в § XI.8 и XIII.10. Оно нужно также для доказательства следующего результата.

Теорема XI.48. Пусть $f(k, \Delta)$ — амплитуда рассеяния на обобщенном потенциале Юкавы. Фиксируем вещественное k. Тогда $f(k, \Delta)$ может быть аналитически продолжена в область z-плоскости $(z = \cos\theta)$ $\{z \mid z \notin [\zeta(k), \infty)\}$, где $\zeta(k) = 1 + 2k^{-2}\mu_0^2$.

Это аналитическое свойство наряду с другими свойствами f обсуждается в Замечаниях.

XI.8. Квантовое рассеяние V: центральные потенциалы

В этом разделе мы рассматриваем некоторые аспекты двухчастичного рассеяния в случае сферически-симметричных потенциалов, т. е. потенциалов, зависящих лишь от $|x|$. В таком случае говорят о центральных потенциалах. Излагаемый нами материал включает в себя прежде всего дополнительные свойства, обусловленные сферической симметрией. Отметим, однако, что многие результаты уже развитой нами теории рассеяния, а также спектральной теории из гл. XIII легче доказываются и обобщаются в центральном случае (см., например, теорему XI.31 и дополнение 3 к этому разделу). В замечаниях к этому разделу даны литературные указания, относящиеся к этим особенностям центральных потенциалов.

Поскольку здесь рассматриваются весьма различные вопросы, этот раздел разбит на шесть частей. (A) Обсуждается редукция S-оператора с учетом симметрий. (B) Это приводит к формальному разложению по парциальным волнам для амплитуды рассеяния $f(E, \theta)$. Применяя аналитичность в эллипсе Лемана, мы докажем, что это разложение сходится *равномерно*, когда $Ve^{\alpha|x|} \in R$ с некоторым $\alpha > 0$. (C) Амплитуды парциальных волн мы связываем с величиной, определяемой из стационарного радиального уравнения Шредингера и называемой фазовым сдвигом. (D) Изучается нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, которому удовлетворяет фазовый сдвиг s-волны. (E) Излагается метод функций Йоста для исследования амплитуды парциальной s-волны, в частности доказывается теорема Левинсона, устанавливающая соответствие между числом связанных состояний и данными рассеяния. (F) Для случая, когда V — обобщенный потенциал Юкавы, изучаются аналитические свойства амплитуды s-волны.

Нигде, кроме краткого обсуждения в Замечаниях, мы не касаемся техники продолжения по угловому моменту, а также теории Редже. Центральной с разных точек зрения теоремой раздела является теорема XI.54. Нужные нам свойства некоторых специальных функций собраны в дополнении 1. В дополнении 2 изучаются функции Йоста некоторых осцилляторных потенциалов.

A. Редукция S-матрицы за счет симметрий

Мы начнем с N-частичного случая, а потом рассмотрим случай двух частиц. Мы уже знаем, что S-оператор коммутирует со свободным гамильтонианом H_0 (предложение, предшествующее теореме XI.33). Если V — центральный потенциал, то как H, так и H_0 коммутируют с вращениями. Таким образом, с вращениями коммутируют волновые операторы $\Omega^{\pm}$, а потому и S-матрица. Чтобы подвести итог, введем техническое определение, задающее «естественное» действие вращений на гильбертовом пространстве асимптотических состояний $\mathcal{H}_{\mathrm{asym}}$ из § 5.

Определение. Пусть $\mathscr{C}$ — набор всех каналов N-частичной квантовой системы с предписанием по поводу вырожденных собственных значений. Фиксируем кластерное разложение D и энергию E. Пусть семейство каналов $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}$ таково, что $D(\alpha) = D$ и $E(\alpha) = E$. Таким образом, канал $\alpha \in \mathscr{C}_1$ имеет вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_k \\ \eta_1^{(i_1)} & \dots & \eta_k^{(i_k)} \end{pmatrix},$$

где $\{\eta_l^{(i_l)}\}_{i_l}$ при фиксированном l — ортонормированное семейство. Для заданных $\alpha, \beta \in \mathscr{C}_1$ пусть $J_{\beta\alpha}: \mathcal{H}_\alpha \to \mathcal{H}_\beta$ — естественное отождествление. Для заданного преобразования R из группы $SO(3)$ трехмерных вращений и заданной функции η пусть $\eta \circ R^{-1}$ обозначает функцию $(\eta \circ R^{-1})(x) = \eta(R^{-1}x)$. Поскольку кластерные гамильтонианы каналов коммутируют с вращениями, композиция каждого $\eta_l^{(i_l)}$ с R^{-1} есть линейная комбинация

$$\eta_l^{(i_l)} \circ R^{-1} = \sum_j D_l^{(i_l, j_l)}(R)\, \eta_l^{(j_l)}$$

других $\eta_l^{(j_l)}$. Обозначим через $V_\alpha(R)$ естественное действие вращений на пространстве $\mathcal{H}_\alpha \equiv L^2(\mathbb{R}^{3k-3})$. Определим оператор $U_R^{(\alpha)}$: $\mathcal{H}_\alpha \to \bigoplus\limits_{\beta \in \mathscr{C}_1} \mathcal{H}_\beta$ как

$$U_R^{(\alpha)} = \sum_{j_1, \dots, j_k} \left(\prod_{l=1}^{k} D^{(i_l, j_l)}(R) \right) J_{\beta\alpha} V_\alpha(R),$$

где β — канал

$$\beta = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_k \\ \eta_1^{(j_1)} & \dots & \eta_k^{(j_k)} \end{pmatrix}.$$

Наконец, определим U_R как оператор из $\bigoplus\limits_{\alpha\in\mathscr{C}} \mathscr{H}_\alpha$ в $\bigoplus\limits_{\alpha\in\mathscr{C}} \mathscr{H}_\alpha$, полагая $U_R \upharpoonright \mathscr{H}_\alpha \equiv U_R^{(\alpha)}$.

Предложение 1. Пусть S — оператор рассеяния N-частичной квантовой системы, гамильтониан которой после отделения движения центра масс удовлетворяет условиям теоремы XI.34. Тогда S коммутирует с $\exp(itH_{\text{asym}})$ для всех t. Если все V_{ij} центральны, то S коммутирует со всеми вращениями, т. е. $SU_R = U_R S$ для всех $R \in SO(3)$.

В классическом случае мы видели, что симметрии заметно упрощают S-оператор. A priori классическая S-матрица есть отображение из $\mathbb{R}^6$ в $\mathbb{R}^6$. Учитывая симметрию, мы смогли описать S как функцию из $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R} \times [0, \pi]$. Найдем теперь ограничения, которые налагают симметрии на квантовомеханический S-оператор. Сначала изучим роль закона сохранения энергии, приведя общее утверждение относительно операторов, коммутирующих с однопараметрической группой.

Определение. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с σ-конечной мерой, $\mathscr{H}_0$ — сепарабельное гильбертово пространство, и пусть $\mathscr{H} = L^2(M, d\mu; \mathscr{H}_0)$. Мы говорим, что функция a из M в пространство $\mathscr{L}(\mathscr{H}_0)$ ограниченных операторов на $\mathscr{H}_0$ *измерима*, если измерима функция $(\psi, a(\cdot)\varphi)$ для любых $\psi, \varphi \in \mathscr{H}_0$. Мы говорим, что $a \in L^\infty(M, d\mu; \mathscr{L}(\mathscr{H}_0))$, если функция a измерима и если $\operatorname{ess\,sup} \|a(\cdot)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}_0)} < \infty$ Для заданной функции $a \in L^\infty(M, d\mu; \mathscr{L}(\mathscr{H}_0))$ по лемме Рисса существует такой оператор $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, что для любых $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$

$$(\psi, A\varphi)_{\mathscr{H}} = \int\limits_M (\psi(\lambda), a(\lambda)\varphi(\lambda))_{\mathscr{H}_0} d\mu(\lambda).$$

Мы называем такое отображение **разложимым оператором**, а $a(\lambda)$ — **слоем оператора A в точке λ**. Слои A определены почти всюду.

Подобные расслоенные операторы далее исследуются в § XIII.16, где доказательство леммы Рисса получается как часть теоремы XIII.83.

Предложение 2. Пусть $\mathscr{H}_0$ — сепарабельное гильбертово пространство и μ — мера Бореля на $\mathbb{R}$. Пусть B — умножение на x в $L^2(\mathbb{R}, d\mu; \mathscr{H}_0) \equiv \mathscr{H}$. Предположим, что оператор $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ коммутирует с $\exp(itB)$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Тогда A — разложимый оператор. Более того, если A унитарен (соответственно самосопряжен), то его слои суть (почти всюду) унитарные (соответственно самосопряженные) операторы в $\mathscr{H}_0$.

Первая часть предложения — частный случай теоремы XIII.84. Вторая часть достаточно проста, поскольку оператор A и его слои ограничены.

Пример 1. Пусть S — матрица, описывающая рассеяние в редуцированной двухчастичной системе с приведенной массой, равной 1/2 на $L^2(\mathbb{R}^m)=\mathcal{H}$. Предположим, что S унитарна. Пусть $\mathcal{H}_0$ — гильбертово пространство $L^2(S^{m-1}; d\Omega)$, где S^{m-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^m$, а $d\Omega$ — стандартная мера на ее поверхности. Определим унитарное отображение U: $L^2(\mathbb{R}^m)\to L^2(\mathbb{R}_+, dE; \mathcal{H}_0)$ посредством

$$[(Uf)(E)](\omega)=(\sqrt{2})^{-1}\, E^{(m-2)/4}\hat{f}(E^{1/2}\omega), \tag{104}$$

где $\omega\in S^{m-1}$ рассматривается как единичный вектор в $\mathbb{R}^m$. Если нам задан оператор A в $L^2(\mathbb{R}^m)$, мы будем называть UAU^{-1} «оператором A в энергетическом представлении». В энергетическом представлении H_0 есть умножение на E, так что предыдущее предложение 2 применимо к S в силу предложения 1. Итак, в энергетическом представлении S — разложимый оператор, слои которого $S(E)$ — унитарные отображения $L^2(S^{m-1}, d\Omega)$ на себя. Определим оператор $T(E)$ посредством

$$T(E)=(2\pi i)^{-1}(I-S(E)).$$

В случае $m=3$ и $V\in L^1\cap R$ теорема XI.42 дает нам явное представление для $T(E)$, а именно

$$(T(E)f)(\omega)=\frac{E^{1/2}}{2}\int\limits_{S^{m-1}} T(E^{1/2}\omega,\ E^{1/2}\omega')f(\omega')\,d\Omega(\omega'), \tag{105}$$

где $T(\cdot,\cdot)$ есть «T-матрица». Ниже мы будем придерживаться этой реализации $T(E)$ как интегрального оператора.

