mp\infty} (e^{+i\tilde{H}t} I_D e^{-i\tilde{H}_D t}\varphi)\, dt.$$

Дальше доказательство проходит, как в теореме XI.33, с оценками из теоремы XI.34 вместо оценок из теоремы XI.24. Доказательство (b) мы отложим до того, как будет доказано (c).

(c) Эвристическое соображение, которое скрыто за этим утверждением, состоит в том, что $(\Omega^{\pm}_{\beta})^*$ обращается в нуль на тех состояниях, которые асимптотически не образуют связанных кластеров в D'. Поскольку $D \not\sqsubset D'$, существует некоторая пара $\langle i, j\rangle$, такая, что $iD'j$, но $\sim iD_j$. Значит, $U_D(\mathbf{a})$ выводит какой-то кластер из D', когда $\min|a_i - a_j| \to \infty$, и препятствует $U_D\psi$ быть состоянием связанного кластера в D'. Эта эвристическая аргументация состоит фактически из двух утверждений. Во-первых, U_D «выводит какие-то кластеры из D'», и надо показать, что

$$\operatorname*{s-lim}_{\min |a_i - a_j| \to \infty} \tilde{\mathscr{F}}^*_{\beta} U_D(\mathbf{a}) = 0. \tag{76}$$

Во-вторых, $e^{-iHt} U_D(\mathbf{a})$ приближается к $e^{-iH_D t} \cdot U_D(\mathbf{a})$ в сильном смысле, когда $\min|a_i - \mathbf{a}_j| \to \infty$, т. е. когда кластеры в D раздвигаются, вклад той части динамики, которая вызвана силами между кластерами, становится пренебрежимо малым.

Как обычно, чтобы доказать (76), достаточно показать, что $\tilde{\mathscr{F}}^*_\beta U_D(\mathbf{a})\psi \to 0$ для множества функций ψ, линейные комбинации которых плотны в $\tilde{\mathscr{H}}$. Пусть $D' = \{C'_1, \ldots, C'_{k'}\}$; выберем $\psi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \ldots \varphi_{k'}$, где φ_i — функция координат в C'_i. Пусть $i(j)$ для каждого j — такое число, что $j \in C'_i$, одной из групп в D. Предположим, что

$$\beta = \begin{pmatrix} C'_1 \ldots C'_{k'} \\ \eta'_1 \ldots \eta'_{k'} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\|\tilde{\mathscr{F}}^*_\beta U_D(\mathbf{a})\psi\|_{\tilde{H}_\beta} = \prod_{l=1}^{k'} \left\| \int \eta_l \, (\xi^{(C'_l)}) \, \varphi(\{r_l + a_{i(j)}\}_{j\in C'_l}) \, d\xi^{(C'_l)} \right\|_{\tilde{H}(C'_l)}.$$

Главное здесь то, что в некотором C'_l есть такие j_1, j_2, что $i(j_1) \neq i(j_2)$. Поэтому, когда координаты $\mathbf{r}_j + \mathbf{a}_{i(j)}$ в φ_l заменяются на $\mathbf{R}_l$ и $\xi^{(C'_l)}$, некоторые из ξ сдвигаются, так же как и $\mathbf{R}_l$. Поскольку мы рассматриваем внутреннее произведение по ξ с фиксированной η, норма $\|\ldots\|_{\tilde{H}(C'_l)}$ стремится к нулю, так что формула (76) доказана.

Докажем далее, что

$$\operatorname*{s-lim}_{\min|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty} \left(e^{-i\tilde{H}t} - e^{-i\tilde{H}_D t}\right) U_D(\mathbf{a}) = 0 \tag{77a}$$

и

$$\operatorname*{s-lim}_{\min|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty} \left(e^{+i\tilde{H}_{D'}t} - e^{+i\tilde{H}_{D'*D}t}\right) U_D(\mathbf{a})\, e^{-i\tilde{H}_D t} = 0 \tag{77b}$$

равномерно по t, где $D' * D$ — кластерное разложение, элементы которого имеют вид $\{C'_l \cap C_m\}$, где $1 \leqslant l \leqslant k'$, $1 \leqslant m \leqslant k$. Это точное выражение того, что в результате применения $U_D(\mathbf{a})$ к вектору ψ и, следовательно, выведения кластеров из D взаимодействия между кластерами вносят пренебрежимо малый вклад в динамику. Если $\psi \in D(\tilde{H}_0)$, то

$$\left(e^{-i\tilde{H}t} - e^{-i\tilde{H}_D t}\right) U_D\psi = -ie^{-i\tilde{H}t} \int_0^t e^{+i\tilde{H}s} I_D e^{-i\tilde{H}_D s} U_D \psi \, ds.$$

