XI.6. Квантовое рассеяние III: разложение по собственным функциям

Любые формальные выкладки предполагаются правильными, если только они не очевидно неверны.

М. Л. ГОЛДБЕРГЕР И К. ВАТСОН, «ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ»

Мы установили существование и единственность состояний рассеяния квантовых двухчастичных систем с потенциалами, убывающими как $|x|^{-1-\varepsilon}$ при $|x|\to\infty$. Полноту мы докажем в § 17 и XIII. 8. Но мы пока еще не знаем никаких способов явно «сосчитать» S-матрицу или сравнить экспериментальные данные с теорией. В этом разделе мы хотим вывести некоторые формулы, составляющие так называемую «формальную теорию рассеяния», или «стационарную теорию рассеяния». Эти формулы представляют S-оператор в явном виде как «интегральный оператор» с ядром $\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')-2\pi i\delta(k^2-k'^2)T(\mathbf{k},\ \mathbf{k}')$; см. теорему XI.42. В следующем разделе мы покажем, что функция $T(\mathbf{k},\ \mathbf{k}')$ имеет аналитическое продолжение в некоторые определенные области.

Главный инструмент «формальной теории рассеяния» — это разложение по собственным функциям гамильтониана H, которое представляет и самостоятельный интерес. Оператор A в $L^2(\mathbb{R}^3, dx)$ с чисто дискретным спектром имеет разложение по собственным функциям в самом прямом смысле: существуют L^2-функции $\varphi_n(x)$ и связанное с ними отображение $\tilde{}$: $L^2(\mathbb{R}^3,\ dx)\to l_2$, определенное формулой

$$(\tilde{f})_n=\int\overline{\varphi_n(x)}\,f(x)\,dx. \tag{79a}$$

То, что φ_n — собственные функции, т. е. $A\varphi_n=a_n\varphi_n$, выражается равенством

$$(\widetilde{Af})_n=a_n\tilde{f}_n,\qquad \text{если } f\in D(A). \tag{79b}$$

Из ортонормированности $\{\varphi_n\}$ вытекает, что

$$\operatorname{Ran}\,\tilde{}=l_2. \tag{79c}$$

Полнота системы φ_n выражается формулой

$$f(x)=L^2\text{-}\lim\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{f}_n\varphi_n(x). \tag{79d}$$

Наконец, вследствие ортонормированности и полноты

$$\|f\|^2=\sum_n|\tilde{f}_n|^2. \tag{79e}$$

Но спектры двухчастичных гамильтонианов с исключенным центром масс имеют не дискретные части — в действительности с рассеянием связан абсолютно непрерывный спектр $[0, \infty)$. И все же можно надеяться, что имеет место некоторое «непрерывное» разложение по собственным функциям. В качестве модели того, что мы хотим отыскать, рассмотрим разложение по собственным функциям для $H_0 = -\Delta$, имеющего только непрерывный спектр, которое дает преобразование Фурье. Запишем $\varphi_0(x, k) = e^{ik\cdot x}$ и будем представлять себе $\varphi_0(\cdot, k)$ как семейство функций x, параметризованное непрерывным индексом k. Тогда, как известно, $\wedge$ удовлетворяет условию

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2}\,\mathrm{l.i.m.} \int \overline{\varphi_0(x, k)}\, f(x)\, dx, \tag{80a}$$

где $\mathrm{l.i.m.} \int = L^2\text{-}\lim \int_{|x|<M}$ при $M \to \infty$. Функции $\varphi_0(\cdot, k)$ будут собственными функциями с собственным значением k^2 в том смысле, что

$$(\widehat{H_0 f})(k) = k^2 \hat{f}(k), \quad \text{если } f \in D(H_0). \tag{80b}$$

Из ортогональности и «нормировки» функций $\varphi_0(\cdot, k)$ следует, что

$$\mathrm{Ran}\, \wedge = L^2(\mathbb{R}^3, dx). \tag{80c}$$

Полнота множества $\{\varphi_0(\cdot, k)\}_{k \in \mathbb{R}^n}$ выражается соотношениями

$$f(x) = \mathrm{l.i.m.}\,(2\pi)^{-3/2} \int \varphi_0(x, k)\, \hat{f}(k)\, dk \tag{80d}$$

и

$$\|f\|^2 = \int |\hat{f}(k)|^2\, dk. \tag{80e}$$

Как найти подходящие φ, которые могли бы быть «непрерывными собственными функциями» для разложения $H = H_0 + V$ по собственным функциям? Мы определили $\Omega^+ f$ только для $f \in L^2$, но допустим, что можно придать смысл $\Omega^+ \varphi_0(\cdot, k)$. Тогда, поскольку $\Omega^+ H_0 = H \Omega^+$, функция $\varphi(\cdot, k) \equiv \Omega^+ \varphi_0(\cdot, k)$ должна удовлетворять уравнению $H\varphi = k^2 \varphi$ в смысле (80b). Если в каком-то смысле $\varphi = \Omega^+ \varphi_0$, то $\varphi_0 = (\Omega^+)^* \varphi$ должна быть пределом при $t \to -\infty$ следующего выражения:

$$e^{+iH_0 t} e^{-iHt} \varphi = \varphi - i \int_0^t e^{iH_0 s} V e^{-iHs} \varphi\, ds \to$$

$$\to \varphi - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i \int_0^{-\infty} e^{iH_0 s} V e^{-ik^2 s} e^{+\varepsilon s} \varphi\, ds = \varphi + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (H_0 - k^2 - i\varepsilon)^{-1} V\varphi.$$

Следовательно, φ должна удовлетворять уравнению

$$\varphi(\cdot, k) = \varphi_0(\cdot, k) - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} ([H_0 - (k^2 + i\varepsilon)]^{-1} V\varphi)(\cdot, k), \tag{81a}$$

или, если воспользоваться (IX.30), уравнению

$$\varphi(\mathbf{x},\ \mathbf{k})=e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}-\frac{1}{4\pi}\int\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}V(\mathbf{y})\,\varphi(\mathbf{y},\ \boldsymbol{k})\,d\mathbf{y}. \tag{81b}$$