Пример 2. Пусть $\mathcal{H}_{\text{asym}}$ — асимптотическое гильбертово пространство для N-частичной квантовой системы в $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$. Напомним, что для каждого α из множества $\mathscr{C}$ каналов мы определили энергию канала E_α как сумму внутренних энергий кластеров в α. Иногда E_α называют **порогом канала** α. Для каждого $E\in\mathbb{R}$ множество

$$\mathscr{C}_E=\{\alpha\in\mathscr{C}\mid E_\alpha<E\}$$

называется **множеством каналов, открытых** при энергии E. Пусть α есть l-кластерный канал, так что гильбертово пространство канала $\mathcal{H}_\alpha=L^2(\mathbb{R}^{3l-3})$. Подобно двухчастичному случаю (пример 1), H_α можно реализовать как умножение на $(E+E_\alpha)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, dE;\ L^2(S^{3l-4}, d\mu_\alpha))$, хотя, поскольку возможны различные массы в различных кластерах, мера μ_α и явная формула для энергетического представления имеют более сложный вид, чем

(104). Предположим далее, что $[E, \infty)$ можно представить в виде $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, где (1) $E = \inf \sigma(H)$; (2) интервалы I_n не пересекаются; (3) при каждом фиксированном n множество $\mathscr{C}_E$ одно и то же при любом $E \in I_n$. Такое разложение существует, коль скоро H имеет «разумные» спектральные свойства, например если для каждой подсистемы $\sigma_{pp}(H(C)) = \sigma_{disc}(H(C))$ или если каждое $H(C)$ обладает собственными значениями, которые накапливаются лишь у порогов (задача 74); в § XIII.10 мы увидим, что такие спектральные свойства иногда удается доказать. Пусть $\{P_\Omega\}$ — спектральные проекторы H_{asym}. Напишем $\mathscr{H}_{asym} = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}^{(n)}$, где $\mathscr{H}^{(n)} = \operatorname{Ran} P_{I_n}$. Поскольку оператор S коммутирует с каждым P_Ω, он оставляет инвариантным каждое $\mathscr{H}^{(n)}$. Теперь можно применить предложение 2 и получить расслоение каждого $S \upharpoonright \mathscr{H}^{(n)}$. Сам S можно мыслить как обобщенный разложимый оператор, однако слои $S(E)$ будут отображениями гильбертовых пространств, зависящими некоторым образом от E, а именно $S(E)$ — отображение, определенное на $\mathscr{H}_E \equiv \bigoplus\limits_{\alpha \in \mathscr{C}_E} \mathscr{H}_\alpha^{(0)}$, где $\mathscr{H}_\alpha^{(0)} = L^2(S^{3l-4}, d\mu_\alpha)$. При возрастании E гильбертово пространство $\mathscr{H}_E$, на котором действуют слои, увеличивается каждый раз, как проходится новый порог рассеяния. Отметим, что описанное выше энергетическое представление, где пространство $\mathscr{H}_E$ зависит от E, наиболее естественно рассматривать на языке прямых интегралов гильбертовых пространств.

Прежде чем обратиться к следствиям инвариантности относительно вращений, мы хотим более подробно изучить оператор $T(E)$ из примера 1.

Теорема XI.49. Пусть $H = -\Delta + V$, где $V \in R$. Тогда:

(a) для каждого $E \in R_+ \setminus \mathscr{E}$ оператор $T(E)$ в $L^2(S^2, d\Omega)$ есть оператор Гильберта — Шмидта;

(b) $E \longmapsto T(E)$ есть непрерывное отображение из $\mathbb{R}_+ \setminus \mathscr{E}$ во множество операторов Гильберта — Шмидта с естественной топологией на нем;

(c) в равномерной топологии $T(E) \to 0$ при $E \to \infty$.

Если, кроме того, $V \in L^1$, то «операторы Гильберта — Шмидта» в (a) и (b) можно заменить на «операторы со следом».

Доказательство. Для каждого $E > 0$ пусть $K_V(E)$ — оператор Гильберта — Шмидта в $L^2(\mathbb{R}^3)$ с ядром

$$\frac{|V(x)|^{1/2} e^{i\sqrt{E}\,|x-y|}\, V(y)^{1/2}}{4\pi\,|x-y|},$$

и пусть $F_V(E)$ — отображение из $L^2(\mathbb{R}^3)$ в $L^2(S^2, d\Omega)$, заданное посредством

$$(F_V(E)f)(\omega) = {}^1/_4 E^{1/4}\pi^{-3/2}\int \exp(-iE^{1/2}\omega\cdot x)\, V^{1/2}(x) f(x)\, dx. \quad (106)$$

В этом доказательстве мы будем прежде всего пользоваться тем, что $F_V(E)$ — ограниченный оператор класса $\mathcal{I}_4$ (определенного в дополнении к § IX.4), и равенством

$$T(E) = F_V(E)[I + K_V(E)]^{-1} F_{|V|}(E)^*, \quad (107)$$

справедливым для всех $E \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{E}$. Равенство (107) тесно связано с (99). Нам потребуется формула

$$(F_V(E)^* g)(x) = {}^1/_4 E^{1/4}\pi^{-3/2}\int \exp(-iE^{1/2}\omega\cdot x)\, V^{1/2}(x)\, g(\omega)\, d\Omega. \quad (108)$$

Предположим сначала, что $V \in L^1 \cap R$. Тогда $T(E)$ задан как интегральный оператор (105), причем

$$T(k, k') = (2\pi)^{-3}\int V(x)^{1/2} e^{-ik\cdot x}\psi(x, k')\, dx,$$

где $\psi(\cdot, k) = [I + K_V(k^2)]^{-1}\psi_0(\cdot, k)$ и $\psi_0(x, k) = |V(x)|^{1/2}\exp(ik\cdot x)$. Тем самым (107) в этом случае доказано.

Далее нам нужны следующие свойства оператора $F_V(E)$, доказательство которых мы оставляем читателю (задача 75).

(1) Если $V \in R$, то $F_V(E) \in \mathcal{I}_4$, т. е. $F_V(E)^* F_V(E)$ — оператор Гильберта — Шмидта.

(2) Отображение $E \longmapsto F_V(E)$ непрерывно в топологии $\mathcal{I}_4$.

(3) Для фиксированного $E \neq 0$ отображение $V \longmapsto F_V(E)$ из класса потенциалов Рольника с их естественной нормой в пространство $\mathcal{I}_4$ непрерывно.

(1′) — (3′) Если R заменить на $L^1 \cap R$, а $\mathcal{I}_4$ на $\mathcal{I}_2$, то свойства (1) — (3) по-прежнему справедливы.

Например, явная формула (106) показывает, что $F_V(E)$ имеет L^2-ядро, когда $V \in L^1$ (что доказывает (1′)), а (1) следует из явной формулы

$$(F_V(E)^* F_V(E) g)(x) = \int \frac{V(x)^{1/2} V(y)^{1/2}}{|x-y|\, 4\pi^2} \sin(E^{1/2}|x-y|)\, g(y)\, dy.$$

В дополнение к этому нам нужен следующий факт, который доказывается при помощи теории гладких возмущений в сочетании с теорией Като — Бирмана (см. задачу 57 к гл. XIII).

(4) Если $V_n \to V$ по норме Рольника, то соответствующие S-матрицы сходятся сильно.

Фиксируем $V \in R$ и выберем $V_n \in L^1 \cap R$ так, что $V_n \to V$ по норме Рольника. Предположим, что $E_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{E}$. Поскольку можно найти интервал A около E_0, такой, что $\bar{A}\cap\mathscr{E}=\varnothing$, и поскольку отображение $\langle V, E\rangle\longmapsto K_V(E)$ произведения $R\times\mathbb{R}_+$ в $\mathscr{I}_2$ непрерывно по совокупности переменных (задача 76), то для всех больших n интервал A не пересекается с исключительными множествами $\mathscr{E}_n$ операторов $-\Delta+V_n$. Поскольку S-матрицы S_n сходятся к S (по (4)), $F_{V_n}(E)\to F_V(E)$ (по (3)), а (107) выполняется для каждого V_n, то оно выполняется и для V, коль скоро $E\in A$. Теперь (a) и (b) следуют из свойства (2) и формулы (107). Доказательство (c) оставлено читателю (задача 77). ∎

С помощью метода оценок в L^2 с весом (§ XIII.8) равенство (107) и некоторые свойства непрерывности оператора $T(E)$ можно распространить на потенциалы, ведущие себя на бесконечности как $r^{-1-\varepsilon}$ (см. ссылки в замечаниях к § XIII.8).

Поскольку $T(E)$ — оператор Гильберта—Шмидта, его можно задать интегральным ядром $t(E;\omega,\omega')$. Из-за различий в нормировках ядро t следует отличать от T-матрицы T из § 6; действительно, как видно из формулы (105),

$$t(E;\omega,\omega')={}^1/_2E^{1/2}T(E^{1/2}\omega, E^{1/2}\omega'),$$

когда $V\in L^1\cap R$. К сожалению, это различие между t и T типично для теории рассеяния, где неприятные множители $\sqrt{E}$, 2π, -1 и i постоянно возникают в самых неожиданных местах.

Предположим теперь, что V — центральный потенциал. Поскольку S коммутирует с вращениями, то же должно быть справедливо и для $T(E)$ при почти всех E. Поскольку отображение $E\longmapsto T(E)$ непрерывно на $\mathbb{R}_+\setminus\mathscr{E}$, мы заключаем, что $T(E)$ коммутирует с вращениями. Итак, для любого вращения R, действующего на S^2, и $E\in\mathbb{R}_+\setminus\mathscr{E}$

$$t(E;R\omega,R\omega')=t(E;\omega,\omega').$$

Отсюда следует, что $t(E;\omega,\omega')$ зависит лишь от $\omega\cdot\omega'\equiv\cos\theta$. Мы сформулируем наш окончательный результат в терминах величины f из формул (96) и (97), связанной с дифференциальным сечением равенством $d\sigma/d\Omega=|f|^2$.

Определение. $f(E,\cos\theta)=-(2\pi)^2E^{-1/2}t(E;\omega,\omega')$, где $\omega\cdot\omega'=\cos\theta$; f называется **амплитудой рассеяния.**

Подведем итог редукции за счет симметрий.

Теорема XI.50. Пусть $V\in R$ — центральный потенциал, и пусть S — оператор рассеяния для $-\Delta+V$. Тогда существует функция $f(E,\cos\theta)$ из $(\mathbb{R}_+\setminus\mathscr{E})\times[-1,1]$ в $\mathbb{C}$, такая, что слои $S(E)$ оператора S имеют интегральные ядра:

$$(S(E)-I)(\omega,\omega')=\frac{i}{2\pi}E^{1/2}f(E,\omega\cdot\omega').$$

Итак, классическая редуцированная S-функция из $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}\times[0, \pi]$ заменяется одной *комплекснозначной* функцией на $\mathbb{R}_+\times[0, \pi]$. Если выделить модуль и аргумент f, мы получим две вещественнозначные функции. Поскольку сечение рассеяния зависит лишь от модуля f, этот модуль является аналогом угла классического рассеяния в том смысле, что содержит похожую физическую информацию о рассеянии. Аргумент же f в смысле, который может быть сделан точным, содержит информацию о временнóй задержке (см. ссылки в Замечаниях).

