XI.7 Квантовое рассеяние IV: дисперсионные соотношения

Строгие доказательства дисперсионных соотношений подобны соскам у мужчины — в них нет ни пользы, ни красоты.

М. Л. ГОЛДБЕРГЕР

В согласии со схемой, изложенной в конце § 5, мы убедились в том, что оператор рассеяния двух частиц имеет «ядро» $\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') - 2\pi i\delta(k^2-k'^2)\,T(\mathbf{k},\mathbf{k}')$, где ядро $T(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ непрерывно на $F \equiv \{\langle\mathbf{k},\mathbf{k}'\rangle \mid k^2=k'^2,\ k^2 \notin \mathscr{E}\}$. В этом разделе мы продолжим изучение T. Наша главная цель состоит в том, чтобы показать, что T — аналитическая функция в некоторой окрестности F, если V принадлежит некоторому узкому классу потенциалов. Чтобы проиллюстрировать метод и одновременно показать, что аналитичность $T(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ есть общее явление, прежде всего будет доказана

Теорема XI.46. Пусть $V \in L^1 \cap R$ и $\mathbf{e}$ — фиксированный единичный вектор в $\mathbb{R}^3$. Тогда существует функция $\tau_F(k)$, мероморфная в $\{k \mid \operatorname{Im} k > 0\}$ и такая, что

(a) если k_0 вещественно и $k_0^2 \notin \mathscr{E}$, то

$$\lim_{k\to k_0,\ \operatorname{Im} k>0} \tau_F(k) = T(k_0\mathbf{e},\ k_0\mathbf{e}),$$

причем сходимость равномерна на компактных подмножествах в $\mathbb{R}\setminus\mathscr{E}^{1/2}$;

(b) полюсы τ_F в верхней полуплоскости лежат только на мнимой оси в тех точках k, в которых k^2 есть собственное значение оператора $-\Delta+V$, причем все эти полюсы простые;

(c) $\tau_F(-\bar{k}) = \overline{\tau_F(k)}$;

(d) $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_F(k) = \tau_{\mathrm{Born}} \equiv (2\pi)^{-3}\int V(x)\,dx$, причем сходимость равномерна в замкнутой полуплоскости, если τ_F продолжена на $\mathbb{R}\setminus\mathscr{E}^{1/2}$.

Доказательство. При вещественных k определим $\tau_F(k) = T(k\mathbf{e},\ k\mathbf{e})$. Найдем теперь какое-нибудь продолжение $\tau_F(k)$ в верхнюю полуплоскость. Мы знаем, что для вещественных k

$$\tau_F(k) = (2\pi)^{-3}\int e^{-ik\mathbf{e}\cdot x}V^{1/2}(x)\,\psi(x,\ k\mathbf{e})\,dx, \tag{101}$$

где ψ — решение модифицированного уравнения Липпмана — Швингера (84). Ядро уравнения (84) можно продолжить в верхнюю полуплоскость k, но однородный член $|V(x)|^{1/2}e^{ik\mathbf{e}\cdot x}$ может не принадлежать L^2, если $\operatorname{Im} k \neq 0$. Поэтому мы еще раз изменим уравнение Липпмана — Швингера. Замечая, что в уравнение (101) входит величина $e^{-ike\cdot x}\psi(x, ke)$, положим по определению

$$\chi(x, k) = e^{-ike\cdot x}\psi(x, ke).$$

Тогда

$$\tau_F(k) = (2\pi)^{-3}\int V^{1/2}(x)\chi(x, k)\,dx \tag{102a}$$

и χ есть решение уравнения

$$\chi(x, k) = |V(x)|^{1/2} + \int M(x, y; k)\chi(y, k)\,dy, \tag{102b}$$

где

$$M(x, y; k) = -(4\pi|x-y|)^{-1}|V(x)|^{1/2}V^{1/2}(y)\exp\{ik[|x-y| - -e\cdot(x-y)]\}. \tag{102c}$$

