Доказательство. По вариационному принципу Кона (136c), достаточно показать, что $(h\eta, \eta) \geqslant 0$ для $\eta \in Q$ с $\alpha(\eta) = 0$. Пусть $g \in C^\infty[0, \infty)$, причем $g = 1$ (соответственно $g = 0$) при $r < 1$ (соответственно $r > 2$), и пусть $g_R(x) = g(x/R)$. Тогда $\eta g_R \in L^2$, так что $0 \leqslant (g_R\eta, h(g_R\eta))$ по предположению об отсутствии отрицательных собственных значений. Но $(g_R\eta, h(g_R\eta)) = X + Y + Z$, где

$$
\begin{aligned}
X &= (g_R^2\eta, h\eta) \to (\eta, h\eta) && \text{при} \quad R \to \infty, \\
Y &= -(g_R\eta, \eta g_R'') \to 0 && \text{при} \quad R \to \infty, \\
Z &= -2(g_R\eta, (\nabla\eta)\nabla g_R) \to 0 && \text{при} \quad R \to \infty,
\end{aligned}
$$

где все утверждения о сходимостях следуют из оценок $h\eta \leqslant$ $\leqslant d_1(1+r)^{-2}$, $\eta \leqslant d_2$, $\nabla\eta \leqslant d_3(1+r)^{-2}$, $\|g_R''\|_\infty \leqslant d_4 R^{-2}$ и $\|g_R'\|_\infty \leqslant d_5 R^{-1}$. Следовательно, $(\eta, h\eta) \geqslant 0$. ∎

Верхнюю или нижнюю оценку на a^2 дает (136d), зависит от того, положительно или отрицательно a. Например, согласно следствию 3 теоремы XI.54 и теореме XI.55, если V всюду неотрицателен, то (136d) дает верхнюю оценку на a^2.

Дополнение 1 к § XI.8. Полиномы Лежандра и сферические функции Бесселя

Теория рассеяния требует сведений о некоторых классах специальных функций. Основные свойства полиномов Лежандра проще всего вывести, определив эти полиномы с помощью производящей функции.

Определение. Для каждого $z \in \mathbb{C}$ функция

$$F(x, z) = (1 - 2zx + x^2)^{-1/2}$$

аналитична вблизи $x = 0$. **Полиномы Лежандра** $P_l(z)$ определяются как

$$P_l(z) = (l!)^{-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^l F(x, z)\Big|_{x=0},$$

или, что эквивалентно, как

$$(1 - 2xz + x^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(z)\, x^l.$$

Теорема XI.62. (a) $P_l(z)$ — полином степени l с вещественными коэффициентами.

(b) $P_l(1) = 1$, $P_l(-z) = (-1)^l P_l(z)$.

(c) Если f задана на $\mathbb{R}^3$ как $f(\mathbf{x}) = r^l P_l(\cos\theta)$, где $r = |\mathbf{x}|$ и $\cos\theta = x_3/r$, то $-\Delta f = 0$.

(d) (Уравнение Лежандра.)

$$(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}P_l(z)-2z\frac{d}{dz}P_l(z)+l(l+1)P_l(z)=0.$$

(e) $\int\limits_{-1}^{1} P_l(z)\,P_m(z)dz=\frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$.

(f) Набор $\{(l+1/2)^{1/2}P_l(z)\}_{l=0}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L^2((-1,\ 1), dz)$.

Доказательство. (a) По биномиальной теореме

$$(1-2xz+x^2)^{-1/2}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-1/2}{m}(-2xz+x^2)^m$$

для малых x, где $\binom{k}{m}=k(k-1)\ \dots\ (k-m+1)/m!$. Для фиксированного l в $(d/dx)^l F(x,\ z)|_{x=0}$ могут давать вклад только члены с $m\leqslant l$. Применяя биномиальную теорему к $(-2xz+x^2)^m$, видим, что $\sum\limits_{m=0}^{l}\binom{-1/2}{m}(-2xz+x^2)^m$ — полином от двух переменных степени l по z. Более того, $P_l(z)=(-2z)^l\binom{-1/2}{l}+O(z^{l-2})$, так что P_l имеет степень в точности l.

(b) Поскольку $(1-2x+x^2)^{-1/2}=(1-x)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, мы видим, что $P_l(1)=1$. Из $F(-x,\ -z)=F(x,\ z)$ следует, что $P_l(-z)=(-1)^l P_l(z)$.