В. *Разложение по парциальным волнам и его сходимость*

Мы только что видели, что $T(E)$ — оператор Гильберта — Шмидта. Он также и нормален, поскольку унитарен $S(E)$. Таким образом, $T(E)$ имеет полный ортонормированный набор собственных векторов. В результате этим же свойством обладает и $S(E)$. Если потенциалы центральны, то, применяя инвариантность относительно вращений, можно провести классификацию соответствующих собственных векторов! Группа вращений $SO(3)$, действующая на $L^2(S^2, d\Omega)$, порождает разложение этого пространства в прямую сумму $\bigoplus\limits_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_l$, где $\mathcal{H}_l$ есть $(2l+1)$-мерное подпространство, натянутое на сферические гармоники порядка l. Каждое подпространство остается инвариантным под действием $SO(3)$, и сужение $SO(3)$ на $\mathcal{H}_l$ — неприводимое представление (см. § XVI.2, где будут приведены основные определения и лемма Шура). Эти представления неэквивалентны для разных l. По лемме Шура отсюда следует, что $S(E)$ оставляет каждое $\mathcal{H}_l$ инвариантным и что существуют числа $s_l(E)$, такие, что для каждого $\psi\in\mathcal{H}_l$

$$S(E)\psi = s_l(E)\psi.$$

Определение. Величины $s_l(E)$ называются **парциальными матричными элементами S-оператора.** Величины $f_l(E)$, определенные как

$$f_l(E) = (2iE^{1/2})^{-1}[s_l(E)-1], \tag{109}$$

называются **парциальными амплитудами рассеяния.**

Теорема XI.51 (разложение по парциальным волнам — теорема о сходимости в L^2). Пусть $V\in R$ — центральный потенциал. Фиксируем $E\in\mathbb{R}_+\setminus\mathcal{E}$. Тогда парциальные амплитуды $f_l(E)$ и амплитуда рассеяния $f(E, \cos\theta)$ связаны соотношениями

$$f(E, \cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1) f_l(E) P_l(\cos\theta), \tag{110a}$$

$$f_l(E) = {}^1/_2 \int_{-1}^{1} f(E, z) P_l(z)\, dz. \tag{110b}$$

Сумма в (110a) сходится к $f(E, \cos\theta)$ по норме пространства $L^2(S^2, d\Omega)$ для каждого фиксированного E. Равенство (110a) называется **разложением по парциальным волнам.** Функции $P_l(z)$ — полиномы Лежандра. Обзор их свойств приведен в дополнении к этому разделу.

Доказательство. Пусть ω_0 — фиксированное направление. Тогда $P_l(\omega\cdot\omega_0)$ — элемент подпространства $\mathscr{H}_l$, так что

$$\int t(E; \omega, \omega') P_l(\omega'\cdot\omega_0)\, d\Omega(\omega') = (-2\pi i)^{-1}(s_l(E)-1) P_l(\omega\cdot\omega_0).$$

Выбирая $\omega=\omega_0$ и применяя формулу, определяющую $f(E; \omega\cdot\omega')$, видим, что

$$\int f(E; \omega'\cdot\omega_0) P_l(\omega'\cdot\omega_0)\, d\Omega(\omega') = 4\pi f_l(E) P_l(1).$$

Поскольку $P_l(1)=1$ и $\int f(\omega')\, d\Omega(\omega') = 2\pi \int f(\omega')\, d(\omega'\cdot\omega_0)$ для функций f от $\omega'\cdot\omega_0$, (110b) получено. С другой стороны, поскольку $t(E; \omega, \omega')$ — ядро оператора Гильберта — Шмидта, то $\int_{-1}^{1} |f(E; z)|^2\, dz < \infty$. Так как $P_l(z)$ образуют полное ортогональное семейство, причем $\int_{-1}^{1} |P_l(z)|^2\, dz = 2(2l+1)^{-1}$, то (110a) следует из (110b). ∎

Соотношения ортогональности для функций P_l приводят к важному следствию. Действительно, полное сечение определяется как $\sigma = \int (d\sigma/d\Omega)\, d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{1} |f(E; z)|^2\, dz$, так что мы получаем основную формулу парциального анализа теории рассеяния:

$$\sigma(E) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, |f_l(E)|^2. \tag{111}$$

Иногда удается сделать значительно более сильное утверждение относительно сходимости разложения по парциальным волнам, чем полученное в теореме XI.51.

Теорема XI.52 (разложение по парциальным волнам — теорема о равномерной сходимости). Пусть V — центральный потенциал, причем $e^{\alpha|x|}V \in R$ для некоторого $\alpha > 0$. Фиксируем $E \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathscr{E}$. Тогда разложение по парциальным волнам (110a) сходится равномерно по θ в интервале $[0, 2\pi]$.

Доказательство По теореме XI.47 функция $f(E, z)$ аналитична по z в эллипсе с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью

$1+2\alpha^2E^{-1}$. Равномерная сходимость разложения по парциальным волнам на компактных подмножествах этого эллипса следует из общей теоремы о сходимости рядов Лежандра (теорема XI.63 из дополнения 1). ∎

C. Фазовые сдвиги и их связь с уравнением Шредингера

В пункте В мы лишь отчасти воспользовались унитарностью S-матрицы. Дальнейший учет унитарности немедленно влечет за собой, что числа $s_l(E)$, собственные значения $S(E)$, имеют единичные модули.

Определение. **Фазовые сдвиги** $\delta_l(E)$ определяются равенством

$$s_l(E)=e^{2i\delta_l(E)}.$$

A priori ясно, что фазовые сдвиги — вещественные числа, определенные для почти всех E, но лишь по модулю π. Пусть $E_0=\max\{E\mid E\in\mathscr{E}\}$, где $\mathscr{E}$ — исключительное множество. Поскольку $\lim\limits_{E\to\infty} S(E)=I$ и $S(E)$ непрерывна на (E_0, ∞), можно избавиться от неопределенностей «почти всюду» и «по модулю π» для $E\in(E_0, \infty)$, потребовав, чтобы $\delta_l(E)$ были непрерывны на этом интервале и чтобы $\lim\limits_{E\to\infty}\delta_l(E)=0$. В частях D и E ниже мы увидим, что при довольно слабых ограничениях $s_0(E)$, а потому и $\delta_0(E)$ могут быть выбраны непрерывными по E на $[0, \infty)$. Кроме того, можно доказать, что $\delta_l(E)$ могут быть выбраны непрерывными при $l>0$. Фазовый сдвиг, определенный так, чтобы он был непрерывен по E и удовлетворял условию $\lim\limits_{E\to\infty}\delta_l(E)=0$ для каждого фиксированного l, удовлетворяет также условию $\lim\limits_{l\to\infty}\delta_l(E)=0$ для каждого фиксированного E. Действительно, поскольку $S(E)-I$ — оператор Гильберта — Шмидта, когда $V\in R$, то в этом случае $\sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,|\,\delta_l(E)|^2<\infty$.

Парциальную амплитуду теперь можно записать тремя различными способами, каждый из которых по-своему полезен:

$$f_l(E)=(2ik)^{-1}(e^{2i\delta_l(E)}-1), \tag{112a}$$

$$f_l(E)=k^{-1}e^{i\delta_l(E)}\sin\delta_l(E), \tag{112b}$$

$$f_l(E)=k^{-1}(\operatorname{ctg}\delta_l(E)-i)^{-1}, \tag{112c}$$

где $k=\sqrt{E}$. В оставшейся части этого раздела k всегда будет обозначать $\sqrt{E}$. Заметим, что из (112b) следует равенство

$$\operatorname{Im} f_l(E)=k\,|\,f_l(E)|^2. \tag{113}$$

Это равенство часто называют **унитарностью парциальных волн**, поскольку оно есть прямой перевод на этот язык свойства унитарности оператора S. Соотношения (110), (111) и (113) дают новое доказательство соотношения унитарности (97c).

Наиболее важный инструмент теории рассеяния для центральных потенциалов — это связь между фазовыми сдвигами и стационарным радиальным уравнением Шредингера, которую дает следующая

Теорема XI.53. Пусть потенциал V централен и кусочно непрерывен как функция r на $[0, \infty)$. Предположим, что интегралы $\int\limits_0^1 r|V(r)|\,dr$ и $\int\limits_1^\infty |V(r)|\,dr$ конечны. Фиксируем $E>0$ и целое неотрицательное l. Тогда существует единственная функция $\varphi_{l,E}(r)$ на $(0, \infty)$, которая принадлежит C^1, кусочно дважды дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$-\varphi''(r)+V_l(r)\varphi(r)=E\varphi(r), \tag{114}$$

где $V_l(r)=V(r)+l(l+1)r^{-2}$ с граничными условиями

$$\lim_{r\to 0}\varphi_{l,E}(r)=0, \qquad \lim_{r\to 0} r^{-l-1}\varphi_{l,E}(r)=1.$$

Далее, существует такая константа c, что

$$\lim_{r\to\infty}[c\varphi_{l,E}(r)-\sin(kr-\pi l/2+\delta_l(E))]=0, \tag{115}$$

где $\delta_l(E)$ — фазовый сдвиг рассеяния.

Доказательство. Одна часть доказательства включает приложение теории обыкновенных дифференциальных уравнений к исследованию (114) Мы приведем некоторые результаты такого исследования без доказательства. Позже, в части E, мы докажем эти результаты в случае $l=0$. Доказательства для произвольных l можно найти в литературных ссылках, приведенных в Замечаниях Хотя второе граничное условие влечет за собой первое, мы выписываем оба, чтобы подчеркнуть аналогию с уравнением второго порядка с граничными условиями $\varphi(x_0)=a$ и $\varphi'(x_0)=b$.

Предположим сначала, что $V\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и что V централен. Фиксируем направление $\mathbf{e}$, и пусть $\varphi(\mathbf{x}, k\mathbf{e})$ — волновая функция Липпмана — Швингера, построенная при доказательстве теоремы XI.41. Тогда

$$\varphi(x, ke)=e^{ike\cdot x}-\frac{1}{4\pi}\int\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}V(y)\varphi(y, ke)\,dy. \tag{116}$$

Пусть $g\in C_0^\infty$, и пусть $h=(-\Delta-E)g$. Тогда

$$\int h(x)\varphi(x, ke)\,dx=-\frac{1}{4\pi}\iint h(x)\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}V(y)\varphi(y, ke)\,dy\,dx, \tag{117}$$

где мы воспользовались тем, что $(-\Delta-E)e^{ike\cdot x}=0$ в смысле обобщенных функций, чтобы исключить первый член из (116). Поскольку $|V|^{1/2}\varphi\in L^2$, а V и h лежат в C_0^∞, можно изменить порядок интегрирования в правой части (117) и воспользоваться равенством

$$\int[(-\Delta-E)g](x)\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}d^3x=g(y)$$

для вывода равенства $(-\Delta-E)\varphi(x, ke)=-V(x)\varphi(x, ke)$ в смысле обобщенных функций. По теореме об эллиптической регулярности (теорема IX.26) заключаем, что $\varphi(x, ke)$ как функция x лежит в C^∞ и удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных $(-\Delta+V)\varphi=E\varphi$ в классическом смысле. Выберем сферические координаты $\langle r, \theta, \eta\rangle$, где θ — угол между r и e. Тогда φ не зависит от азимутального угла η. Пусть

$$\tilde{\varphi}_{l,E}(r)=\frac{r}{2}\int_0^\pi\varphi(r, \theta; ke)\,P_l(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

Тогда $\tilde{\varphi}_{l,E}$ удовлетворяет (114) и первому граничному условию. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений говорит нам, что каждое решение уравнения (114), удовлетворяющее первому граничному условию, отличается лишь множителем от того единственного решения, которое удовлетворяет обоим граничным условиям. Если $l\neq 0$, так что V_l сингулярен при $r=0$, это не столь просто, как в случае $l=0$, когда можно обратиться к § V.6.A.