Так как $|(x-y)\cdot e| \leqslant |x-y|$ при всех x и y, то $M(x, y; k)$ определяет оператор Гильберта—Шмидта M_k при всех k с $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. С помощью отдельного рассуждения (задача 68) доказывается, что уравнение $M_k\psi = \psi$ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение $K_k\varphi = \varphi$, где $K_k = -|V|^{1/2}(H_0 - k^2)^{-1}V^{1/2}$. Можно показать также, что если $K_k\varphi = \varphi$ и $\operatorname{Im} k > 0$, то $\eta = (H_0 - k^2)^{-1}V^{1/2}\varphi \in Q(-\Delta + V)$ и $(H_0 + V)\eta = k^2\eta$ (задача 69). Следовательно, по аналитической теореме Фредгольма (теорема VI.14), $(I - M_k)^{-1}$ существует всюду, за исключением точек k^2, являющихся собственными значениями оператора $-\Delta + V$, и мероморфна в верхней полуплоскости. Из того что $(-\Delta + V - k^2)^{-1}$ имеет только простые полюсы, следует, что и $(I - M_k)^{-1}$ имеет только простые полюсы (задача 71). Определим теперь для k в верхней полуплоскости

$$\tau_F(k) = (2\pi)^{-3}(V^{1/2}, (1 - M_k)^{-1}|V|^{1/2}).$$

Утверждения (a) и (b) очевидны.

Если $k \to \infty$ в замкнутой полуплоскости, то $\|M_k\| \to 0$ (см. задачу 60), так что (d) выполнено. Наконец, при чисто мнимом k каждый член ряда, получаемого итерацией (102b), принимает вещественные значения, и ряд сходится, если $|k|$ велико. Следовательно, $\overline{\tau_F(-\bar{k})} = \tau_F(k)$, если $|k|$ велико и $\operatorname{Re} k = 0$. Полное утверждение (c) получается аналитическим продолжением ■

Если V сферически-симметричен, то τ_F не зависит от $\mathbf{e}$ и $f(\mathbf{k}) = -2\pi^2\tau_F(\mathbf{k})$ называется **амплитудой рассеяния вперед.** В предыдущем разделе мы показали, что $\operatorname{Im}\tau_F(\mathbf{k})$ определяется унитарностью и полным сечением рассеяния. Замечательно, что $\operatorname{Re}\tau_F(k)$ определяется $\operatorname{Im}\tau_F(k)$ и конечным числом параметров—по одному на каждое связанное состояние. Для простоты мы рассмотрим случай, когда $\mathscr{E} = \varnothing$. Тогда имеет место

Следствие. Если $V \in R \cap L^1(\mathbb{R}^3)$, $\mathscr{E} = \varnothing$ и если мы для вещественных положительных E положим $f(E) = -(2\pi)^2 \tau_F(\sqrt{E})$, то

$$\operatorname{Re} f(E) = \mathscr{P} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f(E')}{E'-E} \frac{dE'}{\pi} + f_{\text{Born}} + \sum_{j=1}^n \frac{r_j}{E_j - E}, \tag{103}$$

где $\mathscr{P} \int_0^\infty$ — главное значение интеграла в смысле Коши, $f_{\text{Born}} = -(4\pi)^{-1} \int V(x)\,dx$, а $E_1, \ldots, E_n$ — энергия связанных состояний оператора $-\Delta + V$.