Значит, для доказательства (77a) достаточно показать, что

$$\lim_{\min|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty} \int_0^t \| I_D e^{-i\tilde{H}_D s} U_D(\mathbf{a})\psi\| \, ds = 0$$

равномерно по t. Это в точности та оценка, которой мы пользовались, доказывая (75). Чтобы доказать (77b), надо убедиться, что

$$\lim_{\min|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty}\int_0^t \|(I_{D'}-I_{D*D'})\,e^{i\tilde{H}_{D*D'}s}\,U_D(\mathbf{a})\,e^{-iH_0 s}\psi\|\,ds=0$$

равномерно по t, а это доказывается аналогично (задача 55).

Теперь мы можем воспользоваться равенствами (76) и (77) вместе и получить требуемый результат. Из (77) и соотношений

$$U_D(\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k)\,e^{-i\tilde{H}_0 t}=e^{-i\tilde{H}_0 t}U_D(\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k),$$
$$U_D(\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k)\,e^{-i\tilde{H}_{D*D'}t}=e^{-i\tilde{H}_{D*D'}t}U_D(\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k)$$

получаем, что для любого $\psi\in\mathcal{H}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|(e^{i\tilde{H}_{D'}t}e^{-i\tilde{H}t}-e^{i\tilde{H}_{D*D'}t}\,e^{-i\tilde{H}_{D'}t})\,U_D\psi\|\to 0, \tag{78}$$

когда $\min_{i\neq j}|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty$. Пусть $\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D};\,D*D'}=\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty}e^{i\tilde{H}_{D'}t}e^{-i\tilde{H}_{D*D'}t}$, который существует по теореме XI.34. Тогда

$$(\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D}'}-\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D};\,D*D'})^*\,U_D(\mathbf{a})\,\psi=\operatorname*{w-lim}_{t\to\mp\infty}(e^{i\tilde{H}_{D'}t}e^{-i\tilde{H}t}-e^{i\tilde{H}_{D'*D}t}e^{-i\tilde{H}_{D'}t})\,U_D(\mathbf{a})\psi$$

для любых фиксированных ψ и $\mathbf{a}$. Из неравенства $\|\operatorname*{w-lim}_{t\to\pm\infty}\psi_t\|\leqslant\leqslant\lim_{t\to\pm\infty}\|\psi_t\|$ и (78) следует, что

$$\lim_{\min|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty}\|(\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D}'}-\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D},\,D*D'})^*\,U_D(a)\,\psi\|=0.$$

Наконец, поскольку $(\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D},\,D*D'})^*\,U_D(\mathbf{a})=U_D(\mathbf{a})\,(\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D},\,D*D'})^*$, заключаем, что

$$\operatorname*{s-lim}_{\min|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty}\mathcal{J}^*_\beta\,(\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D}'})^*\,U_D(\mathbf{a})=\operatorname*{s-lim}_{\min|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty}\mathcal{J}^*_\beta U_D(\mathbf{a})\,(\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D};\,D*D'})^*=0.$$

Это доказывает (c).

Так как (77) выполняется независимо от того, справедливо или нет соотношение $D\lhd D'$, его следствие $\operatorname{s-lim}\|(\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D}'}-\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D},\,D*D'})^*\,U_D(\mathbf{a})\,\psi\|=0$ тоже выполняется. Если $D\lhd D'$, то $D*D'=D'$ и $\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D},\,D*D'}=\bigotimes_{l=1}^{k}\Omega^{\pm}_{\bar{D}_l}$. Отсюда с учетом равенства $U_{\bar{D}}^{-1}\left(\bigotimes_{l=1}^{k}\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D}_l}\right)^*U_D=\left(\bigotimes_{l=1}^{k}\tilde{\Omega}^{\pm}_{\bar{D}_l}\right)^*$ следует утверждение (b). ∎

Теперь мы воспользуемся кластерными свойствами для получения сведений относительно S-оператора. Пусть α — некоторый канал и D — кластерное разложение, такое, что $D\lhd D(\alpha)$. В D некоторые из связанных фрагментов канала α соединяются вместе. Такое соединение индуцирует разбиение α в *подканалы*. В самом деле, для каждого $C_l \in D$ пусть α_l есть набор кластеров $F_m \in D(\alpha)$, таких, что $F_m \subset C_l$ вместе со связанными состояниями η_m канала α. Тогда если $D = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}\}$ и