Доказательство теоремы в случае $V\in C_0^\infty$ сведено, таким образом, к доказательству (115) с $\tilde{\varphi}$ вместо φ. В (116) фиксируем комбинацию $x\cdot e/|x|$, и пусть $|x|\to\infty$. Пользуясь определением $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ и тем, что $V\varphi$ имеет компактный носитель, легко показать, что (задача 78)

$$\lim_{\substack{|x|\to\infty\\ x\cdot e=|x|\cos\theta_0}}\left(\int\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}V(y)\varphi(y, ke)\,dy\right)e^{-ik|x|}|x|=(2\pi)^3\,T(ke', ke), \quad (118)$$

где e' выбрано так, что $e\cdot e'=\cos\theta_0$. Более того, сходимость равномерна по θ_0. Из равенств (105), (110b) и определения f следует, что

$$^1/_2\int_0^\pi P_l(\cos\theta)\left[T(ke', ke)\big|_{e\cdot e'=\cos\theta}\right]\sin\theta\,d\theta=-\frac{1}{2\pi^2}f_l(E).$$

В силу (116) и равномерности предела в (118),

$$\lim_{r\to\infty}\left[\tilde{\varphi}(r)-e^{i\pi l/2}r\,j_l(kr)-f_l(E)\,e^{ikr}\right]=0. \quad (119)$$

Здесь $j_l(kr)$ — сферическая функция Бесселя, определенная в первом дополнении к этому разделу. По теореме XI.64, $yj_l(y) - \sin(y-\pi l/2) \to 0$ при $y \to \infty$ и, более того, $f_l(E) = (e^{2i\delta_l}-1)/2ik$. Таким образом,

$$\lim_{r\to\infty}[2ik\tilde{\varphi}(r) - (e^{ikr} - e^{-ikr}e^{i\pi l}) - (e^{2i\delta_l}-1)\,e^{ikr}] = 0,$$

или

$$\lim_{r\to\infty}[ke^{-i\pi l/2}\,e^{-i\delta_l}\tilde{\varphi}(r) - \sin(kr - {}^1/_2\pi l + \delta_l)] = 0.$$

Это доказывает теорему, когда $V \in C_0^\infty$. Потенциал общего вида V аппроксимируется с помощью $V_n \in C_0^\infty$. По теореме XI.31 и задаче 28, при $V_n \to V$ соответствующие S-матрицы сходятся, а тогда сходятся и соответствующие значения δ_l. С другой стороны, метод части E показывает, что сходятся сдвиги фаз решения уравнения (114). ∎

Итак, δ_l представляет собой сдвиг фазы решения радиального уравнения Шредингера, регулярного в точке $r=0$, по отношению к $j_l(kr)$ — решению при $V=0$. В предыдущей теореме можно опустить условие гладкости V, если заменить дифференциальное уравнение (114) интегральным уравнением (125). Можно доказать (115), развивая теорию рассеяния непосредственно для операторов Шредингера на подпространствах фиксированного углового момента. Этот подход рассматривается в дополнении 3.

D. Уравнение с переменной фазой

В части C мы доказали, что фазовый сдвиг связан с радиальным уравнением Шредингера. Эта связь подсказывает большое число дополнительных результатов. Например, фиксируем потенциал V, удовлетворяющий условиям теоремы XI.53. Предположим, что мы несколько изменили V, сделав его в некоторых местах более отрицательным. Тогда для каждого фиксированного k решения уравнения $-\varphi'' + V_l\varphi = k^2\varphi$ в области, где мы изменили V, осциллируют быстрее. Таким образом, мы ожидаем, что фазовый сдвиг будет больше. Итак, похоже, что $\delta \geqslant \tilde{\delta}$, если $V \leqslant \tilde{V}$ Оказывается, доказать это непосредственно трудно ввиду определения δ с точностью до величины, кратной π. По этой причине полезно развить дополнительные средства исследования фазового сдвига. Мы построим два различных метода в этой и следующей частях. Оба они в конечном счете опираются на теорему XI.53.

Теорема XI.54. Пусть V удовлетворяет условиям теоремы XI.53. Тогда для любого $k>0$ существует единственное решение уравнения

$$d'(r) = -\frac{1}{k}V(r)\sin^2(kr + d(r)), \quad r \in (0, \infty), \tag{120}$$

удовлетворяющее граничному условию $\overline{\lim_{r\to 0}}\, r^{-1}|d(r)| < \infty$. Более того, это решение удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to\infty} d(r) = \delta_{l=0}(k^2), \tag{121}$$

где $\delta_{l=0}(k^2)$ есть s-волновой фазовый сдвиг для V, т. е. $\delta_0(k^2)$. Уравнение (120) называется **уравнением с переменной фазой.** Подчеркнем, что $d(r)$ зависит от k.

Доказательство. Существование решений с правильными граничными условиями следует из принципа сжимающих отображений в соответствии со схемой, изложенной в § V.6.A. Доказательство этого мы отнесем к задаче 79.

Фиксируем $\rho \in (0, \infty)$ и определим V^ρ, полагая

$$V^\rho(r) = \begin{cases} V(r), & r \leqslant \rho, \\ 0 & r > \rho. \end{cases}$$

Пусть δ^ρ — фазовый сдвиг для V^ρ при фиксированной энергии k^2. Поскольку $V^\rho \to V$ по норме, определенной левой частью (61), то $\delta^\rho \to \delta$ (по модулю π), когда $\rho \to \infty$. Мы покажем, что функция $\rho \mapsto \delta^\rho$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и граничному условию в нуле. Это позволит нам заключить, что (121) выполняется по модулю π. Вопрос об этой неоднозначности вынесен в задачу 80.

Пусть φ удовлетворяет (114) при $l = 0$ и условию $\lim_{r\to 0} r^{-1}\varphi(r) = 1$. Пусть φ^ρ — аналогичная функция для V^ρ. Очевидно,

$$\varphi^\rho(r) = \begin{cases} \varphi(r), & r \leqslant \rho, \\ \alpha \sin(kr + \beta), & r \geqslant \rho, \end{cases}$$

для подходящих α и β. По теореме XI.53, $\beta = \delta^\rho$. Требование, чтобы φ^ρ принадлежало C^1, влечет за собой равенство

$$k \operatorname{ctg}(k\rho + \delta^\rho) = \varphi'(\rho)/\varphi(\rho). \tag{122}$$

Применяя (122) и дифференциальное уравнение (114), легко доказать (задача 81), что

$$\frac{d\delta^\rho}{d\rho} = -\frac{1}{k} V(\rho) \sin^2(k\rho + \delta^\rho). \tag{123}$$

Более того, в силу (122), $\lim_{\rho\to 0} \operatorname{ctg}(k\rho + \delta^\rho) = \infty$. От неопределенности, связанной с π, в определении δ^ρ по (122) мы избавимся, потребовав, чтобы $\lim_{\rho\to 0} \delta^\rho = 0$ и чтобы δ^ρ принадлежало C^1. Наконец, в силу (122), $\lim_{\rho\to 0} k\rho \operatorname{ctg}(k\rho + \delta^\rho) = 1$, или

$$\underline{\lim_{\rho\to 0}}\, (k\rho)^{-1}(k\rho + \delta^\rho) = 1,$$

так что $\lim_{\rho\to 0} \rho^{-1}\delta^\rho = 0$. Итак, в силу единственности решения уравнения (120), $\delta^\rho = d(\rho)$. ∎

Следствие 1. Можно выбрать $\delta_0(E)$ непрерывным по E при всех E.

Это следствие той части доказательства, которая содержится в задаче 80.

Следствие 2. Если $\delta_0(E)$ выбрано непрерывным и удовлетворяющим условию $\lim_{E\to\infty} \delta_0(E) = 0$, то фазовые сдвиги для оператора $-\Delta + \lambda V$ непрерывны по λ и обращаются в нуль при $\lambda \to 0$.

Доказательство вынесено в задачу 82.

Следствие 3. Число δ_0 положительно для потенциалов, которые всюду неположительны ($V(r) \leqslant 0$ при всех r), и отрицательно для потенциалов, которые всюду неотрицательны.

Доказательство. В силу (120) и (121), $\delta_0(k^2) = -k^{-1}\int_0^\infty V(r)\sin^2(kr + d(r))\,dr$, что, очевидно, положительно (соответственно отрицательно), если $V \leqslant 0$ (соответственно $V \geqslant 0$). ∎

Следствие 4. Если $V \leqslant \tilde{V}$, то s-волновые фазовые сдвиги для V не меньше таких же фазовых сдвигов для $\tilde{V}$.

Доказательство. Фиксируем $k > 0$. Предположим сначала, что $V = \tilde{V}$ на интервале $(0, \rho_0)$ и что $V < \tilde{V}$ на (ρ_0, ∞). Пусть $d(\rho)$, $\tilde{d}(\rho)$ — соответствующие решения уравнения с переменной фазой (120). Тогда $d(\rho_0) = \tilde{d}(\rho_0)$ и $d'(\rho_0) = \tilde{d}'(\rho_0)$ в силу (120), так что $d(\rho) > \tilde{d}(\rho)$ для $\rho > \rho_0$ вблизи ρ_0. Если бы $\tilde{d}$ где-нибудь было больше d, то существовало бы такое $\rho_1 > \rho_0$, что $d(\rho_1) = \tilde{d}(\rho_1)$ и $\tilde{d}'(\rho_1) \geqslant d'(\rho_1)$. Но это несовместимо с уравнением (120) и условием $V < \tilde{V}$ на (ρ_0, ∞). Итак, $d \geqslant \tilde{d}$ для всех ρ и, в силу (121), $\delta \geqslant \tilde{\delta}$. Для доказательства общего случая применяется простой предельный переход. ∎

Особый интерес представляет низкоэнергетическое поведение $\delta_0(E)$. Его можно исследовать методом, родственным методу переменной фазы.

