Дополнение 2 к § XI.8. Решения Йоста для осцилляторных потенциалов

В этом и следующем дополнениях мы рассмотрим некоторые классы потенциалов с сильными осцилляциями на бесконечности. В какой-то мере эти примеры — математические курьезы, однако по некоторым причинам они представляют теоретический интерес Во-первых, эти примеры поясняют модификации волновых операторов, которые будут рассмотрены в § 9, а во-вторых, они связаны с проблемой существования положительных собственных значений (см. § XIII.13).

Общая цель этих двух дополнений — показать, что, коль скоро среднее потенциала убывает, совершенно не важно, что не убывает сам потенциал. Интуитивно это можно понять как расплывание гладких свободных волновых пакетов. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть

$$V(r)=(1+r^2)^{-1}e^r\sin(e^r). \tag{139}$$

Очевидно, что этот потенциал сильно сингулярен на бесконечности. Однако его среднее не сингулярно: интегрирование по частям показывает, что

$$\int_r^R V(x)\,dx=$$

$$=(1+r^2)^{-1}\cos(e^r)-(1+R^2)^{-1}\cos(e^R)+2\int_r^R x(1+x^2)^{-2}\cos(e^x)\,dx,$$

поэтому предел среднего

$$W(r)=-\lim_{R\to\infty}\int_r^R V(x)\,dx \tag{140}$$

существует и является «короткодействующей» в том смысле, что $|W(r)|\leqslant C(1+r^2)^{-1}$. В силу такого убывания среднего V, оказывается, что $-\Delta+V$ можно определить как сумму форм и эта форма ограничена снизу, несмотря на неограниченность V. Действительно, $V(r)=\partial W/\partial r$, а потому на $\mathbb{R}^n$

$$V(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}G_i(x)+K(x),$$

где $G_i(x)=x^{-1}x_iW(x)$ и $K(x)=-(n-1)x^{-1}W(x)$. На основе этого мы утверждаем, что для любого ε существует константа C_ε, удовлетворяющая условию

$$(\varphi,V\varphi)\leqslant\varepsilon(\varphi,(-\Delta)\varphi)+C_\varepsilon(\varphi,\varphi) \tag{141}$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Оператор умножения на K является $-\Delta$-ограниченным в смысле форм с нулевой относительной гранью. Более того, интегрирование по частям с последующим применением неравенства Шварца дает

$$|(\varphi, (\partial G_l/\partial x_l)\varphi)| = \left|\int \frac{\partial G_l}{\partial x_l}|\varphi|^2 dx\right| = 2|\operatorname{Re}(\varphi, G_l \partial\varphi/\partial x_l)| \leqslant$$
$$\leqslant (\varphi, G_l^2\varphi)^{1/2}(\partial\varphi/\partial x_l, \partial\varphi/x_l)^{1/2},$$

откуда следует (141), поскольку оператор G_l^2 $-\Delta$-ограничен в смысле форм с нулевой относительной гранью. Согласно (141), $(\varphi, V\varphi)$ можно продолжить на $Q(-\Delta)$, и $-\Delta+V$ — полуограниченная замкнутая квадратичная форма на $Q(-\Delta)$. Предостережем читателя, что для произвольного $\varphi \in Q(-\Delta)$ неравенство $\int |V(x)||\varphi(x)|^2 dx < \infty$ *не обязательно* выполняется, а величина $(\varphi, V\varphi)$ определяется лишь с помощью предельной процедуры. Теперь уже можно развить теорию рассеяния для $-\Delta+V$, следуя основным идеям теоремы XI.31 (см. задачу 92) или методами § XIII.8 (см. ссылки в Замечаниях). Здесь мы хотим рассмотреть функции Йоста для таких потенциалов.

Пример 2. Пусть

$$V(r) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j r^{-1}\sin(\alpha_j r) + Q(r), \tag{142a}$$

причем для некоторых $\varepsilon > 0$ и C

$$|Q(r)| \leqslant C(1+r^2)^{-1/2-\varepsilon}. \tag{142b}$$

В этом случае V ограничен, так что нетрудно определить сумму $-\Delta+V$. С ней связаны два опасных момента. Во-первых, существует потенциал вида (142), при котором уравнение $(-\Delta+V)\varphi=\varphi$ обладает квадратично интегрируемым решением даже при том, что $V \to 0$ на бесконечности (см. пример 1 из § XIII.13 и его обсуждение там). Во-вторых, $V(r)$ не входит в число потенциалов, для которых мы развили теорию рассеяния, поскольку $\int_1^\infty |V(r)|\,dr = \infty$. В § 9 мы построим модифицированную теорию рассеяния для потенциалов типа кулонова. К сожалению, необходимые в этом случае оценки неприменимы к потенциалам вида (142). Однако рассеяние в кулоновом случае как раз такого типа, которого естественно ожидать и для потенциалов данного вида. В § 9 при определении волновых операторов мы рассмотрим модификацию свободной динамики. В кулоновом случае соответствующий оператор свободной эволюции при $t \to \infty$ расходится, в силу чего волновые операторы и существуют. В случае когда

V удовлетворяет (142) и предел в (140) существует, модифицированный оператор свободной эволюции такого типа, как в § 9, конечен, поэтому в этом случае модифицированные волновые операторы существуют наряду с исходными. Исследуя решения Йоста для этих потенциалов, мы найдем условия, при которых существуют положительные собственные значения, а также построим теорию рассеяния. Эта теория будет изложена в следующем дополнении.