(c) Фиксируем $R>0$. В области $\{\langle\mathbf{r},\ \mathbf{r}'\rangle\in\mathbb{R}^6\,|\,r<R<r'\}$ введем функцию $g(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$. Тогда $-\Delta g=0$ в области $\{\mathbf{r}\,|\,r<R\}$ для фиксированного r'. Пусть $\mathbf{r}'=\langle 0,\ 0,\ \alpha\rangle$ и $x=r/\alpha$. Тогда

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}=(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{-1/2}=(r')^{-1}(1+x^2-2x\cos\theta)^{-1/2}=$$
$$=(r')^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\,x^l=\sum_{l=0}^{\infty}(r')^{-l-1}r^lP_l(\cos\theta),$$

где мы воспользовались тем, что при $z\in(-1,\ 1)$ ряд для $F(x,\ z)$ имеет единичный радиус сходимости по x. Итак, $r^lP_l(\cos\theta)$ индуктивно задается равенством

$$r^lP_l(\cos\theta)=\lim_{r'\to\infty}(r')^{l+1}\left[g(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')-(r')^{-1}\sum_{k=0}^{l-1}P_k(\cos\theta)\left(\frac{r}{r'}\right)^k\right],$$

где сходимость равномерна в $\{\mathbf{r}\,|\,r<R\}$. Пользуясь индукцией по l и тем, что равномерный предел гармонических функций — гармоническая функция (задача 89), заключаем, что функция $r^lP_l(\cos\theta)$ гармоническая.

(d) Поскольку

$$\Delta = r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+(r^2\sin\theta)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}+(r^2\sin^2\theta)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

то (d) следует из (c).

(e) Уравнение Лежандра может быть записано в виде

$$\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}P_l(z) = -l(l+1)P_l(z).$$

Итак. если $l \neq m$, то $\int_{-1}^{1} P_l(z)P_m(z)\,dz = 0$, поскольку оператор $(d/dz)(1-z^2)(d/dz)$ симметричен. Далее, для малых x, с одной стороны, имеем

$$\int_{-1}^{1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}P_l(z)x^l\right)^2 dz = \int_{-1}^{1}(1-2xz+x^2)^{-1}\,dz =$$

$$= x^{-1}[\ln(1+x)-\ln(1-x)] = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{2l+1}x^{2l},$$

а с другой стороны, применяя тот факт, что для малых x и $z \in (-1, 1)$ сходимость $F(x, z)$ равномерна по z, и учитывая соотношения ортогональности, получаем

$$\int_{-1}^{1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}x^lP_l(z)\right)^2 dz = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}P_l(z)^2\,dz\right)x^{2l}.$$

(f) По теореме Стоуна — Вейерштрасса, множество $\{z^l\}_{l=0}^{\infty}$ тотально в $C(-1, 1)$, а потому и в $L^2(-1, 1)$. Таким образом, набор, который получится применением процедуры Грама—Шмидта к $\{z^l\}_{l=0}^{\infty}$, представляет собой ортонормированный базис. Но этот базис есть $(-1)^l(l+{}^1/_2)^{-1/2}P_l(z)$. ∎

Основное свойство степенных рядов состоит в том, что внутренность области их сходимости всегда есть круг. Это следует из того, что ряд $(z'-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/z'^{n+1}$ сходится в области $|z| < |z'|$, иными словами, когда z и z' могут быть отделены друг от друга окружностью с центром в начале координат. Мы хотим найти естественные области сходимости рядов Лежандра, т. е. рядов вида $\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_lP_l(z)$. Важную роль играют функции, возникающие при разложении в ряд Лежандра функции $(z'-z)^{-1}$. Поэтому введем следующее

Определение. **Присоединенные функции Лежандра** определяются в $\mathbb{C}\setminus[-1, 1]$ формулой

$$Q_l(z)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{P_l(z')}{z-z'}dz'.$$

Областями сходимости рядов Лежандра будут внутренности областей, ограниченных определенными кривыми.

Определение. Пусть $z\in\mathbb{C}\setminus[-1, 1]$. Под **каноническим эллипсом**, проходящим через z, мы понимаем единственный эллипс с фокусами ± 1, который проходит через z.

Теорема XI.63. (a) Пусть z и z' заданы так, что канонический эллипс, проходящий через z, лежит внутри канонического эллипса, проходящего через z'. Тогда

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(z)Q_l(z')=(z'-z)^{-1}. \tag{137}$$

Сходимость ряда в (137) равномерна, когда z и z' пробегают соответственно компактные множества C и D, коль скоро существует канонический эллипс E, такой, что C лежит внутри E, а D — вне E.

(b) Если f — функция, аналитическая во внутренности канонического эллипса E, то ряд

$$f(z)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_lP_l(z),$$

где

$$a_l=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}f(z)P_l(z)dz, \tag{138}$$

сходится равномерно на компактных подмножествах в E.