Теорема XI.55. Пусть $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ — центральный потенциал, и пусть u — решение уравнения $-u''(r) + V(r)u(r) = 0$ с граничными условиями $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. Тогда:

(a) если $\lim\limits_{r\to\infty} u'(r)\neq 0$ и $u(r)$ имеет m нулей, отличных от $r=0$, то

$$\lim_{k\to 0} \delta_0(k^2)=m\pi \quad \text{и} \quad \lim_{k\to 0}\frac{\delta_0(k^2)-m\pi}{k}=\lim_{r\to\infty}\frac{u(r)-ru'(r)}{u'(r)},$$

(b) если $\lim\limits_{r\to\infty} u'(r)=0$ и $u(r)$ имеет m нулей, отличных от $r=0$, то

$$\lim_{k\to 0}\delta_0(k^2)=(m+1/2)\pi.$$

Доказательство. Воспользуемся уравнениями (122) и (123). Выберем R так, чтобы все нули u лежали в $(0, R)$ и чтобы $V(r)=0$ при $r>R$. В частности, $u(r)=a(r-R)+b$ для $r>R$. Поскольку у $u(r)$ нет нулей на (R, ∞), имеем $a/b=u'(R)/u(R)\geqslant 0$. Пусть $\varphi_E(r)$ — решение уравнения (114), удовлетворяющее условиям $\varphi_E(0)=0$ и $\varphi'_E(0)=1$. Записывая дифференциальное уравнение как интегральное, видим, что $\varphi_E(r)\to\varphi_0(r)$ при $E\to 0$ равномерно в интервале $[0, R+1]$. В частности, для некоторого E_0 функция $\varphi_E(r)$ имеет m нулей на $[0, R)$, если $E<E_0$ и $\varphi_E(R)^{-1}\varphi'_E(R)\to a/b$. По доказательству теоремы XI.54, $\delta_0(E)$ определяется уравнением (122)

$$k\,\mathrm{ctg}\,(k\rho+d(\rho, k))=\varphi'_E(\rho)/\varphi_E(\rho),$$

где функция $d(\cdot, k)$ непрерывна, $d(0, k)=0$, $d(R, k)=\delta_0(k^2)$. Очевидно, что в каждой точке ρ, в которой $\varphi_E(\rho)$ исчезает, величина $k\rho+d(\rho, k)$ должна принимать одно из следующих значений: $0, \pm\pi, \ldots$. Более того, в силу (123), в каждой такой точке $(\partial/\partial\rho)\,d(\rho, k)=0$, так что $(\partial/\partial\rho)(k\rho+d(\rho, k))>0$ Итак,

$$m\pi\leqslant kR+d(R, k)<(m+1)\pi, \tag{124}$$

если $k<E_0$. Величина $d(R, k)=\delta_0(k^2)$, таким образом, однозначно определяется по (122) и (124). Если $u'(R)=\lim\limits_{r\to\infty}u(r)\neq 0$, то для всех малых E имеем $\varphi'_E(R)/\varphi_E(R)={}^1/_2u'(R)/u(R)>0$, так что, в силу (122), $\mathrm{ctg}\,(kR+d(R, k))\to\infty$ при $k\to 0$. Это совместимо с неравенством (124) только тогда, когда $kR+d(k, R)\to m\pi$. С другой стороны, в силу интегрального уравнения, $\varphi'_E(R)$ есть C^∞-функция по k^2 в точке $k=0$, так что если $u'(R)=0$, то $\varphi'_E(R)$ обращается в нуль как k^2 при $k=0$. Итак, в этом случае $\mathrm{ctg}\,(kR+d(R, k))\to 0$ по (122), поэтому $kR+d(R, k)\to(m+{}^1/_2)\pi$. Недоказанное утверждение из части (a) оставим читателю (задача 83). ∎

Можно значительно ослабить условия на V из предыдущей теоремы.

Определение. Величина

$$\lim_{r\to\infty} \frac{u(r)-ru'(r)}{u'(r)} = \lim_{k\to 0} \frac{\delta_0(k^2)-\delta_0(0)}{k}$$

называется **длиной рассеяния**. Если $\lim\limits_{r\to\infty} u'(r)=0$, мы говорим, что длина рассеяния бесконечна.

Длина рассеяния a — естественный параметр рассеяния, поскольку, в силу (112), $\lim\limits_{E\to 0} f_{l=0}(E)=a$. Более того, во многих случаях можно показать, что $\sum\limits_{l\geqslant 1} k^{-2}\sin^2\delta_l(k^2)\to 0$ при $k\to 0$, так что $\lim\limits_{E\to 0}\sigma_{\text{tot}}(E)=4\pi a^2$ в силу (111).

Е. Функции Йоста и теорема Левинсона

Теорема XI.53 связывает фазовый сдвиг с решениями радиального уравнения Шредингера для регулярного V. Чтобы рассмотреть V общего вида, а также систематически исследовать решения уравнения (114), полезно переписать уравнение Шредингера с граничными условиями как интегральное уравнение. Подход, основанный на интегральном уравнении, позволит нам, кроме того, установить связь между числом сферически-симметричных собственных функций и фазовым сдвигом s-волны. Мы рассматриваем лишь случай $l=0$. Литературные ссылки относительно общего случая можно найти в Замечаниях.

Определение. **Интегральным уравнением Шредингера с регулярными граничными условиями в нуле**, или, короче, **регулярным уравнением**, мы называем уравнение

$$f(x)=x+\int_0^x (x-y)[V(y)-k^2]f(y)\,dy. \tag{125}$$

Определение. Пусть $k\neq 0$. **Интегральным уравнением Шредингера с граничными условиями Йоста на бесконечности**, или, короче, **уравнением Йоста**, мы называем уравнение

$$f(x)=e^{-ikx}-\int_x^\infty \frac{\sin k(x-y)}{k} V(y)f(y)\,dy. \tag{126}$$

Когда потенциал V достаточно регулярен, например когда он непрерывен, (125) и (126) эквивалентны дифференциальному уравнению Шредингера (114) с соответствующими граничными условиями. Для переписывания дифференциальных уравнений второго порядка с граничными условиями в виде интегральных уравнений существует последовательная процедура, называемая методом вариации параметров (см. дополнение 2).

Теорема XI.56. Предположим, что V — измеримая функция, удовлетворяющая условию $N(x) \equiv \int_0^x y\,|V(y)|\,dy < \infty$ для каждого $x > 0$. Тогда при каждом $k \in \mathbb{C}$ регулярное уравнение (125) имеет единственное решение $\varphi(x, k)$, которое при этом локально ограничено на $(0, \infty)$ и удовлетворяет условию $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\,|x^{-1}\varphi(x)| < \infty$. Более того, $\varphi(x, k)$ непрерывно дифференцируемо по x на $[0, \infty)$, причем $\varphi(0, k) = 0$, $\varphi'(0, k) = 1$, и при каждом фиксированном x функции $\varphi(x, k)$ и $\varphi'(x, k)$ — целые функции от k, удовлетворяющие оценкам

$$|\varphi(x, k)| \leqslant x \exp\left[N(x) + {}^1/_2\,|k|^2 x^2\right],$$
$$|\varphi'(x, k)| \leqslant \exp\left[N(x) + {}^1/_2\,|k|^2 x^2\right].$$

Кроме того, $\overline{\varphi(x, k)} = \varphi(x, \bar{k})$. Такое φ называется **регулярным решением**.

Доказательство. Пусть $\psi(x) = f(x)/x$; тогда, чтобы решить (125), мы ищем ψ, удовлетворяющее уравнению

$$\psi(x) = 1 + \int_0^x K(x, y)\,\psi(y)\,dy, \tag{127}$$

где $K(x, y) = y(1 - y/x)(V(y) - k^2)$. Итерируя (127), получаем формальный ряд

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x), \tag{128}$$

где

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_n(x) = \int_0^x K(x, y)\,\psi_{n-1}(y)\,dy.$$

Докажем по индукции, что

$$|\psi_n(x)| \leqslant (n!)^{-1} P(x)^n, \tag{129}$$

где $P(x) = N(x) + {}^1/_2\,|k|^2 x^2$. Неравенство (129) с очевидностью справедливо при $n = 0$. Если $0 \leqslant y \leqslant x$, то $|K(x, y)| \leqslant y(|V(y)| +$

$+|k^2|)$, поэтому если ψ_n удовлетворяет (129), то

$$|\psi_{n+1}(x)| \leqslant \int_0^x y\,(|V(y)|+|k|^2)\,(n!)^{-1}P(y)^n\,dy =$$

$$= (n!)^{-1}\int_0^x (P(y))^n \frac{dP}{dy}\,dy = [(n+1)!]^{-1}(P(x))^{n+1},$$

и (129) доказано.

Мы заключаем, что ряд (128) сходится равномерно на компактах по x и k. Поскольку каждое $\psi_n(x)$ аналитично по k (это полином!), то аналитична по k и предельная функция. ψ удовлетворяет уравнению (127), так что φ удовлетворяет уравнению (125). Оценка на φ следует из (129). Аналитичность φ' по k и оценка на φ' следуют из формулы

$$\varphi'(x, k) = 1 - \int_0^x y\,(V(y)-k^2)\,\psi(y, k)\,dy$$

и оценки (129). Доказательство единственности мы оставляем читателю (задача 84). ∎

Теорема XI.57. Предположим, что V — измеримая функция, удовлетворяющая условию $\int_x^\infty |V(y)|\,dy < \infty$ для каждого $x > 0$. Определим $Q_k(x)$ равенством

$$Q_k(x) = \int_x^\infty (1+|k|\,y)^{-1}\,4y\,|V(y)|\exp[(\operatorname{Im}k+|\operatorname{Im}k|)\,y]\,dy.$$

Тогда:

(a) Для каждого $k\in\mathbb{C}$, такого, что $\operatorname{Im}k\leqslant 0$ и $k\neq 0$, уравнение Йоста (126) имеет единственное решение $\eta(x, k)$, удовлетворяющее при этом условию $\lim_{x\to\infty}|e^{ikx}\eta(x, k)|<\infty$. Более того, $\eta(x, k)$ непрерывно дифференцируемо по x на полуоси $[0, \infty)$, причем $\lim_{x\to\infty} e^{ikx}\eta(x, k)=1$ и $\lim_{x\to\infty} e^{ikx}\eta'(x, k) = -ik$. Для каждого фиксированного x функции $\eta(x, k)$ и $\eta'(x, k)$ аналитичны в области $\{k\,|\operatorname{Im}k<0\}$, непрерывны в области $\{k\,|\operatorname{Im}k\leqslant 0,\ k\neq 0\}$ и удовлетворяют оценкам

$$|\eta(x, k)-e^{-ikx}| \leqslant e^{(\operatorname{Im}k)x}\,|e^{Q_k(x)}-1|, \tag{130a}$$

$$|\eta'(x, k)+ike^{-ikx}| \leqslant e^{(\operatorname{Im}k)x}\,e^{Q_k(x)}\int_x^\infty |V(y)|\,dy. \tag{130b}$$

(b) Если помимо этого $\int\limits_0^\infty x|V(x)|\,dx<\infty$, то $\eta(x, k)$ может быть продолжена до точки $k=0$ таким образом, что она станет непрерывной в области $\{k \mid \operatorname{Im} k \leqslant 0\}$. Более того, при этом сохранятся оценки (130).

