Соотношение (97с) часто называют **оптической теоремой.** Эта теорема выражает тот физический факт, что ослабление пучка в результате рассеяния (левая часть соотношения (97с)) должно компенсироваться интерференцией между исходным пучком и волной, рассеянной вперед (правая часть соотношения (97с)).

Итак, из (97а) видно, что непосредственно измеряемой величиной является только модуль f. Унитарность позволяет отчасти узнать f. Например, с помощью (97с) можно определить $\arg f(k, 0)$ с точностью до неоднозначности, связанной с отражением относительно мнимой оси, если известно $(d\sigma/d\Omega)(k, \theta)$ при всех θ. И в самом деле, как мы видели в § V.6, если $d\sigma/d\Omega$ достаточно «мала», то унитарность и дифференциальное сечение однозначно определяют f при всех θ.

Дополнение к § XI.6. Введение в метод вспомогательного пространства для разложения по собственным функциям

Мы рассмотрели разложение по собственным функциям путем решения модифицированного уравнения Липпмана — Швингера в L^2. Часто бывает удобно действовать несколько иначе, пользуясь банаховым пространством X, которое непрерывно вложено в $\mathcal{H}$ как плотное подпространство, $X \subset \mathcal{H}$. При этом, используя изоморфизм между $\mathcal{H}$ и его сопряженным, можно, естественно, вложить $\mathcal{H}$ в X^*, а следовательно, X в X^*; это означает, что для $\varphi \in \mathcal{H}$ мы определим $l_\varphi \in X^*$ посредством $l_\varphi(x) = (\varphi, x)$. Тройка $X \subset \mathcal{H} \subset X^*$ напоминает конструкцию $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{-1}$ в теории квадратичных форм (теорема VIII.15).

Если задана тройка пространств $X \subset \mathcal{H} \subset X^*$, то можно попробовать получить разложение по собственным функциям при помощи такого двухступенчатого процесса. (i) Показать, что $(H-z)^{-1}\colon X \to X^*$ непрерывно продолжается с $\operatorname{Im} z > 0$ на вещественную ось или на вещественную ось за вычетом исключительного множества (см. теорему XI.21). (ii) Воспользоваться операторами $(H-k^2-i0)^{-1}$, чтобы получить обобщенные собственные функции $\varphi \in X^*$. Из (i) следует, что $(f, (H-z)^{-1} f)$ может быть продолжено на вещественную ось для $f \in X$, а отсюда, как мы увидим в § XIII.6, вытекает, что H не имеет сингулярного спектра. По этой причине уже первый шаг (i) представляет значительный интерес; именно это мы проделаем в § XIII.8 для очень широкого класса операторов $-\Delta + V$, опираясь на довольно тонкие рассуждения. Здесь же мы проиллюстрируем идеи первого шага на очень специальном примере, когда V экспоненциально убывает. Затем мы опишем второй шаг (ii), ограничившись вдобавок одномерным случаем. В Замечаниях будет указана обширная литература, относящаяся к более общим ситуациям.

Пусть X_a — гильбертово пространство функций, причем $e^{a|x|}f \in L^2 \equiv \mathscr{H}$ с естественной нормой. Тогда $X_a \subset \mathscr{H} \subset X_{-a} = X_a^*$ при $a > 0$, как и должно быть для вышеописанной конструкции. Прежде всего будет доказана

Лемма 1. Функция $(-\Delta - k^2)^{-1}$: $X_a \to X_{-a}$, определенная при $\operatorname{Im} k > 0$, продолжается в область $\operatorname{Im} k > -a$, $\arg k \neq -\pi/2$ как аналитическая функция со значениями во множестве компактных операторов из X_a в X_{-a}. То же самое верно и в отношении функций $\partial_l(-\Delta - k^2)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $G_0(x, y; E)$ — интегральное ядро оператора $(-\Delta - E)^{-1}$ при $E \notin [0, \infty)$, однозначно определенное при всех x, y, когда $x \neq y$, требованием непрерывности. Мы утверждаем прежде всего, что $G_0(x, y; E)$ аналитически продолжается на все значения $\sqrt{E}$ с $\arg(\sqrt{E}) \neq -\pi/2$ и удовлетворяет оценке

$$|G_0(x, y; E)| \leqslant C_{\varepsilon, \delta}(|x-y|^{-(n-2)} + E^{(n-2)/2})\, e^{|x-y|(|\operatorname{Im}\sqrt{E}|+\varepsilon|E|^{1/2})} \tag{98}$$

при $n \geqslant 3$ и $(\operatorname{Re}\sqrt{E})/|\sqrt{E}| \geqslant \delta$. Если $n = 1$, то выполнена аналогичная оценка без члена $|x-y|^{-(n-2)}$, а если $n = 2$, то множитель перед экспонентой заменяется на $|\ln(|x-y|^{-1}E^{1/2})| + 1$. При $n = 3$ и $n = 1$ оценка (98) очевидна из явного выражения для G_0. Для произвольного n доказательство оценки (98), которая *не будет* наилучшей, мы оставляем читателю (задача 65).