Физики обозначают волновой оператор при $t\to-\infty$ через Ω^+ вследствие знака $+i\varepsilon$ в формуле (81a). Уравнение (81), которое мы получили с помощью эвристических рассуждений, называется **уравнением Липпмана—Швингера.** Чтобы найти «непрерывные» собственные функции φ для разложения оператора $H=H_0+V$, надо решить это уравнение. Найдя φ, мы построим преобразование с этой собственной функцией $f^{\#}(k)=\text{l.i.m.}\,(2\pi)^{-3/2}\int\overline{\varphi(x,k)}\,f(x)\,dx$. Мы ожидаем, что будут выполнены аналоги уравнения (80) с одним исключением: $\varphi(\cdot,\ k)$, вообще говоря, не будут полны, т. е. мы не ожидаем более, что

$$f(x)=\text{l.i.m.}\,(2\pi)^{-3/2}\int f^{\#}(k)\,\varphi(x,\ k)\,dk,$$

так как φ — это собственные функции, отвечающие лишь абсолютно непрерывному спектру H. В действительности мы увидим, что $(P_{ac}(H)f)(x)=\text{l.i.m.}\,(2\pi)^{-3/2}\int f^{\#}(k)\,\varphi(x,k)\,dk$. Наконец, мы ожидаем, что это преобразование с собственными функциями и преобразование Фурье тесно связаны: ведь формально $\Omega^+\varphi_0=\varphi$, и потому должно быть $\Omega^+\left(\int b(k)\,\varphi_0(x,\ k)\,dk\right)=\int b(k)\,\varphi(x,\ k)\,dk$, или $(\Omega^+f)^{\#}=\hat{f}$, где мы положили $\hat{f}=(2\pi)^{3/2}b$.

Главный результат этого раздела (теорема XI.41) состоит в том, что справедливы все приведенные выше утверждения. Напомним, что класс Рольника R есть множество измеримых функций $V(x)$, удовлетворяющих условию

$$\|V\|_R^2=\int_{\mathbb{R}^6}\frac{|V(x)|\,|V(y)|}{|x-y|^2}\,dx\,dy<\infty.$$

Теорема XI.41. Пусть $V\in R\cap L^1(\mathbb{R}^3)$. Пусть $H_0=-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$, и пусть $H=H_0+V$ в смысле квадратичных форм (теорема X.19). Тогда существует множество $\mathcal{E}\subset\mathbb{R}_+$ (где $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел), которое замкнуто, имеет меру Лебега нуль и удовлетворяет таким условиям:

(a) если $k^2\notin\mathcal{E}$, то существует единственное решение $\varphi(\cdot,\ \mathbf{k})$ уравнения Липпмана—Швингера (81), удовлетворяющее условию $|V|^{1/2}\varphi(\cdot,\ \mathbf{k})\in L^2$;

(b) если $f\in L^2$, то существует

$$f^{\#}(\mathbf{k})=\text{l.i.m.}\,(2\pi)^{-3/2}\int\overline{\varphi(\mathbf{x},\ \mathbf{k})}\,f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}; \tag{82a}$$

(c) если $f \in D(H)$, то

$$(Hf)^{\#}(\mathbf{k}) = k^2 f^{\#}(\mathbf{k}); \tag{82b}$$

(d) $\operatorname{Ran} {}^{\#} = L^2(\mathbb{R}^3)$ и (82c)

$$\int |f^{\#}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} = \|P_{ac}(H) f\|^2. \tag{82e}$$

Более общо, если $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{E}$ пусто и $\alpha > 0$, то

$$\int_{\alpha < k^2 < \beta} |f^{\#}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} = \|P_{[\alpha, \beta]}(H) f\|^2, \tag{82e'}$$

где $\{P_\Omega(H)\}$ — семейство спектральных проекторов для H.

(e) Пусть L.I.M. обозначает L^2-предел при $M \to \infty$ и $\delta \to 0$ интеграла по $\{\mathbf{k} \mid k \leqslant M, \operatorname{dist}(k^2, \mathcal{E}) > \delta\}$. Тогда

$$(P_{ac}(H) f)(x) = \text{L.I.M. } (2\pi)^{-3/2} \int f^{\#}(\mathbf{k}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d\mathbf{k}. \tag{82d}$$

(f) Для любой $f \in L^2$

$$(\Omega^+ f)^{\#}(\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k}). \tag{83}$$

Мы лишь наметим основные идеи доказательства теоремы XI.41. Детали можно найти в литературе, приведенной в Замечаниях. Но для начала рассмотрим некоторые следствия этой теоремы и ее доказательства. Прежде всего отметим, что, как следует из (82e'), для любого интервала $[\alpha, \beta]$, не пересекающегося с $\mathcal{E}$, где $\alpha > 0$, $\operatorname{Ran} P_{[\alpha, \beta]} \subset \mathcal{H}_{ac}$. Таким образом, если существует сингулярный спектр, то он должен лежать в $\mathcal{E}$, ибо $\sigma_{ess}(H) = [0, \infty)$ по теореме XIII.15. Это позволит в ряде случаев заключить, что $\sigma_{sing}(H) = \varnothing$ (см. теорему XIII.21). Во-вторых, при доказательстве теоремы XI.41 мы пользуемся существованием Ω^+, а не полнотой этого оператора. Условие (83) утверждает, что $\#[\operatorname{Ran} \Omega^+] = L^2$, а (82d) — что $\#^{-1}[L^2] = \mathcal{H}_{ac}$, так что из теоремы XI.41 вытекает равенство $\operatorname{Ran} \Omega^+ = \mathcal{H}_{ac}$. Таким образом, в случае $V \in L^1 \cap R$ мы получаем доказательство полноты Ω^+, не опирающееся на теорию Като — Бирмана. В Замечаниях мы объясним, как разложение по собственным функциям помогает «понять» сходимость волновых операторов, когда $V_n \to V$ в R и L^1. Мы также обсудим в Замечаниях, каким образом можно воспользоваться тем же методом, которым доказывается теорема XI.41, для доказательства похожего результата в случае $V \in L^p \cap L^{3/2}$ при некотором $1 \leqslant p < 3/2$ (см. также задачу 57). В более общей постановке разложение по собственным функциям рассматривается в дополнении к этому разделу и в Замечаниях. Отметим еще, что если $\sigma_{sing}(H) = \varnothing$ (см. § XIII.6,7,8), то можно найти семейство $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ квадратично интегрируемых собственных функций H, $H\varphi_n = E_n\varphi_n$, таких, что если $f_n^{\#} = (\varphi_n, f)$, то

$$f(\mathbf{x}) = \text{L.I.M.}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n^{\#}\varphi_n(\mathbf{x}) + \int (2\pi)^{-3/2}\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) f^{\#}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\right),$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |f_n^{\#}|^2 + \int |f^{\#}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k},$$

$$(Hf)^{\#}(\mathbf{k}) = k^2 f^{\#}(\mathbf{k}); \quad (Hf)_n^{\#} = E_n f_n^{\#}.$$

Обратимся теперь к основным идеям доказательства теоремы XI.41.