(c) Если помимо этого $\int\limits_x^\infty e^{my}|V(y)|\,dy<\infty$, то $\eta(x, k)$ может быть при каждом x продолжена до функции, аналитической в области $\{k \mid \operatorname{Im} k < m/2\}$. Более того, при этом сохранятся оценки (130).

В каждом из этих случаев $\overline{\eta(x, k)}=\eta(x, -\bar{k})$. Такое η называется **решением Йоста.**

Доказательство. Идея доказательства совершенно аналогична доказательству теоремы XI.56, так что мы дадим лишь набросок, оставляя детали читателю (задача 85). Уравнение (126) формально решается рядом

$$\eta(x, k)=\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x, k),$$

где $\eta_0(x, k)=e^{-ikx}$ и

$$\eta_n(x, k)=\int\limits_x^\infty k^{-1}[\sin k(y-x)]V(y)\,\eta_{n-1}(y, k)\,dy.$$

Из оценки

$$\frac{|\sin k(x-y)|}{|k|} \leqslant \frac{4y}{1+|k|y} \exp[|\operatorname{Im} k|y+(\operatorname{Im} k)x], \quad y \geqslant x \geqslant 0,$$

по индукции получаем неравенство

$$|\eta_n(x, k)| \leqslant (n!)^{-1} Q_k(x)^n.$$

Если $k^{-1}\sin k(x-y)$ при $k=0$ понимать как $(x-y)$, то эти оценки продолжают выполняться, когда $k=0$. Каждая итерация, как легко видеть, аналитична во внутренности области, где $Q_k(1)<\infty$, и непрерывна на ее границе. Утверждения теоремы доказываются суммированием рядов. ∎

Определим теперь функцию Йоста, которая, как мы увидим, тесно связана с амплитудой рассеяния.

Теорема XI.58. Пусть V удовлетворяет неравенству.

$$\int\limits_0^x |y||V(y)|\,dy+\int\limits_x^\infty |V(y)|\,dy<\infty$$

для каждого x. Тогда:

(a) $\eta(k) \equiv \eta(x, k)\varphi'(x, k) - \eta'(x, k)\varphi(x, k)$ не зависит от x; $\eta(k)$ называется **функцией Йоста**;

(b) $\eta(k)$ аналитична в области $\{k \mid \operatorname{Im} k < 0\}$ и непрерывна в $\{k \mid \operatorname{Im} k \leqslant 0,\ k \neq 0\}$; если V удовлетворяет оценке $\int_1^\infty e^{my}|V(y)|\,dy < \infty$ для некоторого $m > 0$, то $\eta(k)$ аналитична в области $\{k \mid \operatorname{Im} k < {}^1/_2 m\}$;

(c) если k вещественно и отлично от нуля, то $\eta(k) \neq 0$, $\eta(-k) = \overline{\eta(k)}$ и $\eta(k)/\eta(-k) = e^{2i\delta_0(k^2)}$, где $\delta_0(k^2)$ — фазовый сдвиг s-волны;

(d) все нули $\eta(k)$ в области $\{k \mid \operatorname{Im} k < 0\}$ простые; они лежат на мнимой оси, и k есть нуль тогда и только тогда, когда k^2 — энергия связанного состояния при $l = 0$;

(e) $\lim\limits_{\substack{k \to \infty \\ \operatorname{Im} k \leqslant 0}} \eta(k) = 1$.

Доказательство. (a) Предположим сначала, что $V \in C_0^\infty(0, \infty)$. Тогда как η, так и φ удовлетворяют дифференциальному уравнению $-u'' + Vu = k^2 u$, так что величина $\eta\varphi' - \eta'\varphi$ постоянна, поскольку она равна вронскиану двух решений (явное вычисление показывает, что $(\eta\varphi' - \eta'\varphi)' = 0$). Если V — произвольный потенциал, удовлетворяющий условию теоремы, то можно найти такие $V_n \in C_0^\infty$, что $\int_0^1 y|V_n - V|\,dy + \int_1^\infty |V_n - V|\,dy \to 0$ при $n \to \infty$. По построению φ и η, заключаем, что поточечно $\varphi_n \to \varphi$, $\varphi_n' \to \varphi'$, $\eta_n \to \eta$, $\eta_n' \to \eta'$, так что (a) выполняется и в общем случае. Доказательство нашего утверждения о том, что η называется функцией Йоста, см. в Замечаниях.

(b) Это следует из свойств аналитичности функций φ, φ', η, η', полученных в теоремах XI.56 и XI.57.

(c) Поскольку $\overline{\varphi(x, k)} = \varphi(x, k) = \varphi(x, -k)$ и $\overline{\eta(x, k)} = \eta(x, -k)$, когда k вещественно, заключаем, что $\eta(-k) = \overline{\eta(k)}$. Далее утверждается, что

$$\varphi(x, k) = (2ik)^{-1}\{\eta(k)\eta(x, -k) - \eta(-k)\eta(x, k)\}. \tag{131}$$

Докажем (131) и основное соотношение $\eta(k)/\eta(-k) = e^{2i\delta_0}$ для $V \in C_0^\infty(0, \infty)$. Общий случай получается предельным переходом, как в доказательстве части (a). Предположим, что $\operatorname{supp} V \subset [a, b]$, $0 < a < b < \infty$. Тогда $\varphi(\cdot, k)$, $\eta(\cdot, k)$ и $\eta(\cdot, -k)$ все будут решениями уравнения $-u'' + Vu = k^2 u$. Более того, при $x > b$ имеем $\eta_\pm(x) \equiv \eta(x, \pm k) = e^{\pm ikx}$, так что $\eta_\pm$ линейно независимы и их вронскиан $W(\eta_+, \eta_-) = \eta_+\eta_-' - \eta_-\eta_+'$ равен $2ik$. Следовательно,

$$\varphi = W(\eta_+, \eta_-)^{-1}[W(\eta_+, \varphi)\eta_- - W(\eta_-, \varphi)\eta_+],$$

а это и есть (131).

Из (131), свойства $\eta(k) = \overline{\eta(-k)}$ и того, что φ не есть тождественный нуль, вытекает, что $\eta(k) \neq 0$. Более того, поскольку $\eta_\pm(x) = e^{\pm ikx}$ для $x > b$, мы видим, что

$$\varphi(x) = k^{-1}|\eta(k)|\sin(kx + d(k))$$

при $x > b$, если $\eta(k) = |\eta(k)|e^{id(k)}$. В силу теоремы XI.53, тогда $d(k) = \delta_0(k^2) \pmod{2\pi}$.

(d) Сначала мы утверждаем, что $(-\Delta + V - k^2)(x^{-1}\varphi(x, k)) = 0$, где $-\Delta$ следует понимать в смысле дифференцирования обобщенных функций. Действительно, это равенство выполняется, если $V \in C_0^\infty(0, \infty)$, а тогда, в силу предельного перехода, и для V общего вида. Если $\eta(k) = 0$, то φ отличается от $\eta(x, k)$ постоянным множителем, а потому лежит в L^2 на бесконечности. Итак, k чисто мнимое, а k^2 — собственное значение.

Обратно, предположим, что $V \in C_0^\infty$ и что k^2 — собственное значение оператора $-\Delta + V$ при $l = 0$. Так как V убывает экспоненциально, то η — целая функция, поэтому (131) выполняется для всех k. Тогда после аналитического продолжения равенства (131) заключаем, что $\eta(k) = 0$ С помощью предельного перехода это распространяется на все V.

Наконец, нам следует показать, что нули η простые. Заметим сначала, что если $u = x^{-1}\varphi$ и $v = x^{-1}\partial\varphi/\partial k$, то

$$(-\Delta + V - k^2)u = 0, \tag{132a}$$

$$(-\Delta + V - k^2)v = 2ku \tag{132b}$$

в смысле обобщенных функций. Более того, можно показать, что если $\eta(k_0) = \overline{(\partial\eta/\partial k)}(k_0) = 0$, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial k} = c_1\eta + c_2\frac{\partial\eta}{\partial k},$$

так что $v \in L^2$. Но если $u, v \in L^2$, то равенства (132) несовместимы с $u \neq 0$, поскольку

$$2k\|u\|^2 = (u, (-\Delta + V - k^2)v) = 0.$$

Итак, если $\eta(k_0) = 0$, то $\partial\eta/\partial k \neq 0$ в точке k_0, так что нули η простые.

(e) В силу (130a) и равенства $\eta(k) = \eta(0, k)$,

$$|\eta(k) - 1| \leqslant |\exp Q_k(0) - 1|,$$

если $\operatorname{Im} k \leqslant 0$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^\infty \frac{y\,|V(y)|}{1+|k|\,y} = 0,$$

а это следует из теоремы о монотонной сходимости. ∎

Один из наиболее эффектных результатов применения техники функции Йоста представляет собой следующая

Теорема XI.59 (теорема Левинсона). Пусть V удовлетворяет условию $\int_0^\infty x\,|V(x)|\,dx < \infty$, и пусть η — функция Йоста, а δ_0 — фазовый сдвиг s-волны, нормированный условием $\lim_{k\to\infty} \delta_0(k^2) = 0$. Тогда

$$\delta_0(0) = \begin{cases} n_0\pi, & \text{если } \eta(0) \neq 0, \\ (n_0 + 1/2)\,\pi, & \text{если } \eta(0) = 0, \end{cases}$$

где n_0 — число собственных значений оператора $-\Delta + V$, которым отвечают сферически-симметричные собственные функции.

Доказательство. Мы рассмотрим случай $\eta(0) \neq 0$. Случай $\eta(0) = 0$ отнесен к задачам. В силу (131), $k^2 < 0$ для всех собственных

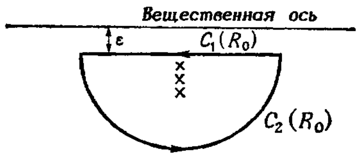

Рис. XI.10. Контур интегрирования в теореме Левинсона.