Пусть $H(x, y; k)$ — функция $e^{-a|x|}G_0(x, y; k^2)e^{-a|y|}$. В силу оценки (98), для любого k с $\operatorname{Im} k > -a$, $\arg k \neq -\pi/2$

$$|H(x, y; k)| \leqslant h_k(x-y),$$

где $h_k \in L^1$. Если $n \geqslant 3$, то $h_k(x) = \text{const}\,|x-y|^{-(n-2)}e^{-\nu|x|}$; если $n = 2$, то $h_k(x) = \text{const}\,(|\ln|x|| + 1)e^{-\nu|x|}$; если $n = 1$, то $h_k(x) = \text{const}\,e^{-\nu|x|}$. Из неравенства Юнга следует, что $H(x, y; k)$ — ядро ограниченного интегрального оператора. Этот оператор, очевидно, аналитичен по k и, по теореме XI.20, компактен при $\operatorname{Im} k > 0$, а следовательно, и при всех k в силу аналитичности продолжения и потому, что множество компактных операторов замкнуто по норме. Итак, $e^{-a|x|}(-\Delta - k^2)^{-1}e^{-a|y|}$ — аналитическая функция при $\operatorname{Im} k > -a$, $\arg k \neq -\pi/2$, принимающая значения во множестве компактных операторов в L^2. Так как $e^{\pm a|x|}$ — унитарное отображение из L^2 в $X_{\pm a}$, то лемма доказана. Вопрос о $\partial_l(-\Delta - k^2)^{-1}$ мы оставляем читателю (задача 65). ∎

Допустим теперь, что $|V(x)| \leqslant ce^{-2a|x|}$. Тогда, очевидно, отображение V: $X_{-a} \to X_a$ ограничено, так что $V(-\Delta - k^2)^{-1}$ при каждом k есть компактный оператор из X_a в себя. Далее, $\eta = -V(-\Delta - k^2)^{-1}\eta$ не имеет решений в X_a при $\operatorname{Im} k > 0$, $\arg k \neq$

$\neq \pi/2$, так как оно не имеет решений в L^2, ибо если $\varphi \in L^2$ удовлетворяет этому уравнению, то $\psi = (-\Delta - k^2)^{-1}\varphi$ принадлежит $D(H)$ и удовлетворяет уравнению $(-\Delta + V)\psi = k^2\psi$. Из аналитической теоремы Фредгольма следует, что оператор $(1 + V(-\Delta - k^2)^{-1})^{-1}$ имеет аналитическое продолжение из области $\operatorname{Im} k > 0$ в некоторую окрестность N множества $\mathbb{R}$ с исключенным дискретным множеством $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$. Так как $(H - k^2)^{-1} = (-\Delta - k^2)^{-1} \times (1 + V(-\Delta - k^2)^{-1})^{-1}$, то мы рассмотрели случай (a) следующей ниже теоремы. Случаем (b) мы воспользуемся в § 11.

Теорема XI.45. Пусть H — один из следующих операторов в $L^2(\mathbb{R}^n)$:

(a) $H = -\Delta + V$, причем $|V(x)| \leqslant Ce^{-2a|x|}$;

(b) $H\eta = -\alpha\nabla \cdot \beta\nabla(\alpha\eta)$, причем α и β — строго положительные функции, такие, что $\alpha - \alpha_0$, $\beta - \beta_0 \in C_0^\infty$ при подходящих постоянных α_0, $\beta_0 > 0$.

Тогда H самосопряжен на $D(-\Delta)$ и существуют дискретное множество $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$ и окрестность N множества $\mathbb{R}$, такие, что $(H - k^2)^{-1}$ имеет продолжение как аналитическая функция со значениями в $\mathscr{L}(X_a, X_{-a})$ из области $\{k \mid \operatorname{Im} k > 0, -k^2$ не является собственным значением $H\}$ в $N \diagdown \mathscr{E}$. В случае (b) параметр a произволен.