(I) *Модифицированное уравнение Липпмана — Швингера.* Сначала введем модифицированное уравнение Липпмана — Швингера. Если $\psi(x, k) = |V(x)|^{1/2}\varphi(x, k)$ и φ удовлетворяет уравнению (81), то ψ удовлетворяет уравнению

$$\psi(x, k) = |V(x)|^{1/2} e^{ik\cdot x} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{|V(x)|^{1/2} e^{i|k||x-y|} V^{1/2}(y)}{|x-y|}\psi(y, k)\, dy, \tag{84}$$

где $V^{1/2} = |V|^{1/2}(\operatorname{sgn} V)$.

Покажем, что уравнение (84) имеет решения. Поскольку $V \in L^1 \cap R$, $e^{ik\cdot x}|V|^{1/2}$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}^3)$ и

$$\frac{|V(x)|^{1/2} e^{i|k||x-y|} V^{1/2}(y)}{|x-y|} \in L^2(\mathbb{R}^6)$$

при любом k из $\mathbb{R}^3$. Следовательно, модифицированное уравнение Липпмана — Швингера имеет вид $\psi = \eta + L_{|k|}\psi$, где η из L^2, а $L_{|k|}$ — оператор Гильберта — Шмидта. Пусть $\mathscr{E}$ — такое множество чисел $|k|^2 \in \mathbb{R}_+$, для которого однородное уравнение $\psi = L_{|k|}\psi$ имеет ненулевое решение из L^2. По альтернативе Фредгольма (следствие теоремы IV.14) уравнение (84) имеет единственное решение ψ из L^2, если $|k|^2 \notin \mathscr{E}$. Отсюда следует, что исходное уравнение Липпмана — Швингера имеет единственное решение φ, удовлетворяющее условию $|V|^{1/2}\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и определяемое формулой

$$\varphi(x, k) = e^{ik\cdot x} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{i|k||x-y|}}{|x-y|} V^{1/2}(y)\psi(y, k)\, dy$$

Разумеется, надо еще повозиться, чтобы доказать сходимость этого интеграла при почти всех x, но здесь мы не будем входить в такие тонкости.

(II) *Изучение множества $\mathscr{E}$.* Пусть K_λ — оператор $|V|^{1/2}(H_0 - \lambda^2)^{-1}V^{1/2}$. Это интегральный оператор (84) при $\lambda = |k|$ для некоторых $k \in \mathbb{R}^3$, в частности при положительных вещественных λ. Легко показать, что K_λ аналитичен, если $\operatorname{Im}\lambda > 0$, и непрерывен, если $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$.

Далее, с помощью теоремы о мажорированной сходимости можно показать, что норма Гильберта—Шмидта оператора K_λ стремится к нулю при $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$. Следовательно, $(I+K_\lambda)^{-1}$ существует при больших $\operatorname{Im}\lambda$. Здесь потребуется небольшое усиление аналитической теоремы Фредгольма (теорема VI.14), а именно

Предложение. Пусть $A(\lambda)$ — компактная операторнозначная функция в $D=\{\lambda \mid \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\}$, непрерывная в D и аналитическая во внутренности D. Тогда либо $(1-A(\lambda))^{-1}$ не существует ни для какого λ из D, либо множество $\{\lambda \mid \operatorname{Im}\lambda=0$ и $(1-A(\lambda))^{-1}$ не существует$\}$ представляет собой замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ меры нуль.

Это предложение доказывается тем же методом, что и теорема VI.14, с учетом следующего факта из теории аналитических функций: вещественные нули функции, аналитической в открытой верхней полуплоскости и непрерывной в замкнутой полуплоскости, образуют замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ меры нуль (см. задачи 58 и 59 и Замечания). Таким образом, определенное выше подмножество $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$ замкнуто и имеет меру нуль.

Сделаем еще несколько замечаний относительно $\mathscr{E}$. Во-первых, $\mathscr{E}$ всегда ограничено. Это следует из того, что операторная норма K_λ вследствие осцилляций ядра стремится к нулю, когда $\lambda \to \infty$, причем λ вещественно. Эти осцилляции описываются леммой Римана—Лебега (задача 60). Во-вторых, отметим, что в двух случаях мы точно знаем $\mathscr{E}$. Если $\|V\|_R < 4\pi$, то $\|K_\lambda\| < 1$ при всех λ, так что $\mathscr{E}=\varnothing$. А если V экспоненциально убывает в том смысле, что $e^{\alpha|x|}V(x) \in R$ при некотором $\alpha>0$, то $\mathscr{E}$ — конечное множество. Действительно, в этом случае K_λ можно продолжить в область $\{\lambda \mid \operatorname{Im}\lambda > -\alpha/2\}$, так что из обычной аналитической теоремы Фредгольма следует, что $\mathscr{E}$ дискретно.

(III) *Изучение функции Грина.* Главная идея доказательства состоит в том, чтобы связать функции $\varphi(x, k)$ с интегральным оператором $(H-E)^{-1}$, а затем с помощью формулы Стоуна (теорема VII.13) связать $(H-E)^{-1}$ со спектральными проекторами:

$$\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\text{s-lim}}\,(2\pi i)^{-1}\int_\alpha^\beta [(H-\mu-i\varepsilon)^{-1}-(H-\mu+i\varepsilon)^{-1}]\,d\mu = \\ = {}^1/_2 P_{(\alpha,\beta)} + {}^1/_2 P_{[\alpha,\beta]}.$$

Предварительно надо рассмотреть интегральное ядро оператора $(H-E)^{-1}$.