(c) Если a_l — произвольная последовательность и ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)\times$ $\times a_lP_l(z)$ сходится (соответственно расходится) для некоторого $z_0\in\mathbb{C}\setminus[-1, 1]$, то он абсолютно сходится для всех z внутри канонического эллипса, проходящего через z_0 (соответственно абсолютно расходится для всех z вне этого эллипса).

Доказательство. (a) Докажем сначала, что ряд (137) сходится равномерно, а потом уже установим, что предел действительно равен $(z'-z)^{-1}$. Рассмотрим отображение $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, при котором много точек переходят в одну, а именно $\theta\mapsto z=\cos\theta$. Линии $\operatorname{Im}\theta=c$ переходят при этом в канонические эллипсы (задача 90 а), и при заданном фиксированном z величина $|\operatorname{Im}\theta|$

не зависит от того, какое выбрано $\theta = \arccos z$. Поскольку функция $F(x, z)$ при фиксированном z имеет особенности в точках

$$x = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta},$$

мы видим, что для фиксированных z ряд $F(x,z)$ имеет радиус сходимости $e^{-|\operatorname{Im}\theta|}$. По оценке Коши, для любого фиксированного $H > 1$ и любого компактного множества C внутри канонического эллипса $|\operatorname{Im}\theta| = \ln H$ величина $P_l(z) H^{-l}$ равномерно ограничена, когда z пробегает C, а l — последовательность 0, 1, ... Аналогичная оценка для $Q_l(z)$ (задачи 90b, c, d) показывает, что для любого $H > 1$ и любого компакта D вне канонического эллипса $|\operatorname{Im}\theta| = \ln H$ величина $Q_l(z) H^l$ равномерно ограничена, когда z пробегает D. По C, D и E, заданным как в условиях теоремы, найдется эллипс E' (соответственно E''), определяемый уравнением $|\operatorname{Im}\theta| = \ln H'$ (соответственно $|\operatorname{Im}\theta| = \ln H''$), такой, что он лежит внутри (соответственно вне) E, а C (соответственно D) лежит внутри E' (соответственно вне E''). Пользуясь тем, что $H'' > H'$, видим, что для $z \in C$, $z \in D$

$$|P_l(z)\, Q_l(z')| \leqslant C\,[H'/H'']^l,$$

так что ряд (137) сходится.

Если фиксировать E и z' вне E, то предельная функция $G(z, z')$ аналитична по z для z из E. Более того,

$$\int_{-1}^{1} P_l(z)\,[G(z, z') - (z' - z)^{-1}]\,dz = 0,$$

поскольку $P_l(z)(l + 1/2)^{-1/2}$ — ортонормированный базис пространства $L^2[-1, 1]$. Итак, $G(z, z') = (z' - z)^{-1}$ для $z \in (-1, 1)$, а тогда, в силу аналитического продолжения, и для всех z из E.

(b) По заданному компактному множеству C внутри E найдем другой канонический эллипс E', такой, что C лежит внутри E', а E' внутри E. Тогда для $z \in C$ по теореме Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{E'} \frac{f(z')}{z' - z}\, dz' = \sum_{l=1}^{\infty} P_l(z)\, a_l\,(2l + 1),$$

где

$$a_l = \frac{1}{2\pi i} \oint_{E'} f(z')\, Q_l(z')\, dz'$$

и мы воспользовались равномерной сходимостью, доказанной в (a). Поскольку $\{P_l(z)\}$ — ортогональный базис в $L^2(-1, 1)$, равенство (138) доказано.

(c) оставим читателю (задача 91). ∎

Определение. **Сферические функции Бесселя** $j_l(x)$, $x \in \mathbb{C}$, определяются равенством

$$j_l(x) = \frac{e^{-i\pi l/2}}{2} \int\limits_{-1}^{1} P_l(y)\, e^{ixy} dy.$$

Теорема XI.64. (a) $j_l(x)$ вещественны при вещественных x и $j_l(-x) = (-1)^l j_l(x)$.

(b) Каждая функция $j_l(x)$ есть конечная линейная комбинация членов вида $x^{-m}\cos x$ и $x^{-m}\sin x$ с $m \leqslant l+1$.

(c) $j_l(x)$ — целая функция от x, причем $j_l(x) = O(x^l)$ при $x \to 0$.