функций, отвечающих $l = 0$, так что, по теореме XI.58 (d), n_0 — число нулей $\eta(k)$ в нижней полуплоскости. Пусть $0 < \theta < \pi/2$. Выберем R_0 так, чтобы $|\eta(k) - 1| < 2\sin(\theta/2)$ при $|k| \geqslant R_0$, $\operatorname{Im} k \leqslant 0$. По теореме XI.58(e) такое R_0 существует. Рассмотрим интеграл от η'/η по замкнутому контуру $C = C_1 \cup C_2$, представленному на рис. XI.10. Полюсы η'/η — это нули η, а поскольку эти нули простые, соответствующие вычеты равны 1. Итак,

$$n_0 = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\eta'}{\eta}\, dz.$$

Далее, $i^{-1}\eta'/\eta = d(\arg \eta)/dz$, так что в пределе при $\varepsilon \to 0$ вклад от C_1 равен $\pi^{-1}(\delta_0(0) - \delta_0(R_0^2))$. Поскольку $|\arg \eta| < \theta$ на всем $C_2(R_0)$ в силу выбора R_0, мы заключаем, что

$$|\pi^{-1}[\delta_0(0) - \delta_0(R_0^2)] - n_0| \leqslant 2\theta.$$

Переходя к $R_0 \to \infty$, $\theta \to 0$, видим, что $\delta_0(0) = n_0\pi$. ∎

В § 7 мы убедились в том, что полюсы в верхней полуплоскости амплитуды рассеяния вперед могут располагаться только в тех точках k, для которых k^2 — собственное значение оператора $-\Delta+V$. Формула

$$f_{l=0}(k^2)=2ik^{-1}(\eta(k)-\eta(-k))/\eta(-k),$$

которая следует из теоремы XI.58(c), вместе с тем фактом, что нулями $\eta(-k)$ могут быть только те точки, в которых k^2 — собственное значение, наводит на мысль, что полюсы $f_{l=0}(k^2)$ в верхней полуплоскости также отвечают только связанным состояниям. Это неверно. Прежде всего для потенциалов общего вида области аналитичности $\eta(k)$ и $\eta(-k)$ не пересекаются, и для $f_{l=0}$ может не существовать аналитического продолжения. Кроме того, может случиться, что $\eta(k)$ обладает мероморфным продолжением в верхнюю полуплоскость с полюсами в некоторых точках. Эти полюсы породят полюсы для $f_{l=0}$, которые не соответствуют связанным состояниям. Это явление будет рассмотрено в следующей части.

F. Аналитичность парциальных амплитуд для обобщенного потенциала Юкавы

В § 7 мы видели, что полная амплитуда рассеяния $f(E,\cos\theta)$ обладает свойствами аналитичности по E при $\cos\theta=1$ в достаточно общих предположениях. Аналитичность же при $\theta\neq0$ требовала экспоненциального убывания. Не удивительно тогда, что свойства аналитичности для $f_0(k)$ — амплитуды s-волны — также требуют экспоненциального убывания. На основе результатов части E формул $s_0(k^2)=\eta(k)/\eta(-k)$ и $f_0(k^2)=(2ik)^{-1}[s_0(k^2)-1]$ видим, что справедлива

Теорема XI.60. Если $\int\limits_1^\infty e^{my}|V(y)|\,dy+\int\limits_0^1 y|V(y)|\,dy<\infty$, то парциальная амплитуда s-волны вещественно аналитична на $(0,\infty)$ и имеет мероморфное продолжение с верхнего берега вещественной положительной полуоси в параболическую область $\{E \mid |E|-\operatorname{Re}E\leqslant m^2/2,\ E$ не есть положительное вещественное число$\}$ (см. рис. XI.11), причем положения полюсов этого продолжения отвечают в точности энергиям связанных состояний в области $E>-m^2/4$.

Доказательство. Пусть $G(k)=\eta(k)/\eta(-k)$. Тогда G аналитична в области $|\operatorname{Im}k|\leqslant m/2$. В области $\operatorname{Im}k>0$ функция $G(k)$ может иметь полюсы лишь тогда, когда $\eta(-k)=0$. Если $\eta(-k)=0$, то, в силу аналитического продолжения равенства (131), $\eta(k)\neq0$. Итак, G имеет полюсы в точности в нулях $\eta(-k)$. Теорема следует теперь из формулы $f_0(E)=(2i\sqrt{E})^{-1}[G(\sqrt{E})-1]$. ∎

Для обобщенных потенциалов Юкавы, определенных в § 7, можно утверждать гораздо больше (μ_0 — константа из определения обобщенных потенциалов Юкавы).

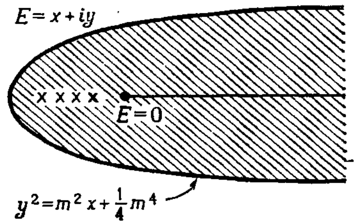

Рис. XI.11. Область аналитичности $f_0(E)$ в общем случае.

Теорема XI.61. Пусть $f_0(E)$ — амплитуда рассеяния s-волны для обобщенного потенциала Юкавы. Тогда существует функция $F(E)$, мероморфная в $D=\mathbb{C}\diagdown([0, \infty)\cup(-\infty, -(\mu_0/2)^2])$ и такая, что для $E\in(0, \infty)$

$$f_0(E)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(E+i\varepsilon).$$

Полюсы F, *лежащие в* D, встречаются лишь на отрицательной полуоси и только в точках, отвечающих энергиям связанных состояний, причем каждой такой энергии в интервале $(-(\mu_0/2)^2, 0)$ отвечает некоторый полюс Кроме того, $f_0(E)$ вещественно аналитична на $(0, \infty)$.

Прежде чем обратиться к доказательству теоремы XI.61, сделаем ряд замечаний, одно из которых объясняет, почему в теореме речь идет только о полюсах *в* D. Во-первых, можно доказать, что f аналитична в $\mathbb{C}\diagdown([0, \infty)\cup(-\infty, -\mu_0^2])$. Во-вторых, на самом деле мы докажем больше, чем утверждается в теореме. Будет показано, что функция $G(k)$, определенная равенством $G(k)=F(k^2)$ при $\operatorname{Im} k>0$, обладает мероморфным продолжением в область $\mathbb{C}\diagdown([{}^1/_2 i\mu_0, i\infty)\cup(-i\infty, -{}^1/_2 i\mu_0])$ (см. рис. XI.12). В результате видно, что разрез от 0 до ∞ у $F(E)$ обусловлен только выбором переменной $E=k^2$, и возможен переход на второй лист за этот разрез. Полюсы $F_0(E)$ на втором листе с $\operatorname{Im} E\neq 0$ (эквивалентно, полюсы $G(k)$ в точках с $\operatorname{Re} k\neq 0$, $\operatorname{Im} k<0$) называются **резонансными полюсами**; можно показать, что они в точности отвечают резонансам, которые будут рассмотрены в § XII.6, поскольку обобщенные потенциалы Юкавы аналитичны относительно масштабных преобразований. Полюсы, отвечающие точкам $k\in(-{}^1/_2 i\mu_0, 0)$, называются **антисвязанными состояниями.**

Поскольку разрез по $[0, \infty)$ обусловлен только использованием переменной E вместо k, его часто называют **кинематическим разрезом.** Иногда его называют также **унитарным разрезом,** поскольку скачок на нем определяется соотношением унитарности

$$F(E+i0)-F(E-i0)=2\operatorname{Im} f_0(E)=E^{1/2}\,|f_0(E)|^2$$

Разрез по $(-\infty, -(^1/_2\mu_0)^2)$ непосредственно связан с потенциалом в том смысле, что скачки на нем могут быть вычислены по некоторой итерационной схеме исходя непосредственно из потенциала (см. Замечания). Этот разрез называют **динамическим разрезом.** Иногда вместо слов «динамический и кинематический разрезы» употребляются термины **левый разрез** и **правый разрез.**

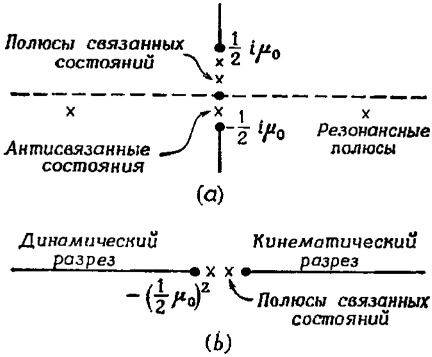

Рис. XI.12. (a) Область аналитичности $G(-k)$. (b) Область аналитичности $F(E)$.

И наконец, отметим одно тонкое место. Может случиться, что левый разрез частично «вырождается в полюсы», иными словами, что $F(E)$ имеет мероморфное продолжение в область, включающую интервал $(-a, -(^1/_2\mu_0)^2)$, $a > (^1/_2\mu_0)^2$, с полюсами в этой области. Эти полюсы могут не отвечать связанным состояниям; по этой причине их часто называют **ложными полюсами.** На самом деле существуют различные обобщенные потенциалы Юкавы V_1 и V_2, для которых соответствующие s-волновые парциальные амплитуды равны, но которые различаются тем, что все полюсы функции $F(E)$ соответствуют связанным состояниям оператора $-\Delta+V_1$, в то время как самый левый из них не соответствует связанному состоянию оператора $-\Delta+V_2$, а обусловлен его динамическим разрезом! Этот пример особенно удивителен из-за теоремы Левинсона, которая говорит нам, что функция $F(E+i0)$ определяет число связанных состояний, а потому, как можно было бы ожидать, и число полюсов связанных состояний. Тонкость состоит в том, что если энергия связанного состояния не лежит в интервале $(-a, (^1/_2\mu_0)^2)$, то ожидаемый там полюс может иметь нулевой вычет. Итак, хотя операторы $-\Delta+V_1$ и $-\Delta+V_2$ имеют одно и то же число связанных состояний при нулевом угловом моменте, они имеют разные числа «полюсов связанных состояний».

На протяжении всего доказательства теоремы XI.61 мы будем предполагать, что V имеет вид $V(x)=x^{-1}e^{-\mu_0 x}$. Распространение доказательства на обобщенные потенциалы Юкавы является простым упражнением. Основная идея состоит в использовании аналитичности $V(x)$ в области $\{x \mid \operatorname{Re} x>0\}$ для продолжения функции Йоста $\eta(k)$ по k. Таким образом, имеется тесная связь между этими идеями и идеями аналитического продолжения по масштабным преобразованиям из § XII.6 и XIII.10. Продолжение $\eta(k)$ мы осуществим в два приема.