Лемма 1. Допустим, что $E \notin \sigma(H)$. Тогда существует измеримая функция $G(x, y; E)$ на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, такая, что

$$[(H-E)^{-1}\psi](x) = \int G(x, y; E)\,\psi(y)\,dy.$$

Далее:

(a) для почти каждого фиксированного x имеем $G(x, \cdot; E) \in L^1 \cap L^2$;

(b) $G(x, y; E) = G(y, x; E)$ и $\overline{G(x, y; E)} = G(x, y; \bar{E})$;

(c) G удовлетворяет интегральному уравнению

$$G(x, y; E) = G_0(x, y; E) - \int G_0(x, z; E) V(z) G(z, y; E)\, dz,$$

где $G_0(x, y; E) = e^{i\sqrt{E}\,|x-y|}/4\pi|x-y|$ — свободная функция Грина, причем выбрано значение $\sqrt{E}$ с положительной мнимой частью.

Доказательство. Мы представим формальное доказательство, не заботясь о сходимости интегралов и о вопросах, связанных с областями определения. Простое рассуждение (задача 61) позволяет получить, что

$$(H-E)^{-1} = (H_0-E)^{-1} - [(H_0-E)^{-1} V^{1/2}] \times \\ \times [1 + |V|^{1/2} (H_0-E)^{-1} V^{1/2}]^{-1} [|V|^{1/2} (H_0-E)^{-1}].$$

Поскольку $V \in L^1$, ядро $|V(x)|^{1/2} e^{i\sqrt{E}\,|x-y|}/4\pi|x-y|$ оператора $|V|^{1/2}(H_0-E)^{-1}$ принадлежит классу Гильберта — Шмидта. Следовательно, $(H-E)^{-1} - (H_0-E)^{-1}$ также оператор Гильберта — Шмидта и потому является интегральным оператором с квадратично-интегрируемым ядром $A(x, y)$. В частности, $A(x, \cdot) \in L^2$ при почти всех x. Так как $(H_0-E)^{-1}$ имеет интегральное ядро $G_0(x, \cdot) \in L^2$ при почти всех x, $(H-E)^{-1}$ имеет интегральное ядро $G(x, \cdot; E) \in L^2$ при почти всех x. Интегральное уравнение пункта (c) есть просто запись того, что $(H-E)^{-1} = (H_0-E)^{-1} - (H_0-E)^{-1} V (H-E)^{-1}$. В частности, если $\operatorname{Re} E$ достаточно отрицательна, то интегральное уравнение можно решить с помощью итераций. Для таких E пункт (b) следует из аналогичных свойств G_0 и того, что V вещественна. Следовательно, (b) выполняется при всех $E \notin \sigma(H)$ благодаря аналитическому продолжению. Остается показать, что $G(x, \cdot; E) \in L^1$ при почти всех x. Это можно сделать при помощи интегрального уравнения (см. задачу 61b). ∎

G называется **функцией Грина** оператора H.

(IV) *Положительные собственные значения.* Нам потребуется еще такая

Лемма 2. Если $E > 0$ и $E \notin \mathscr{E}$, то E не является собственным значением H.

Доказательство мы предоставим читателю (см. задачу 62 или соответствующие литературные ссылки в Замечаниях). Из этой леммы следует, что если $[\alpha, \beta] \cap \mathscr{E} = \varnothing$, то $P_{[\alpha, \beta]} = P_{(\alpha, \beta)}$, так что $^1/_2 [P_{[\alpha, \beta]} + P_{(\alpha, \beta)}]$ в формуле Стоуна есть $P_{(\alpha, \beta)} = P_{[\alpha, \beta]}$.

(V) *Связь между* $\#$ *и резольвентой.* Допустим, что $\operatorname{Im} \varkappa > 0$ и $\operatorname{Re} \varkappa \neq 0$. Так как $G(x, \cdot; \varkappa^2) \in L^1$, то она имеет обратный фурье-образ $g(x, k; \varkappa) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int G(x, y; \varkappa^2) e^{ik \cdot y} d^3y$, который непрерывен. Определим $h(x, k; \varkappa) \equiv (2\pi)^{3/2} (|k|^2 - \varkappa^2) g(x, k; \varkappa)$. Тогда интегральное уравнение для G можно переписать как интегральное уравнение для h (после отдельного рассуждения, позволяющего изменить порядок интегрирований перехода к фурье-образу и интегрального уравнения):

$$h(x, k; \varkappa) = e^{ik \cdot x} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} V^{1/2}(y) p(y, k; \varkappa) \, dy, \tag{85a}$$

$$p(y, k; \varkappa) = |V(y)|^{1/2} e^{ik \cdot y} - \frac{1}{4\pi} \int |V(y)|^{1/2} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} V^{1/2}(x) p(x, k; \varkappa) dx. \tag{85b}$$

Ключевой момент здесь — это отношение между уравнением (85b) и модифицированным уравнением Липпмана — Швингера (84). Если $k \in \mathbb{R}^3$ фиксировано и $\varkappa = |k|$, то уравнение для $p(\cdot, k; \varkappa)$ совпадает с уравнением для $\psi(\cdot, k)$. Опираясь на это, докажем, что справедлива

Лемма 3. Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда интегралы

$$\Phi(k; \varkappa) = (2\pi)^{-3/2} \int \overline{h(x, k; \varkappa)} f(x) \, d^3x,$$

$$f^\#(k) = (2\pi)^{-3/2} \int \overline{\varphi(x, k)} f(x) \, d^3x$$

абсолютно сходятся, если $\operatorname{Im} \varkappa > 0$ в интеграле для Φ и $|k|^2 \notin \mathscr{E}$ в интеграле для $f^\#$. Предположим, что $[\alpha, \beta] \cap \mathscr{E} = \varnothing$ и $\alpha > 0$. Тогда $\Phi(k; \varkappa)$ имеет равномерно непрерывное по k и $\varkappa$ продолжение в область $\alpha^{1/2} \leqslant \operatorname{Re} \varkappa \leqslant \beta^{1/2}$, $\operatorname{Im} \varkappa > 0$, и при $k^2 \in [\alpha, \beta]$

$$f^\#(k) = \Phi(k; |k|).$$

Итак, мы связали $f^\#$ с граничным значением резольвенты.

(VI) *Доказательство* (*82e'*), *когда* $f \in C_0^\infty$.