(d) (Уравнение Бесселя.)

$$-\frac{d^2}{dx^2}[xj_l(x)] + \frac{l(l+1)}{x^2}[xj_l(x)] = [xj_l(x)].$$

(e) $[xj_l(x) - \sin(x - {}^1/_2\pi l)] = O(x^{-1})$ при $x \to \infty$.

(f) Если $\mathbf{e}$ — единичный вектор $\langle 0, 0, 1\rangle$ и $\mathbf{r}\cdot\mathbf{e} = r\cos\theta$, то

$$e^{ik\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} e^{i\pi l/2}(2l+1)\, j_l(kr)\, P_l(\cos\theta),$$

где ряд сходится равномерно, когда k и $\mathbf{r}$ пробегают компактные множества в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно.

Доказательство. (a) $\overline{j_l(x)} = {}^1/_2 e^{i\pi l} e^{-i\pi l/2} \int\limits_{-1}^{1} P_l(y)\, e^{-ixy} dy$. Заменяя y на $-y$ и применяя равенство $P_l(-y)\, e^{i\pi l} = P_l(y)$, заключаем, что j_l вещественна. Поскольку P_l вещественно, то

$$j_l(-x)\, e^{+i\pi l/2} = \overline{j_l(x)\, e^{i\pi l/2}} = j_l(x)\, e^{-i\pi l/2},$$

или $j_l(-x) = (-1)^l j_l(x)$.

(b) Применяя равенство $y^n e^{ixy} = (i^{-1}d/dx)^n e^{ixy}$, видим, что

$$j_l(x) = e^{-i\pi l/2} P_l\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\left[\frac{\sin x}{x}\right].$$

По индукции можно доказать, что $(d/dx)^m x^{-1}\sin x$ — конечная линейная комбинация членов вида $x^{-k}\sin x$ и $x^{-k}\cos x$, причем $k \leqslant m+1$, так что (b) доказано.

(c) j_l есть фурье-сбраз обобщенной функции с компактным носителем, а потому целая функция x. Более того, величина

$$\left.\frac{d^k j_l}{dx^k}\right|_{x=0} = \frac{1}{2} e^{-i\pi l/2} i^k \int\limits_{-1}^{1} y^k P_l(y)\, dy$$

равна нулю при $k < l$, в силу соотношений ортогональности для полиномов Лежандра. Итак, $j_l(x) = O(x^l)$ при $x \to 0$.

(d) Пусть χ — характеристическая функция интервала (—1, 1), и пусть F — обобщенная функция χP_l. Тогда

$$\frac{dF}{dy}=\chi\frac{dP_l}{dy}+P_l(1)\,\delta(y-1)-P_l(-1)\,\delta(y+1),$$

так что $(1-y^2)\dfrac{dF}{dy}=\chi(1-y^2)\dfrac{dP_l}{dy}$, а потому

$$\frac{d}{dy}(1-y^2)\frac{dF}{dy}=\chi\frac{a}{dy}(1-y^2)\frac{dP_l}{dy}=-l(l+1)F$$

в силу части (d) теоремы XI.62. Выполняя преобразование Фурье, получаем

$$x\left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)xj_l(x)=l(l+1)\,j_l(x),$$

что дает уравнение Бесселя.

(e) Поскольку $e^{ixy}=(ix)^{-1}(d/dy)\,e^{ixy}$, то интегрирование по частям приводит к равенству

$$j_l(x)=\frac{e^{-i\pi l/2}}{2}\frac{1}{ix}\left[e^{ix}P_l(1)-e^{-ix}P_l(-1)\right]-$$
$$-\frac{e^{-i\pi l/2}}{2ix}\int_{-1}^{1}e^{ixy}\frac{d}{dy}P_l(y)\,dy.$$

Повторное интегрирование по частям показывает, что второй член имеет на бесконечности порядок $O(x^{-2})$. А первый член можно, в силу равенств $P_l(1)=1$, $P_l(-1)=(-1)^l$, переписать в виде $x^{-1}\sin(x-{}^1/_2\pi l)$.

(f) При фиксированных k и r функция

$$f(r,\ k,\ \eta)=e^{ikr\eta}$$

есть целая функция η, имеющая равномерные оценки, когда k, r и η пробегают компактные подмножества в $\mathbb{R}$ (соответственно в $\mathbb{C}$). Следовательно, ряд Лежандра

$$f(r,\ k,\ \eta)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,a_l(k,\ r)\,P_l(\eta)$$

сходится на таких компактных множествах равномерно. Поскольку

$$a_l(k,\ r)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}P_l(\eta)\,f(r,\ k,\ \eta)\,d\eta,$$

то $a_l(r)=e^{i\pi l/2}\,j_l(kr)$ по определению $j_l(x)$. ∎