Набросок доказательства. Это простое применение аналитических свойств, установленных в теореме XI.46; все детали мы оставляем читателю (задача 72). Функция $f(E)$ аналитична на плоскости, за исключением положительной вещественной полуоси и точек $E_1, \ldots, E_n$. Пусть E имеет положительные мнимую и вещественную части. В силу интегральной теоремы Коши,

$$f(E) - f_{\text{Born}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(E') - f_{\text{Born}}}{E' - E} dE',$$

где C — контур, изображенный на рис. XI.9. Так как $f(E') - f_{\text{Born}} \to 0$ при $E' \to \infty$, то часть контура, обозначенная C_0, не вносит

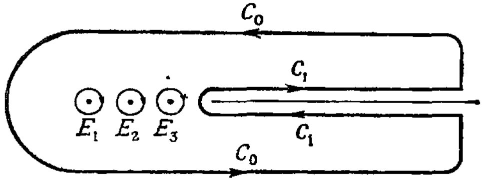

Рис. XI.9. Контур интегрирования.

вклада, если удалить ее на бесконечность. Поэтому

$$f(E) = f_{\text{Born}} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(E') - f_{\text{Born}}}{E' - E} dE' + \sum_{j=1}^n \frac{2r_j}{E_j - E}.$$

Теперь фиксируем E_0 на вещественной оси, и пусть $E = E_0 + i\varepsilon$, $\varepsilon \downarrow 0$. Пользуясь формулой (см. (V.4)) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (x - E_0 - i\varepsilon)^{-1} = \mathscr{P}(x - E_0)^{-1} + i\pi\delta(x - E_0)$, получаем (103). ∎

Формула (103) называется **дисперсионным соотношением для рассеяния вперед.** Любопытный аспект таких дисперсионных соотношений и аналитичности τ_F состоит в том, что они устанавливают взаимосвязь между рассеянием и связанными состояниями.

В частности, если мы измерим амплитуду $f(E)$ рассеяния вперед, мы сможем определить энергии связанных состояний (по крайней мере для тех амплитуд, у которых $r_j \neq 0$) с помощью дисперсионного соотношения (103). Эта связь между рассеянием и связанными состояниями демонстрируется также теоремой Левинсона (теорема XI.59).

Для рассмотрения более общих аналитических свойств мы потребуем, чтобы потенциал V экспоненциально убывал в том смысле, что $Ve^{\alpha|x|} \in L^1 \cap R$ с неким $\alpha > 0$. Для простоты предположим, что V сферически-симметричен. В этом случае функция $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ зависит лишь от двух переменных $E = k^2$ и $\cos\theta = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'/E$ в области $F \cap \{\langle \mathbf{k}, \mathbf{k}'\rangle \mid k = k'\}$. Вместо последней переменной часто пользуются переменной Δ, определенной посредством $\Delta^2 \equiv {}^1/_2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = {}^1/_2 E(1 - \cos\theta)$. «Физические» области в переменных $\langle E, \cos\theta\rangle$ или $\langle E, \Delta\rangle$ суть соответствующие образы множества $\{\langle \mathbf{k}, \mathbf{k}'\rangle \in \mathbb{R}^6 \mid k = k'\}$, т. е. $\{\langle E, \cos\theta\rangle \mid 0 \leqslant E < \infty,\ -1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1\}$ и $\{\langle E, \Delta\rangle \mid 0 \leqslant E < \infty,\ 0 \leqslant \Delta \leqslant \sqrt{E}\}$. Полезно также выделить борновский член:

$$f_{\mathrm{B}}(\Delta) = -(4\pi)^{-1} \int e^{-2i\Delta \mathbf{e}\cdot x} V(x)\, dx.$$

Он не зависит от единичного вектора $\mathbf{e}$ ни при каком фиксированном $\mathbf{e}$. Если $Ve^{\alpha|x|} \in L^1$, то $f_{\mathrm{B}}(\Delta)$ аналитичен в области $|\operatorname{Im}\Delta| < \alpha/2$. Общий результат здесь таков.