Лемма 4. Пусть $f \in C_0^\infty$, и пусть $[\alpha, \beta] \cap \mathscr{E} = \varnothing$, причем $\alpha > 0$. Тогда

$$\|P_{[\alpha, \beta]} f\|^2 = \int\limits_{\alpha^{1/2} < |k| < \beta^{1/2}} |f^\#(k)|^2 d^3k.$$

Доказательство. Будем опять опускать технические детали. Пусть $\varkappa^2 = \mu + i\varepsilon$ с $\varepsilon > 0$ и $\operatorname{Im} \varkappa > 0$. С точностью до множителя $(2\pi)^{3/2} (|k|^2 - \mu - i\varepsilon)$ функция $h(x, \cdot; \varkappa)$ есть фурье-образ функции

Грина $G(x, \cdot; \varkappa^2)$, так что из теоремы Планшереля следует, что

$$(\varkappa^2-\bar{\varkappa}^2)\int \overline{G(z, x; \bar{\varkappa}^2)}\, G(z, y; \bar{\varkappa}^2)\, dz =$$
$$= \int \frac{2i\varepsilon}{(k^2-\mu)^2+\varepsilon^2} h(x, k; \varkappa)\, \overline{h(y, k; \varkappa)} \frac{dk}{(2\pi)^3}. \qquad (86)$$

Если умножить левую часть (86) на $\overline{f(x)}\, f(y)$ и результат проинтегрировать, то получим

$$(\varkappa^2-\bar{\varkappa}^2)(R_{\bar{\varkappa}^2}f,\ R_{\bar{\varkappa}^2}f) = (\varkappa^2-\bar{\varkappa}^2)(f,\ R_{\varkappa^2}R_{\bar{\varkappa}^2}f) = (f,\ R_{\varkappa^2}-R_{\bar{\varkappa}^2}f),$$

где $R_E \equiv (H-E)^{-1}$. С другой стороны, правая часть (86) будет при этом равна

$$\int \frac{2i\varepsilon}{(|k|^2-\mu)^2+\varepsilon^2} |\Phi(k; \sqrt{\mu+i\varepsilon})|^2\, dk.$$

Поэтому

$$\int_\alpha^\beta (f,\ [R_{\mu+i\varepsilon}-R_{\mu-i\varepsilon}]\, f) \frac{d\mu}{2\pi i} = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta\int \frac{\varepsilon}{(|k|^2-\mu)^2+\varepsilon^2} |\Phi(k, \sqrt{\mu+i\varepsilon})|^2 d\mu\, dk. \qquad (87)$$

Когда $\varepsilon \to 0$, из формулы Стоуна и леммы 2 следует, что левая часть (87) приближается к $(f, P_{[\alpha,\beta]}f) = \|P_{[\alpha,\beta]}f\|^2$. Формально $\varepsilon\pi^{-1}[(|k|^2-\mu)^2+\varepsilon^2]^{-1}$ приближается к $\delta(k^2-|\mu|)$ при $\varepsilon \to 0$ (см. (V.4)), так что, пользуясь леммой 3, можно показать, что правая часть (87) стремится к $\int\limits_{\alpha<|k^2|<\beta} |f^{\#}(k)|^2\, dk$. ∎

(VII) *Распространение на произвольные* f. Пользуясь леммой 4, поляризационным тождеством и различными предельными переходами, легко доказать все остальные утверждения теоремы XI.41, кроме следующих трех:
(i) $\operatorname{Ran}{}^{\#} = L^2$, (ii) $(\Omega^+ f)^{\#} = \hat{f}$, (iii) формула (82b), которая пока доказана только в слабой форме. Если мы докажем (i), то и (82b) будет доказана в полном объеме. Детали можно найти в литературе, указанной в Замечаниях.

(VIII) *Сведение к* (*88*). Допустим, что равенство

$$((\Omega^+)^* f)^{\hat{}} = f^{\#} \qquad (88)$$

доказано. Тогда (83) можно получить из соотношения $(\Omega^+ f)^{\#} = ((\Omega^+)^*\Omega^+ f)^{\hat{}} = \hat{f}$, а равенство (i) следует из того, что $\hat{}$ и $(\Omega^+)^*$ сюръективны. Таким образом, доказав (88), мы завершим доказательство теоремы XI.41.

(IX) *Отступление об абелевых пределах.* Чтобы доказать (88), нам потребуется следующая

Лемма 5. Пусть $f(x)$ — ограниченная измеримая функция; допустим, что $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t f(x)\,dx=a$. Тогда $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon s}f(s)\,ds=a$.

Доказательство. Пусть $g(t)=\int\limits_0^t f(s)\,ds$ и $q(\varepsilon)=\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon s}f(s)\,ds$. Тогда $g'(t)=f(t)$ почти всюду, поэтому с помощью интегрирования по частям доказывается, что

$$q(\varepsilon)=\int\limits_0^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon s}g(s)\,ds.$$

Пользуясь тем, что g ограничена, $g(t)\to a$ при $t\to\infty$ и $\int\limits_0^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon s}\,ds=1$, легко доказать, что $q(\varepsilon)\to a$ (задача 63). ∎

(X) *Заключение.* Теперь мы готовы завершить наш набросок доказательства теоремы XI.41.

Доказательство формулы (88). Нужное равенство надо доказать лишь для $f\in\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$, где $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$ — абсолютно непрерывное пространство оператора H. Действительно, если $f\in\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}^{\perp}$, то $(\Omega^+)^*f=0$ и, согласно формуле (82e), доказанной в (VII), $f^\#=0$. Итак, достаточно доказать, что

$$(f,\ \Omega^+g)=\int \overline{f^\#(k)}\,\hat{g}(k)\,dk \tag{89}$$

для множества функций g, плотного в $\mathscr{H}$, и множества функций f, плотного в $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$. Будем предполагать, что $f^\#$ имеет носитель в некотором интервале $[\alpha,\beta]$, не пересекающемся с $\mathscr{E}$, и что $g\in C_0^\infty$. В приводимых ниже выкладках мы не будем явно пользоваться этими техническими допущениями о f и g, однако мы будем переставлять пределы и менять порядок интегрирования; эти замены обосновываются с помощью указанных технических допущений о f и g

Так как $f,\ g\in Q(H)=Q(H_0)$, то, как это следует из задачи 20,

$$(f,\ \Omega^+g)-(f,g)=i\lim_{t\to-\infty}\int\limits_0^t (f,\ e^{iHs}Ve^{-iH_0s}g)\,ds.$$

Значит, по лемме 5

$$(f,\ \Omega^+g)=(f,g)+i\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_0^{-\infty}(f,\ e^{iHt}Ve^{-iH_0t}g)\,e^{\varepsilon t}\,dt. \tag{90}$$