Лемма 1. Функция $\eta(x, k)$, первоначально определенная на $\{\langle x, k\rangle \mid x\in(0, \infty), \operatorname{Im} k\leqslant 0\}$, может быть продолжена в область $\Omega=\{\langle x, k\rangle \mid \operatorname{Re} x>0, \operatorname{Im} k\leqslant 0\}$ таким образом, что она станет аналитической по совокупности переменных x и k в Ω^{int} и непрерывной в Ω. Более того, в Ω она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\frac{d^2}{dx^2}\eta(x, k)+V(x)\eta(x, k)=k^2\eta(x, k),$$

а в области $\Omega'=\{\langle x, k\rangle\in\Omega \mid |x|>1\}$ — оценке

$$|\eta(x, k)-e^{-ikx}|\leqslant e^{\operatorname{Im}(kx)}\{\exp[\mu_0^{-1}|k|^{-1}e^{-\mu_0 \operatorname{Re} x}]-1\} \tag{133}$$

Доказательство. Мы покажем, что η может быть продолжена на Ω' с сохранением оценки (133). Тем же методом можно продолжить η на область $\{\langle x, k\rangle\in\Omega \mid |x|>\varepsilon\}$, а тогда и на всю Ω. Поскольку дифференциальное уравнение имеет место для вещественных x, оно выполняется и для всех x по аналитическому продолжению. Фиксируем k с $\operatorname{Im} k\leqslant 0$. Определим $\eta_n(x, k)$ на Ω' индуктивно, полагая

$$\eta_0(x, k)=e^{-ikx},$$

$$\eta_n(x, k)=\int_0^\infty k^{-1}(\sin ky)V(y+x)\eta_{n-1}(y+x, k)\,dy.$$

Замена переменной интегрирования показывает, что $\eta_n(x, k)$ при вещественных x совпадают с функциями, введенными при доказательстве теоремы XI.57. Далее, на Ω' выполняются следующие оценки:

$$|\eta_n(x, k)|\leqslant(n!)^{-1}e^{\operatorname{Im}(kx)}(\mu_0|k|)^{-n}e^{-n\mu_0 \operatorname{Re} x}. \tag{134}$$

Неравенство (134), конечно, выполнено для $n=0$, а если оно выполняется для некоторого n, то

$$|\eta_{n+1}(x, k)|\leqslant(n!)^{-1}(\mu_0|k|)^{-n}\int_0^\infty|k|^{-s}e^{y|\operatorname{Im} k|}e^{-\mu_0(\operatorname{Re} x+y)(n+1)}\times$$
$$\times e^{\operatorname{Im}(kx)+(\operatorname{Im} k)y}\,dy=[(n+1)!]^{-1}(\mu_0|k|)^{-n-1}e^{-(n+1)\mu_0 \operatorname{Re} x},$$

поскольку $|\operatorname{Im} k| + \operatorname{Im} k = 0$, когда $\operatorname{Im} k \leqslant 0$, а $(x+y)^{-1} \leqslant 1$, когда $|x| > 1$, $\operatorname{Re} x > 0$, $y \in (0, \infty)$. Это доказывает (134) по индукции.

В силу (134), интеграл, определяющий η_n, сходится абсолютно, так что функции η_n аналитичны в $(\Omega')^{\mathrm{int}}$. Поскольку ряд $\sum_n \eta_n$ абсолютно сходится по (134), его предел обладает требуемыми свойствами аналитичности и удовлетворяет оценке (133). ▮

Лемма 2. Функция Йоста $\eta(k)$ допускает аналитическое продолжение на $\mathbb{C} \setminus [{}^1/_2 i\mu_0, i\infty)$.

Доказательство. Поскольку мы уже знаем из теоремы XI.58, что $\eta(k)$ аналитична в области $\{k \mid \operatorname{Im} k \leqslant {}^1/_2\mu_0\}$, нам нужно только доказать, что $\eta(k)$ обладает аналитическим продолжением на каждую полуплоскость вида $\{k \mid \operatorname{Im}(e^{-i\alpha}k) \leqslant 0\}$ для каждого $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$. Фиксируем такое α и определим функцию $\tilde{\eta}$ на $\{\langle y, k\rangle \mid y \in \mathbb{R}, \operatorname{Im} k \leqslant 0\}$, полагая

$$\tilde{\eta}(y, k) = \eta(e^{-i\alpha}y, k),$$

где $\eta(x, k)$ продолжена на комплексные x с помощью леммы 1. Тогда $\tilde{\eta}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + \tilde{V}(y)\right)\tilde{\eta}(y, k) = \tilde{k}^2\tilde{\eta}(y, k), \tag{135}$$

где $\tilde{V}(y) = e^{-2i\alpha}V(e^{-i\alpha}y)$ и $\tilde{k} = e^{-i\alpha}k$. Более того, согласно оценке (133),

$$|\tilde{\eta}(y, k) - e^{-i\tilde{k}y}| \longrightarrow 0 \tag{136}$$

при $y \longrightarrow \infty$, коль скоро $\operatorname{Im} \tilde{k} \leqslant 0$, $\operatorname{Im} k \leqslant 0$. При доказательстве теоремы XI.57 вещественность V нигде не была использована, поэтому мы знаем, что уравнение (135) имеет единственное решение $\eta_1(y, \tilde{k})$ в области $\{\langle y, k\rangle \mid y \in [0, \infty), \operatorname{Im} \tilde{k} \leqslant 0\}$, удовлетворяющее (136). Итак, $\tilde{\eta}(y, k)$ и $\eta_1(y, e^{-i\alpha}k)$ совпадают в области $\{k \mid \operatorname{Im} k \leqslant 0, \operatorname{Im}(e^{-i\alpha}k) \leqslant 0\}$, значит, η_1 — аналитическое продолжение $\tilde{\eta}$ на область $\{k \mid \operatorname{Im}(e^{-i\alpha}k) \leqslant 0\}$. В частности, функция $\eta(k) = \tilde{\eta}(0, k)$ допускает продолжение на эту область. ▮

Доказательство теоремы XI.61. Поскольку $f_0(k^2) = (2ik)^{-1} \times [e^{2i\delta_0(k)} - 1]$, достаточно доказать утверждения об аналитичности для функции $s_0(k) = e^{2i\delta_0(k)}$. Но $s_0(k) = \eta(k)/\eta(-k)$, поэтому $s_0(k)$ мероморфна в $D = \{k \mid k \notin [{}^1/_2 i\mu_0, \infty) \cup (-\infty, -{}^1/_2 i\mu_0]\}$ и полюсы в $D \cap \{k \mid \operatorname{Im} k > 0\}$ возникают лишь в точках k_0, для которых $\eta(-k_0) = 0$. Более того, как и при доказательстве теоремы XI.60, полюсы отвечают всем таким k_0. ▮

G. Вариационный принцип Кона

При обсуждении метода переменной фазы мы ввели важный параметр: длину рассеяния, через которую при определенных предположениях выражается сечение: $\lim\limits_{E\to 0}\sigma_{\text{tot}}(E)=4\pi a^2$. Напомним, что длина рассеяния для потенциалов V с компактным носителем была определена путем построения должным образом нормированного решения уравнения $-\varphi''+V\varphi=0$, $\varphi(0)=0$, при условии $\varphi(r)=r+a$ для больших r. Рассмотрим вещественнозначные функции ψ на $[0, \infty)$ вида

$$\psi=\alpha r+\beta+g, \qquad \psi(0)=0, \tag{136a}$$

с гладкой функцией g, убывающей вместе со своими производными g', g'' быстрее любого полинома. Пусть Q — множество таких функций, и пусть $\alpha(\psi)$, $\beta(\psi)$ — константы в (136a).

Для ψ, $\eta\in Q$ можно определить естественный объект:

$$(\psi, h\eta)=\int_0^\infty \psi(r)(-\eta''(r)+V(r)\eta(r))\,dr,$$

поскольку $\psi(-\eta'')$ лежит в L^1. Однако $(\psi, h\eta)$ и $(\eta, h\psi)$ не совпадают; на самом деле

$$(\psi, h\eta)-(\eta, h\psi)=\int_0^\infty(\psi''\eta-\psi\eta'')\,dr=\alpha(\psi)\beta(\eta)-\beta(\psi)\alpha(\eta), \tag{136b}$$

поскольку граничные члены не исчезают на бесконечности. Возьмем η равным φ — решению уравнения $h\varphi=0$, и предположим, что ψ таково, что $\alpha(\psi)=1$. Тогда $(\psi, h\eta)=0$ и

$$\begin{aligned}a&=\beta(\psi)-(h\psi, \varphi)=\beta(\psi)-(h\psi, \psi)+(h\psi, (\psi-\varphi))=\\&=\beta(\psi)-(h\psi, \psi)+(h(\psi-\varphi), (\psi-\varphi)).\end{aligned}$$

Уравнение

$$a=\beta(\psi)-(h\psi, \psi)+(h(\psi-\varphi), (\psi-\varphi)) \tag{136c}$$

называется **вариационным принципом Кона.** В некоторых случаях его можно применять для получения строгой оценки длины рассеяния.

Теорема XI.61½ (оценка Розенберга—Шпруха). Предположим, что потенциал $V\in C_0^\infty$ централен и что оператор $-\Delta+V$ не имеет отрицательных собственных значений. Пусть ψ — произвольная функция из Q с $\alpha(\psi)=1$. Тогда длина рассеяния a удовлетворяет неравенству

$$a\geqslant\beta(\psi)-(h\psi, \psi). \tag{136d}$$

Доказательство. По вариационному принципу Кона (136с), достаточно показать, что $(h\eta,\ \eta)\geqslant 0$ для $\eta\in Q$ с $\alpha(\eta)=0$. Пусть $g\in C^\infty[0,\ \infty)$, причем $g=1$ (соответственно $g=0$) при $r<1$ (соответственно $r>2$), и пусть $g_R(x)=g(x/R)$. Тогда $\eta g_R\in L^2$, так что $0\leqslant(g_R\eta,\ h(g_R\eta))$ по предположению об отсутствии отрицательных собственных значений. Но $(g_R\eta,\ h(g_R\eta))=X+Y+Z$, где

$$
\begin{aligned}
X &= (g_R^2\eta,\ h\eta)\longrightarrow(\eta,\ h\eta) && \text{при}\quad R\longrightarrow\infty,\\
Y &= -(g_R\eta,\ \eta g_R'')\longrightarrow 0 && \text{при}\quad R\longrightarrow\infty,\\
Z &= -2(g_R\eta,\ (\nabla\eta)\nabla g_R)\longrightarrow 0 && \text{при}\quad R\longrightarrow\infty,
\end{aligned}
$$

где все утверждения о сходимостях следуют из оценок $h\eta\leqslant\leqslant d_1(1+r)^{-2}$, $\eta\leqslant d_2$, $\nabla\eta\leqslant d_3(1+r)^{-2}$, $\|g_R''\|_\infty\leqslant d_4R^{-2}$ и $\|g_R'\|_\infty\leqslant d_5R^{-1}$. Следовательно, $(\eta,\ h\eta)\geqslant 0$. ∎

Верхнюю или нижнюю оценку на a^2 дает (136d), зависит от того, положительно или отрицательно a. Например, согласно следствию 3 теоремы XI.54 и теореме XI.55, если V всюду неотрицателен, то (136d) дает верхнюю оценку на a^2.

Дополнение 1 к § XI.8. Полиномы Лежандра и сферические функции Бесселя

Теория рассеяния требует сведений о некоторых классах специальных функций. Основные свойства полиномов Лежандра проще всего вывести, определив эти полиномы с помощью производящей функции.

Определение. Для каждого $z\in\mathbb{C}$ функция

$$F(x,\ z)=(1-2zx+x^2)^{-1/2}$$

аналитична вблизи $x=0$. **Полиномы Лежандра** $P_l(z)$ определяются как

$$P_l(z)=(l!)^{-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^l F(x,\ z)\,|_{x=0},$$

или, что эквивалентно, как

$$(1-2xz+x^2)^{-1/2}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(z)\,x^l.$$

Теорема XI.62. (a) $P_l(z)$ — полином степени l с вещественными коэффициентами.

(b) $P_l(1)=1$, $P_l(-z)=(-1)^l P_l(z)$.

(c) Если f задана на $\mathbb{R}^3$ как $f(\mathbf{x})=r^lP_l(\cos\theta)$, где $r=|\mathbf{x}|$ и $\cos\theta=x_3/r$, то $-\Delta f=0$.