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2\} & \{3, 4\} & \{5\} & \{6\} \\ 1 & 1 & \varphi(\mathbf{r}_{34}) & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\varphi(\mathbf{r}_{34})$ — некоторое связанное состояние гамильтониана $H(\{3, 4\})$, то

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2\} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \{3, 4\} & \{5\} \\ \varphi(\mathbf{r}_{34}) & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} \{6\} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Набор $\{\alpha_l\}_{l=1}^k$ называется **разбиением** α, **индуцированным** D. Пусть $D = \{C_1, \ldots, C_k\}$, и пусть α, β — такие каналы, что $D \lhd D(\beta)$ и $D \lhd D(\alpha)$. Пусть $\{\alpha_l\}_{l=1}^k$ и $\{\beta_l\}_{l=1}^k$ — разбиения α и β, индуцированные D. Тогда мы будем писать $S_{\alpha_l \beta_l}^{(C_l)}$ для S-оператора n_l тел, описывающего рассеяние из канала α_l в канал β_l.

Пусть теперь $D \lhd D(\alpha)$. Тогда $U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ оставляет инвариантной $\operatorname{Ran} \tilde{\mathscr{F}}_\alpha$ и, значит, индуцирует отображение $U_D^{(\alpha)}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ на $\tilde{\mathscr{H}}_\alpha$ посредством $U_D \tilde{\mathscr{F}}_\alpha = \tilde{\mathscr{F}}_\alpha U_D^{(\alpha)}$. Если, в частности, $\varphi \in \tilde{\mathscr{H}}_\alpha$ есть функция от $\langle \mathbf{r}_{F_1}, \ldots, \mathbf{r}_{F_m} \rangle$, где $D(\alpha) = \{F_1, \ldots, F_m\}$, то $U_D^{(\alpha)}$ действует на $\tilde{\mathscr{H}}_\alpha$, сдвигая те F_m, которые принадлежат C_l, на $\mathbf{a}_l$. Фиксируем $\psi \in \tilde{\mathscr{H}}_\alpha$ и рассмотрим состояния $U_D^{(\alpha)}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)\psi$, когда $\min_{i \neq j} |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty$. Как ведет себя $\tilde{S} U_D^{(\alpha)} \psi$? Пусть β — канал, в котором $D \not\lhd D(\beta)$. Тогда для рассеяния из α в β частицы из разных кластеров $C_l \in D$ должны соединиться. Так как кластеры в D в состоянии $U_D^{(\alpha)}\psi$ разведены далеко, естественно ожидать, что не будет рассеяния в канал β. С другой стороны, если $D \lhd D(\beta)$, рассеяние в β возможно посредством частичного рассеяния в каждый кластер из $C_l \in D$. Таким образом, мы ожидаем, что $\tilde{S} U_D^{(\alpha)} \psi$ факторизуется в произведение вкладов от рассеяния для каждого кластера C_l. Так оно и есть

Теорема XI.39 (пространственные кластерные свойства S). Пусть α — канал N-частичной квантовой системы, удовлетворяющей условиям теоремы XI.34. Пусть D — кластерное разложение, причем $D \lhd D(\alpha)$.

(а) Если $D \lhd D(\beta)$, то

$$\operatorname*{s-lim}_{\min\limits_{i \neq j} |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty} \left(\tilde{S}_{\beta\alpha} - \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{S}_{\beta_l \alpha_l}^{(C_l)} \right) U_l^{(\alpha)}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = 0.$$

(b) Если $D \not\triangleleft D(\beta)$, то

$$\operatorname*{s-lim}_{\min_{i\neq j}|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty} \tilde{S}_{\beta\alpha}U_D^{(\alpha)}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)=0.$$

Доказательство. (a) Воспользуемся утверждениями (a) и (b) теоремы XI.38 и убедимся сначала, что

$$\text{s-lim}\left(\tilde{S}_{\beta\alpha}U_D^{(\alpha)}-\tilde{\mathcal{F}}_\beta^* U_D \bigotimes_{l=1}^k \tilde{\Omega}^-_{D(\beta_l)}\tilde{\Omega}^+_{\alpha_l}\right)=0,$$