Исходя из (82e′), легко показать, что $(f, e^{iHt}g)=\int \overline{f^\#(k)}\, e^{ik^2t} g^\#(k)\,dk$, если f или g лежит в $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$. В результате

$$(f, e^{iHt}Ve^{-iH_0t}g) = \int \overline{f^\#(k)}\, e^{ik^2t}\,(Ve^{-iH_0t}g)^\#(k)\,dk =$$
$$= (2\pi)^{-3/2}\iint \overline{f^\#(k)}\, e^{ik^2t}\,\overline{\varphi(x, k)}\, V(x)\,(e^{-iH_0t}g)(x)\,dx\,dk.$$

Следовательно,

$$\int_0^{-\infty} (f, e^{iHt}Ve^{-iH_0t}g)\, e^{\varepsilon t}\,dt =$$
$$=(2\pi)^{-3/2}\int_0^{-\infty}\iint \overline{f^\#(k)\varphi(x, k)}\, V(k)\,(e^{-it(H_0-k^2+i\varepsilon)}g)(x)\,dx\,dk\,dt =$$
$$= -i(2\pi)^{-3/2}\iint \overline{f^\#(k)\,\varphi(x, k)}\, V(x)\,[(H_0-k^2+i\varepsilon)^{-1}g](x)\,dx\,dk =$$
$$= -\frac{i}{4\pi}(2\pi)^{-3/2}\iiint \overline{f^\#(k)\,\varphi(x, k)}\, V(x)\,\frac{e^{-i|x-y|\sqrt{k^2-i\varepsilon}}}{|x-y|}\, g(y)\,dx\,dy\,dk.$$

Переходя к пределу $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}$ под интегралом в (90), видим, что

$$(f, \Omega^+g) = (f, g) + (2\pi)^{-3/2}\iint \overline{f^\#(k)}\, g(y)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}\, V(x)\,\overline{\varphi(x, k)}\,dx\right] dk\,dy =$$
$$= (f, g) + (2\pi)^{-3/2}\int \overline{f^\#(k)}\, g(y)\,[e^{-ik\cdot y} - \overline{\varphi(y, k)}]\,dk\,dy =$$
$$= (f, g) + \int \overline{f^\#(k)}\,\hat{g}(k)\,dk - \int \overline{f^\#(k)}\, g^\#(k)\,dk = \int \overline{f^\#(k)}\,\hat{g}(k)\,dk.$$

При переходе ко второму равенству мы воспользовались уравнением Липпмана—Швингера, а на последнем шаге—условием (82e). Это завершает доказательство формулы (89), а следовательно, и (88). Наш набросок доказательства теоремы XI.41 тем самым закончен. ▮

Собственные функции Липпмана—Швингера $\varphi(x, k)$ особенно полезны потому, что через них выражается S-матрица. Сначала введем вспомогательное понятие.

Определение. Пусть $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3$, $\mathbf{k}'\in\mathbb{R}^3$, $k'^2\notin\mathcal{E}$. Определим

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = (2\pi)^{-3}\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}V(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k}')\,d\mathbf{x};$$

$T(\cdot, \cdot)$ называется T-матрицей.

Теорема XI.42. $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ равномерно непрерывна в любой области вида $\mathbb{R}^3\times\{\mathbf{k}' \mid k'^2\in[\alpha, \beta]\}$, где $\alpha>0$ и $[\alpha, \beta]\cap\mathcal{E}=\varnothing$. Далее, если $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, причем $\hat{f}$ и $\hat{g}$ — функции с носителями на сферических поверхностях, не пересекающихся с $\{\mathbf{k}' \mid k'^2 \in \mathscr{E}\}$, то

$$(f, (S-I)g) = (-2\pi i)\int \overline{\hat{f}(\mathbf{k})}\,\hat{g}(\mathbf{k}')\,T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\,\delta(k^2 - k'^2)\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'. \qquad (91)$$

Прежде чем доказывать теорему XI.42, сделаем ряд замечаний. Во-первых, $\delta(k^2-k'^2)$ в (91) есть краткий способ записи следующего выражения:

$$\int \overline{\hat{f}(\mathbf{k})}\left[\int\limits_{k'^2=k^2} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\,\hat{g}(\mathbf{k}')\,(^1/_2 k')\,d\Omega(\mathbf{k}')\right]d\mathbf{k},$$

где $d\Omega(\mathbf{k}')$ — угловая мера на сфере, а $^1/_2 k'$ — якобиан перехода от координат $\mathbf{k}'$ к $\langle k'^2, \Omega(\mathbf{k}')\rangle$. Формулу (91) часто записывают в виде

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \delta(k-k') - 2\pi i T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\,\delta(k^2-k'^2).$$

Это реализация той схемы, которая рассматривалась в конце § 5.

Отметим еще, что множество функций f и g, разрешенных в уравиении (91), плотно в L^2, так что φ полностью определяет S. Кроме того, S полностью определяется значениями $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ при $k=k'$. Это множество значений называется T-матрицей «на энергетической поверхности». Типичным для физических теорий, и в частности теории возмущений в квантовой теории поля, служит тот факт, что рассеяние описывается величиной «на поверхности», тогда как в теории эта величина определена также и «вне поверхности». Одна из привлекательных черт теории трех тел Фаддеева состоит в том, что T-матрица для системы двух тел *вне поверхности* энергии входит в описание рассеяния трех частиц. Мы не имеем возможности обсудить это подробнее.