Доказательство. Нам осталось доказать только случай (b). По правилу Лейбница запишем

$$H = -f\Delta + g \cdot \nabla + h,$$

где g, h, $f_1 \equiv f - f_0 \in C_0^\infty$ и $f_0 = \alpha_0^2\beta_0$. Далее, $f = \alpha^2\beta$ строго положительна. Самосопряженность H на $D(-\Delta)$ просто следует из теоремы X.13, и это мы оставили читателю (задача 66). Пусть $V = H - H_0$, $H_0 = -f_0\Delta$. Как и прежде, теорема будет доказана, если показать, что $(1 + V(H_0 - k^2)^{-1})^{-1}$ — аналитическая функция со значениями в $\mathscr{L}(X_a, X_a)$. Оператор $V(H_0 - k^2)^{-1}$ некомпактен, однако если $W = g \cdot \nabla + h$, то

$$\begin{aligned}1 + V(H_0 - k^2)^{-1} &= (H_0 + V - k^2)(H_0 - k^2)^{-1} = \\ &= [ff_0^{-1}(H_0 - k^2) + W + k^2 f_1 f_0^{-1}](H_0 - k^2)^{-1} = \\ &= ff_0^{-1} + [(W + k^2 f_1 f_0^{-1})(H_0 - k^2)^{-1}] = \\ &= (ff_0^{-1})[1 + (f^{-1}f_0 W + f^{-1}f_1 k^2)(H - k^2)^{-1}].\end{aligned}$$

В квадратных скобках стоит I плюс аналитическая функция, принимающая значения во множестве компактных операторов из $\mathscr{L}(X_a)$, так что $I + V(H_0 - k^2)^{-1}$ обратим (по теореме VI.14) всюду, кроме некоторого дискретного множества. ■

Перейдем теперь к получению разложения по собственным функциям оператора $-d^2/dx^2 + V(x)$, где $|V(x)| \leqslant Ce^{-2a|x|}$. Следующая эвристическая формула лежит в основе всех подобных разложений:

$$\operatorname{Im}(H-k^2-i0)^{-1}=W(k)^*[\operatorname{Im}(H_0-k^2-i0)^{-1}]W(k), \tag{99}$$

где $W(k)=(1+V(H_0-k^2-i0)^{-1})^{-1}$ и

$$\operatorname{Im}(A-k^2-i0)^{-1}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(2i)^{-1}[(A-k^2-i\varepsilon)^{-1}-(A-k^2+i\varepsilon)^{-1}].$$

Равенство (99) формально справедливо, так как если $\operatorname{Im} z>0$, A самосопряжен и $B=A+C$ самосопряжен на $D(A)$, то

$$\begin{aligned}(B-z)^{-1}-(B-\bar z)^{-1}&=2(\operatorname{Im} z)(B-\bar z)^{-1}(B-z)^{-1}=\\ &=2(\operatorname{Im} z)[(1+C(A-z)^{-1})^{-1}]^*(A-\bar z)^{-1}(A-z)^{-1}(1+C(A-z)^{-1})^{-1}=\\ &=[(1+C(A-z)^{-1})^{-1}]^*[(A-z)^{-1}-(A-\bar z)^{-1}](1+C(A-z)^{-1})^{-1},\end{aligned} \tag{100}$$

так что формула (99) получится, если можно положить $\operatorname{Im} z=0$. В рассматриваемом случае формула (99) справедлива для $k^2\notin\mathscr{E}$, если интерпретировать $(H-k^2-i0)^{-1}$ и $(H_0-k^2-i0)^{-1}$ как отображения из X_a в X_{-a}, $W(k)$ — как отображение из X_a в X_a и $W(k)^*$ — как отображение из X_{-a} в X_{-a}. Такие отождествления можно сделать, если k^2-i0 заменить на z с $\operatorname{Im} z>0$; при этом все отображения аналитичны вплоть до k^2+i0 (кроме точек из $\mathscr{E}$), так что из формулы (100) следует формула (99).

В дополнение к формуле (99) нам потребуется тот факт, что $H_0=-d^2/dx^2$ имеет разложение по собственным функциям $\varphi_0(x, k)=e^{ikx}$. Отметим, что эти собственные функции лежат в X_{-a} и что, поскольку ядро оператора $(H_0-k^2-i0)^{-1}$ есть $^1/_2\exp(ik|x-y|)$, для $f\in X_a$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f,(H_0-k^2-i0)^{-1}f)&={}^1/_2\iint\overline{f(x)}\sin(k(x-y))f(y)\,dx\,dy=\\ &={}^1/_2[(f, \varphi_0(k))(\varphi_0(k), f)+(f, \varphi_0(-k))(\varphi_0(-k), f)].\end{aligned}$$

Определив $\varphi(k)=W(|k|)\varphi_0(k)$, мы видим, что вследствие (99)

$$\operatorname{Im}(f,(H-k^2-i0)^{-1}f)={}^1/_2\sum_{\delta=\pm 1}|(\varphi(\delta k), f)|^2.$$

При помощи формулы Стоуна получим, что для $f\in X_a$ и $[a, b]\subset$ $\subset[0, \infty)\setminus\mathscr{E}$

$$(f, P_{[a, b]}f)=\int_{a<k^2<b}|f^\#(k)|^2\,dk,$$

где $f^\#(k)=(2\pi)^{-1/2}(\varphi(k), f)$. Начиная с этого места, простой переход к соотношению Планшереля, формула обращения для $^\#$ и связь с теорией рассеяния получаются точно так же, как в § 6.