ибо

$$\tilde{S}_{\beta\alpha}U_D^{(\alpha)}-(\tilde{\Omega}_\beta^-)^*\left[U_D\bigotimes_{l=1}^k \tilde{\Omega}^+_{\alpha_l}\right]=(\tilde{\Omega}_\beta^-)^*\left[\tilde{\Omega}^+_\alpha U_D^{(\alpha)}-U_D\bigotimes_{l=1}^k \Omega^+_{\alpha_l}\right]$$

стремится к нулю в сильном смысле по теореме XI.38(a). Аналогично,

$$(\tilde{\Omega}_\beta^-)^*\left[U_D\bigotimes_{l=1}^k \tilde{\Omega}^+_{\alpha_l}\right]-\tilde{\mathcal{F}}_\beta^* U_D\bigotimes_{l=1}^k \tilde{\Omega}^-_{D(\beta_l)}\tilde{\Omega}^+_{\alpha_l}=$$

$$=\tilde{\mathcal{F}}_\beta^*\left[(\tilde{\Omega}^-_{D(\beta)})^* U_D-U_D\bigotimes_{l=1}^k(\tilde{\Omega}^-_{D(\beta_l)})^*\right]\bigotimes_{l=1}^k \tilde{\Omega}^+_{\alpha_l}$$

стремится к нулю в сильном смысле по теореме XI.38(b). Заметим, наконец, что

$$\left(\bigotimes_{l=1}^k \tilde{\mathcal{F}}^*_{\beta_l}\tilde{\Omega}^-_{D(\beta_l)}\tilde{\Omega}^+_{\alpha_l}\right)U_D^{(\alpha)}=\bigotimes_{l=1}^k \tilde{S}^{(C_l)}_{\beta_l\alpha_l}U_D^{(\alpha)}.$$

(b) Здесь вместо пункта (b) теоремы XI.38 мы опираемся на пункт (c) той же теоремы. ■

Следствие. Если S-матрица N-частичной квантовой системы унитарна, то унитарны и S-матрицы любых ее подсистем.

Эти пространственные кластерные свойства интересны благодаря своей прямой физической интерпретации, но важнее то, что они наводят на мысль о «гладкости в p-пространстве». Чтобы понять это явление, рассмотрим сначала рассеяние двух частиц. Такой $\tilde{S}$-оператор задается ядром. Это можно увидеть, например, следующим образом. Если $\varphi, \psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^6)$, то $\langle\bar{\varphi}, \psi\rangle\mapsto(\varphi, \tilde{S}\psi)$ билинейно и непрерывно на $\mathcal{S}$, поэтому существует обобщенная функция $Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{12})$, такая, что

$$(\varphi, \tilde{S}\psi)=\int\overline{\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}\,Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)\,\psi(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)\,d^3x_1\ldots d^3x_4.$$

Полезно записать $\tilde{S}$ в p-пространстве, т. е. найти ядро $\mathcal{F}\tilde{S}\mathcal{F}^{-1}$, где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье:

$$(\varphi, \tilde{S}\psi)=\int\overline{\hat{\varphi}(p_1, p_2)}\,s(p_1, p_2; p_3, p_4)\,\hat{\psi}(p_3, p_4)\,d^3p_1\ldots d^3p_4.$$

Вследствие сохранения энергии и импульса, т. е. вследствие того, что S коммутирует с пространственными сдвигами и группой *свободной* динамики, обобщенная функция s имеет носитель на многообразии, где

$$\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4,$$
$$E_{\text{out}}=\frac{\mathbf{p}_1^2}{2\mu_1}+\frac{\mathbf{p}_2^2}{2\mu_2}=\frac{\mathbf{p}_3^2}{2\mu_3}+\frac{\mathbf{p}_4^2}{2\mu_4}=E_{\text{in}}.$$

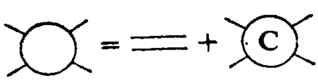
Это подсказывает нам, что s можно записать в виде

$$s(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2;\ \mathbf{p}_3,\ \mathbf{p}_4)=\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)\,\delta(E_{\text{in}}-E_{\text{out}})\,s^{\text{red}}(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2;\ \mathbf{p}_3,\ \mathbf{p}_4).$$