Теорема XI.47. Предположим, что $Ve^{\alpha|x|} \in R$ с неким $\alpha > 0$. Пусть $f(k, \Delta)$ — амплитуда рассеяния, определенная в области $G \equiv \{\langle k, \Delta\rangle \mid k \geqslant 0,\ k^2 \notin \mathscr{E},\ 0 \leqslant \Delta \leqslant k\}$. Пусть $0 < \beta \leqslant \alpha$ и

$$D_\beta = \{\langle k, \Delta\rangle \in \mathbb{C}^2 \mid |\operatorname{Im}\Delta| < \beta,\ 4\operatorname{Im} k > \alpha - \beta,\ |\operatorname{Im}\sqrt{k^2 - \Delta^2}| - |\operatorname{Im} k| < \sqrt{\alpha^2 - (\operatorname{Im}\Delta)^2}\},$$

и, наконец, положим $D = \bigcup_{0 < \beta \leqslant \alpha} D_\beta$. Тогда существует функция $g(k, \Delta)$, мероморфная в D и такая, что если $\langle k, \Delta\rangle \in G$, то $g(k, \Delta) = f(k, \Delta) - f_{\mathrm{Born}}(\Delta)$. Далее, g не имеет полюсов в $D \cap \{\langle k, \Delta\rangle \mid k \in \mathbb{R}\}$, а полюсы в $D \cap \{\langle k, \Delta\rangle \mid \operatorname{Im} k > 0\}$ могут быть только в тех точках k, для которых k^2 является собственным значением оператора $H_0 + V$. В частности:

(a) $f(k, \Delta)$ имеет аналитическое продолжение в окрестность физической области, и исключительные точки $\mathscr{E}$ суть ее устранимые особенности;

(b) обозначим через $h(k, z)$ функцию g в новых переменных, где $z = 1 - 2k^{-2}\Delta^2$, так что $z = \cos\theta$ в физической области. Тогда при фиксированном k функция $h(k, z)$ аналитична в эллипсе с центром в $z = 0$ и фокусами в $z = \pm 1$ и с большой полуосью $1 + 2k^{-2}\alpha^2$. Эта область называется **эллипсом Лемана.**

Доказательство этой теоремы можно найти в литературе, приведенной в Замечаниях. Главная идея — та же, что и в доказательстве теоремы XI.46, а именно — введение должным образом видоизмененного уравнения Липпмана—Швингера. Для доказательства устранимости особенностей, входящих в исключительное множество $\mathscr{E}$, можно воспользоваться унитарностью и разложением по парциальным волнам, которое рассмотрено в следующем разделе. Так как мы будем пользоваться эллипсом Лемана в следующем разделе, то покажем, что он лежит в D. Фиксируем вещественное k. При этом $\langle k, \Delta\rangle \in D$ тогда и только тогда, когда $(\operatorname{Im}\Delta)^2+(\operatorname{Im}\sqrt{k^2-\Delta^2})^2<\alpha^2$. Но $\Delta=k\sqrt{{}^1/_2(1-z)}$ и $\sqrt{k^2-\Delta^2}=$ $=k\sqrt{{}^1/_2(1+z)}$. Следовательно, $\langle k, \Delta\rangle \in D$ тогда и только тогда, когда

$$(\operatorname{Im}\sqrt{1-z})^2+(\operatorname{Im}\sqrt{1+z})^2<2\alpha^2/k^2.$$

Так как $|w|^2=\operatorname{Re}(w^2)+2(\operatorname{Im} w)^2$, то мы видим, что это условие эквивалентно следующему:

$$|1-z|+|1+z|<4\alpha^2k^{-2}+\operatorname{Re}(1-z)+\operatorname{Re}(1+z)=2(1+2\alpha^2k^{-2}).$$

Но это — в точности интересующий нас эллипс.

Наконец, опишем один сильный результат об аналитических свойствах потенциалов специального вида.

Определение. **Обобщенный потенциал Юкавы** есть сферически-симметричная функция на $\mathbb{R}^3$ вида

$$V(r)=\sum_{j=0}^{N} r^{j-1}\int_{\mu_0}^{\infty} e^{-\mu r}\,d\rho_j(\mu),$$

где $\mu_0>0$, N — целое число и $\rho_0, \ldots, \rho_N$ — вещественные (но не обязательно положительные) меры с конечной полной вариацией.