Доказательство теоремы XI.42. Так как $S=(\Omega^-)^*\Omega^+$, а $I=(\Omega^+)^*\Omega^+$, то

$$\begin{aligned}(f, (S-I)g) &= (f, (\Omega^- - \Omega^+)^*\Omega^+ g) = ((\Omega^- - \Omega^+)f, \Omega^+ g) = \\ &= \lim_{T\to\infty}\int\limits_{-T}^{T}(e^{iHt}(iV)e^{-iH_0 t}f, \Omega^+ g)\,dt = \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(-i)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|t|}(e^{iHt}Ve^{-iH_0 t}f, \Omega^+ g)\,dt = \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(-i)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|t|}\left(\int \overline{[e^{iHt}Ve^{-iH_0 t}f]^\#}\,(k')[\Omega^+ g]^\#(k')\,dk'\right)dt. \qquad (92)\end{aligned}$$

На предпоследнем шаге мы воспользовались леммой 5, а на последнем — формулой (82е) и тем, что $\Omega^+ g \in \mathscr{H}_{ac}$. В силу (83),

$(\Omega^+g)^\#(k')=\hat{g}(k')$, а в силу (82),

$$[e^{iHt}Ve^{-iH_0t}f]^\#(k')=e^{i|k'|^2t}[Ve^{-iH_0t}f]^\#(k')=$$
$$=(2\pi)^{-3/2}\int e^{i|k'|^2t}V(x)[e^{-iH_0t}f](x)\overline{\varphi(x,k')}\,dx=$$
$$=(2\pi)^{-3}\int e^{i[|k'|^2-|k|^2]t}V(x)e^{ik\cdot x}\overline{\varphi(x,k')}\hat{f}(k)\,dx\,dk.$$

Поэтому выражение в формуле (92) равно

$$(-i)(2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{\infty}dt\Big[\int e^{i(|k|^2-|k'|^2)t-\varepsilon|t|}V(x)\varphi(x,k')\times$$
$$\times e^{-ik\cdot x}\overline{\hat{f}(k)}\hat{g}(k')\,dk'\,dx\,dk\Big].$$

Выполняя интегрирование по t, получаем

$$(f,(S-I)g)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int(-i)\,T(k,k')\frac{2\varepsilon}{(|k|^2-|k'|^2)^2+\varepsilon^2}\overline{\hat{f}(k)}\hat{g}(k')\,dk\,dk'. \tag{93}$$

По определению, $T(k,k')$ есть скалярное произведение $f_k(x)=$ $=(2\pi)^{-3}e^{-ik\cdot x}V^{1/2}(x)$ и $\psi(x,k')$. Так как $\psi(\cdot,k')$ равномерно L^2-непрерывна в рассматриваемых областях, а $f_k(\cdot)$ равномерно L^2-непрерывна, потому что $V\in L^1$, то $T(k,k')$ имеет нужные свойства непрерывности. В результате предельное соотношение $2\varepsilon[(|k|^2-|k'|^2)+\varepsilon^2]^{-1}\to 2\pi\delta(|k|^2-|k'|^2)$, справедливое в смысле мер. на $\varkappa(\mathbb{R}^6)$, можно применить в (93). Этим заканчивается доказательство формулы (91). ∎

При некоторых условиях существует другое доказательство этой теоремы; см. дополнение 3 к § 8 или задачу 67.

Теперь, установив связь между собственными функциями и S-матрицей, мы можем развивать теорию в разных направлениях. Так как φ удовлетворяет уравнению Липпмана—Швингера (81), можно с помощью итераций этого уравнения построить формальные ряды для φ и тем самым для T:

$$T(\mathbf{k},\mathbf{k}')=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(\mathbf{k},\mathbf{k}'), \tag{94a}$$

$$T_0(\mathbf{k},\mathbf{k}')=(2\pi)^{-3}\int e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}V(\mathbf{x})\,dx, \tag{94b}$$

$$T_n(\mathbf{k},\mathbf{k}')=(2\pi)^{-3}(-1)^n(4\pi)^{-n}\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0}V(\mathbf{x}_0)\times$$
$$\times\frac{e^{ik'|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1|}}{|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1|}V(\mathbf{x}_1)\frac{e^{ik'|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}V(\mathbf{x}_2)\ldots$$
$$\ldots V(\mathbf{x}_{n-1})\frac{e^{ik'|\mathbf{x}_{n-1}-\mathbf{x}_n|}}{|\mathbf{x}_{n-1}-\mathbf{x}_n|}V(\mathbf{x}_n)e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}_n}dx_0\ldots dx_n.$$

Ряд (94a) называется **рядом Борна** для T, а главный член этого ряда называется **амплитудой Борна.** Наше изучение $\mathscr{E}$ ((II) в нашей схеме доказательства теоремы XI.41; см. также задачу 60) позволяет легко доказать, что в некоторых случаях ряд Борна сходится.

Теорема XI.43. Пусть $V \in L^1 \cap R$.

(a) Существует такое число K, что ряд Борна для $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ сходится, если $k'^2 > K^2$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Если $\|V\|_R^2 < 4\pi$, то ряд Борна для $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ сходится при всех $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3$.

Доказательство. $T(k, k')$ есть внутреннее произведение фиксированного L^2-вектора и решения $\psi(x, k') = |V(x)|^{1/2} \varphi(x, k')$ модифицированного уравнения Липпмана — Швингера. Функция ψ удовлетворяет L^2-интегральному уравнению, итерации которого приводят к ряду Борна. Если ряд для ψ сходится в L^2 при некотором k', то ряд Борна сходится для этого значения k' и всех k. Чтобы доказать сходимость ряда для ψ, достаточно доказать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяет ψ, есть ядро интегрального оператора $K_{k'}$ с нормой, меньшей единицы. Мы знаем, что $\lim\limits_{k' \to \infty} \|K_{k'}\| = 0$ для $V \in R$ (задача 60), так что (a) выполнено. Если $\|V\|_R^2 < 4\pi$, то норма Гильберта — Шмидта $\|K_{k'}\|_{\text{H.S.}} = (4\pi)^{-1/2} \|V\|_R < 1$ при всех k'. ∎

Пользуясь методами § 7, можно показать, что если $V \in R$, $S(\lambda)$ есть S-оператор для $-\Delta + \lambda V$, λ вещественно, то $S(\lambda)$ имеет операторнозначное аналитическое продолжение в область $\{\lambda \mid |\lambda| \|V\|_R < 4\pi\}$. Теорема XI.43 — только один из многих примеров восстановления S-матрицы по ряду Борна или по другим формальным рядам. Решая L^2-уравнения с ядрами Гильберта — Шмидта методом Фредгольма, можно найти сходящиеся ряды для $N(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ и для $D(k')$, причем $D(\alpha) \neq 0$, если $\alpha^2 \notin \mathscr{E}$, так что $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = N(\mathbf{k}, \mathbf{k}')/D(k')$. Такая реализация T служит отправной точкой для анализа сходимости аппроксимантов Паде, построенных из ряда Борна. Можно показать, что этот метод суммирования сходится в некоторых случаях, когда ряд Борна расходится (см. Замечания). Кроме того, имеется множество результатов, относящихся к сходимости рядов для «парциальных волновых амплитуд», которые мы рассмотрим в § 8.