A priori s может иметь гораздо более сложные особенности, как, например, $-\Delta\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)$. То, что такого рода особенности типа δ-функции тоже факторизуются, мы увидим, когда будем рассматривать редукцию S-матрицы за счет симметрии в § 8. Можно было бы думать, что s^{red} будет гладкой функцией переменных $\mathbf{p}_1,\ \ldots,\ \mathbf{p}_4$, пока они меняются на многообразии, где энергия и импульс сохраняются. Однако это плохая гипотеза! Действительно, пусть $U(\mathbf{a})$ — трансляция первой частицы на $\mathbf{a}$. Тогда $U(\mathbf{a})\tilde{S}U(\mathbf{a})^{-1}$ имеет ядро $se^{i\mathbf{a}\cdot(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)}$. Если бы s^{red} была гладкой, то из леммы Римана — Лебега следовало бы, что $\lim\limits_{\mathbf{a}\to\infty}(\varphi,\ U(\mathbf{a})\tilde{S}U(\mathbf{a})^{-1}\psi)=0$; однако же нам известно, что $\lim\limits_{\mathbf{a}\to\infty}(\varphi,\ U(\mathbf{a})(S-I)\ U(\mathbf{a})^{-1}\psi)=0$, т. е. гладкое ядро должен иметь оператор $\tilde{S}-I$. Таким образом, можно надеяться, что

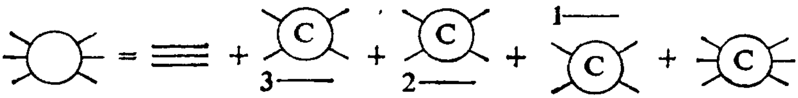
$$s(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2;\ \mathbf{p}_3,\ \mathbf{p}_4)=\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)\,\delta(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_4)-$$
$$-(2\pi i)\,\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)\,\delta(E_{\text{in}}-E_{\text{out}})\,t(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2;\ \mathbf{p}_3,\ \mathbf{p}_4),$$

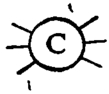
где t — гладкая функция $\mathbf{p}_i$, если $\langle\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2,\ \mathbf{p}_3,\ \mathbf{p}_4\rangle$ меняется, оставаясь на многообразии, где сохраняются энергия и импульс. Член $\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\,\delta(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)$ есть в точности ядро оператора I. Множитель $2\pi i$ вставлен из соображений нормировки. В случае двух частиц мы действительно докажем, что s имеет такой вид для широкого класса потенциалов; см. § 6 и 7. Чего следует ожидать в случае N тел? Запишем схематически результат для двух частиц в виде



где 

означает часть S-матрицы с гладким ядром; эта часть называется «связной» частью. Легко догадаться, что для случая трех частиц



так что можно определить 

рекуррентно через 

и связные части с меньшим числом частиц.

Определение. Пусть α, β — каналы системы N частиц. Определим $R_{\alpha\beta}$ рекуррентно (по N) посредством соотношений

$$R_{\alpha\beta} = \tilde{S}_{\alpha\beta} - \sum_{D \in \mathscr{C}_{\alpha\beta}} R_{\alpha_1\beta_1} \dots R_{\alpha_k\beta_k},$$

где $\mathscr{C}_{\alpha\beta}$ — множество кластерных разложений с $D \lhd D(\alpha)$, $D \lhd D(\beta)$, *причем D содержит не менее двух кластеров*. При $N=2$ имеем $R = S - I$.

Тогда из пространственных кластерных свойств (теорема XI.39) вытекает (задача 56)

Теорема XI.40 (пространственные кластерные свойства редуцированных S-операторов).

(a) $\tilde{S}_{\alpha\beta} = \sum\limits_{\substack{D \lhd D(\alpha),\ D \lhd D(\beta) \\ D = \{C_1, \dots, C_k\}}} R_{\alpha_1\beta_1} R_{\alpha_2\beta_2} \dots R_{\alpha_k\beta_k}$;

(b) $\underset{\substack{\min |a_i - a_j| \to \infty \\ i \neq j}}{\text{s-lim}} R_{\alpha\beta} U_D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = 0$ для всех D, для которых $D \lhd D(\beta)$.

Это построение *подсказывает*, что $R_{\alpha\beta}$ имеет ядро вида

$$r_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = (2\pi i)\, \delta\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i - \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i'\right) \delta(E - E')\, t_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'),$$

где $t_{\alpha\beta}$ есть гладкая функция $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$. «Гипотеза об аналитичности S-матрицы» требует даже, чтобы $t_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ было граничным значением функции, аналитической в некоторой области. К сожалению, эта весьма привлекательная гипотеза не доказана для многоканальных и многочастичных систем. В Замечаниях мы обсудим результаты, составляющие частичное доказательство «гипотезы об аналитичности S-матрицы» для квантовых систем с $N \geqslant 3$.