Эти потенциалы являются «суперпозициями» основных **потенциалов Юкавы** $r^{-1}e^{-\mu r}$; действительно, легко видеть, что $V(r)=$ $=y^{-1}\int_{\mu_0}^{\infty} e^{-\mu r}T(\mu)\,d\mu$, где T — обобщенная функция $T=\sum_{j=0}^{N} D^j\rho_j$. Обобщенные потенциалы Юкавы обладают рядом важных свойств.

(i) Так как величина $r|V(r)|\leqslant e^{-\mu r}\sum_{j=0}^{N}\|\rho_j\|r^j$ ограничена величиной $Ce^{-\mu_0 r/2}$, то V принадлежит $L^2(\mathbb{R}^3)$. Следовательно, оператор $-\Delta+V$ самосопряжен на $D(-\Delta)$. (ii) V экспоненциально убывает, поэтому применима теорема XI.47. (iii) Потенциал $V(r)$ аналитически продолжается в область $\{r\,|\,|\arg r|<\pi/2\}$ и при любых вещественных θ, таких, что $|\theta|<\pi/2$, $V_\theta(r)\equiv V(e^{i\theta}r)$ принадлежит L^2. Это последнее свойство будет играть важную роль в § XI.8 и XIII.10. Оно нужно также для доказательства следующего результата.

Теорема XI.48. Пусть $f(k, \Delta)$ — амплитуда рассеяния на обобщенном потенциале Юкавы. Фиксируем вещественное k. Тогда $f(k, \Delta)$ может быть аналитически продолжена в область z-плоскости $(z = \cos\theta)$ $\{z \mid z \notin [\zeta(k), \infty)\}$, где $\zeta(k) = 1 + 2k^{-2}\mu_0^2$.

Это аналитическое свойство наряду с другими свойствами f обсуждается в Замечаниях.

XI.8. Квантовое рассеяние V: центральные потенциалы

В этом разделе мы рассматриваем некоторые аспекты двухчастичного рассеяния в случае сферически-симметричных потенциалов, т. е. потенциалов, зависящих лишь от $|x|$. В таком случае говорят о центральных потенциалах. Излагаемый нами материал включает в себя прежде всего дополнительные свойства, обусловленные сферической симметрией. Отметим, однако, что многие результаты уже развитой нами теории рассеяния, а также спектральной теории из гл. XIII легче доказываются и обобщаются в центральном случае (см., например, теорему XI.31 и дополнение 3 к этому разделу). В замечаниях к этому разделу даны литературные указания, относящиеся к этим особенностям центральных потенциалов.

Поскольку здесь рассматриваются весьма различные вопросы, этот раздел разбит на шесть частей. (A) Обсуждается редукция S-оператора с учетом симметрий. (B) Это приводит к формальному разложению по парциальным волнам для амплитуды рассеяния $f(E, \theta)$. Применяя аналитичность в эллипсе Лемана, мы докажем, что это разложение сходится *равномерно*, когда $Ve^{\alpha|x|} \in R$ с некоторым $\alpha > 0$. (C) Амплитуды парциальных волн мы связываем с величиной, определяемой из стационарного радиального уравнения Шредингера и называемой фазовым сдвигом. (D) Изучается нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, которому удовлетворяет фазовый сдвиг s-волны. (E) Излагается метод функций Йоста для исследования амплитуды парциальной s-волны, в частности доказывается теорема Левинсона, устанавливающая соответствие между числом связанных состояний и данными рассеяния. (F) Для случая, когда V — обобщенный потенциал Юкавы, изучаются аналитические свойства амплитуды s-волны.

Нигде, кроме краткого обсуждения в Замечаниях, мы не касаемся техники продолжения по угловому моменту, а также теории Редже. Центральной с разных точек зрения теоремой раздела