Второе следствие связи между T и S — это *условие унитарности* (95) для T.

Теорема XI.44. Пусть $V \in L^1 \cap R$; предположим, что $\alpha^2 \notin \mathscr{E}$. Тогда для всех $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3$ с $k = k' = \alpha$

$$\operatorname{Im} T(k, k') = \pi \int \overline{T(k'', k)}\, T(k'', k')\, \delta(k''^2 - \alpha^2)\, d^3 k''. \qquad (95)$$

Доказательство. Так как $\mathscr{E}$ — замкнутое множество, можно найти такие β и γ, что $\alpha \in (\beta, \gamma)$ и $[\beta^2, \gamma^2] \cap \mathscr{E} = \varnothing$. По теореме XI.42, если $f \in \mathscr{S}$ и $\hat{f}$ имеет носитель в $F = \{\mathbf{k} \mid \beta < k < \gamma\}$, то $(\widehat{Sf})(k) = \hat{f}(k) - 2\pi i \int T(k, k')\hat{f}(k')\,\delta(k^2 - k'^2)\,dk'$. С помощью простого предельного перехода можно показать, что эта формула справедлива и тогда, когда $\hat{f}$ только непрерывна (с носителем в F), и что отображение M: $\hat{f} \mapsto \widehat{Sf}$ переводит непрерывные функции с носителем в F в себя. Сопряженное к M отображение, очевидно, задается формулой

$$(M^* g)(k) = g(k) + (2\pi i) \int \overline{T(k', k)}\, g(k')\,\delta(k^2 - k'^2)\,dk'.$$

Соотношение $M^*M = 1$, вытекающее из $S^*S = I$, влечет за собой, что почти для всех пар $\langle k, k' \rangle$ с $|k| = |k'|$, $k, k' \in F$, выполнено (95). Так как обе части этого равенства непрерывны по $\langle k, k' \rangle$ в области $\{\langle k, k' \rangle \in F \times F \mid |k| = |k'|\}$, то (95) выполнено во всей области. ∎

Чтобы оценить важность соотношения унитарности для T, следует понять, какая именно величина измеряется в экспериментах по рассеянию. Для простоты предположим, что V сферически-симметричен, так что $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ зависит лишь от k, k' и $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'$. При данном k и $\cos\theta \in [-1, 1]$ найдем такие $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$, что $k' = k$ и $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = k^2 \cos\theta$. Тогда **амплитуда рассеяния** $f(k, \theta)$ определяется формулой

$$f(k, \theta) \equiv -2\pi^2 T(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \tag{96}$$

Рассуждение, опирающееся отчасти на эвристическое соображение, которое мы приводим в Замечаниях, показывает, что для пучка частиц с энергией $E = k^2$ дифференциальное сечение (см. § 2) задается формулой

$$d\sigma/d\Omega = |f(k, \theta)|^2. \tag{97a}$$

Тогда полное сечение задается формулой

$$\sigma \equiv \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\Omega = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(k, \theta)|^2 \sin\theta\,d\theta. \tag{97b}$$

Если теперь записать соотношение унитарности при $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, то оно даст

$$\operatorname{Im} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{\pi |\mathbf{k}|}{2} \int |T(\mathbf{k}'', \mathbf{k})|^2\, d\Omega(\mathbf{k}''),$$

или

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(k, 0). \tag{97c}$$

Соотношение (97с) часто называют **оптической теоремой.** Эта теорема выражает тот физический факт, что ослабление пучка в результате рассеяния (левая часть соотношения (97с)) должно компенсироваться интерференцией между исходным пучком и волной, рассеянной вперед (правая часть соотношения (97с)).

Итак, из (97а) видно, что непосредственно измеряемой величиной является только модуль f. Унитарность позволяет отчасти узнать f. Например, с помощью (97с) можно определить $\arg f(k, 0)$ с точностью до неоднозначности, связанной с отражением относительно мнимой оси, если известно $(d\sigma/d\Omega)(k, \theta)$ при всех θ. И в самом деле, как мы видели в § V.6, если $d\sigma/d\Omega$ достаточно «мала», то унитарность и дифференциальное сечение однозначно определяют f при всех θ.

Дополнение к § XI.6. Введение в метод вспомогательного пространства для разложения по собственным функциям

Мы рассмотрели разложение по собственным функциям путем решения модифицированного уравнения Липпмана—Швингера в L^2. Часто бывает удобно действовать несколько иначе, пользуясь банаховым пространством X, которое непрерывно вложено в $\mathcal{H}$ как плотное подпространство, $X \subset \mathcal{H}$. При этом, используя изоморфизм между $\mathcal{H}$ и его сопряженным, можно, естественно, вложить $\mathcal{H}$ в X^*, а следовательно, X в X^*; это означает, что для $\varphi \in \mathcal{H}$ мы определим $l_\varphi \in X^*$ посредством $l_\varphi(x) = (\varphi, x)$. Тройка $X \subset \mathcal{H} \subset X^*$ напоминает конструкцию $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{-1}$ в теории квадратичных форм (теорема VIII.15).

Если задана тройка пространств $X \subset \mathcal{H} \subset X^*$, то можно попробовать получить разложение по собственным функциям при помощи такого двухступенчатого процесса. (i) Показать, что $(H-z)^{-1}$: $X \to X^*$ непрерывно продолжается с $\operatorname{Im} z > 0$ на вещественную ось или на вещественную ось за вычетом исключительного множества (см. теорему XI.21). (ii) Воспользоваться операторами $(H-k^2-i0)^{-1}$, чтобы получить обобщенные собственные функции $\varphi \in X^*$. Из (i) следует, что $(f, (H-z)^{-1} f)$ может быть продолжено на вещественную ось для $f \in X$, а отсюда, как мы увидим в § XIII.6, вытекает, что H не имеет сингулярного спектра. По этой причине уже первый шаг (i) представляет значительный интерес; именно это мы проделаем в § XIII.8 для очень широкого класса операторов $-\Delta + V$, опираясь на довольно тонкие рассуждения. Здесь же мы проиллюстрируем идеи первого шага на очень специальном примере, когда V экспоненциально убывает. Затем мы опишем второй шаг (ii), ограничившись вдобавок одномерным случаем. В Замечаниях будет указана обширная литература, относящаяся к более общим ситуациям.