Поскольку здесь мы интересуемся проблемами, связанными с осцилляциями на бесконечности, мы на протяжении этого дополнения будем предполагать, что функция $V(r)$ непрерывна и локально ограничена. Наши методы легко обобщить, так чтобы допускались локальные особенности V. Для понимания примеров 1 и 2 необходим следующий результат; он сам и его следствия легко обобщаются на случай, когда X — банахово пространство. В наших приложениях $\dim X = 2$.

Предложение. Пусть X — конечномерное нормированное векторное пространство. Пусть $C(x)$ — непрерывная функция на $[R_0, \infty)$ со значениями в $\mathscr{L}(X)$. Пусть $D(x, y)$ — измеримая функция на $Q \equiv \{\langle x, y\rangle \mid R_0 \leqslant x \leqslant y < \infty\}$ со значениями в $\mathscr{L}(X)$.

(a) Предположим, что

$$\gamma \equiv \sup_{x \geqslant R_0} \|C(x)\| + \sup_{x \geqslant R_0} \int_x^\infty \|D(x, y)\| dy < 1.$$

Тогда для любого $u_0 \in X$ уравнение

$$u(x) = u_0 + C(x) u(x) + \int_x^\infty D(x, y) u(y) dy \tag{143}$$

имеет единственное решение в $L^\infty(R_0, \infty)$. Более того, это решение непрерывно.

(b) Далее, если

$$\gamma(r) \equiv \sup_{x \geqslant r} \|C(x)\| + \sup_{x \geqslant r} \int_x^\infty \|D(x, y)\| dy$$

стремится к нулю при $r \to \infty$, то $\lim_{x \to \infty} u(x) = u_0$ и для $x > R_0$ справедливо неравенство

$$\|u(x) - u_0\| \leqslant \gamma(x) [1 - \gamma(x)]^{-1} \|u_0\|.$$

(c) Предположим, что функция C непрерывно дифференцируема, функция D непрерывна на Q и что для каждого фиксированного x величина

$$f_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-1} [D(x + \varepsilon, y) - D(x, y)]$$

сходится в $L^1(\mathbb{R}, \infty)$ к функции, обозначаемой $\partial D/\partial x$, которая непрерывна по x в смысле L^1. Тогда решение u уравнения (143) непрерывно дифференцируемо и

$$u'(x) = C'(x)\,u(x) + C(x)\,u'(x) - D(x,x)\,u(x) + \int_x^\infty \frac{\partial D}{\partial x}(x,y)\,u(y)\,dy. \tag{144}$$

(a) и (b) остаются справедливыми, если постоянный вектор u_0 заменить непрерывной векторнозначной функцией $u_0(x)$, такой, что $\sup\limits_{x \geqslant R_0} \|u_0(x)\| = Q_0 < \infty$, коль скоро во всех оценках норма $\|u_0\|$ заменена на Q_0. (c) продолжает выполняться в этом случае, коль скоро $u_0(x)$ из C^1, а в правую часть равенства (144) добавлено слагаемое $u_0'(x)$.

Доказательство. (a) Определим $u_n(x)$ индуктивно, полагая $u_0(x) = u_0$ и

$$u_n(x) = C(x)\,u_{n-1}(x) + \int_x^\infty D(x,\ y)\,u_{n-1}(y)\,dy.$$

По индукции легко доказать, что функция $u_n(x)$ непрерывна и

$$\sup_{|x| \geqslant r} \|u_n(x)\| \leqslant \gamma(r)^n \|u_0\|. \tag{145}$$

Поскольку $\gamma(R_0) = \gamma < 1$, ряд $\sum\limits_{n=0}^\infty u_n(x)$ сходится равномерно к непрерывной функции $u(x)$, удовлетворяющей уравнению (143). Если v — произвольное решение (143) в $L^\infty(R_0, \infty)$ то, итерируя это равенство, находим, что

$$\left\| v - \sum_{n=0}^N u_n(x) \right\| \leqslant \gamma^{N+1} \|v\|_\infty,$$

откуда, переходя к $N \to \infty$, получаем $v = u$.

(b) В силу оценки (145),

$$\|u - u_0\| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \gamma(r)^n \|u_0\| = \gamma(r)(1 - \gamma(r))^{-1} \|u_0\|.$$

(c) В сделанных предположениях функции u_n, как можно доказать по индукции, непрерывно дифференцируемы, причем

$$u_n'(x) = C'(x)\,u_{n-1}(x) + C(x)\,u_{n-1}'(x) - D(x,\ x)\,u_{n-1}(x) + \int_x^\infty \frac{\partial D}{\partial x}(x,\ y)\,u_{n-1}(y)\,dy.$$

Применяя (145), можно доказать по индукции (задача 93) следующие оценки:

$$|u_n'(x)| \leqslant n\gamma^n \|u_0\| A(x), \qquad x \geqslant R_0,$$

где

$$A(x) = \gamma^{-1}\left(\|C'(x)\| + \|D(x, x)\| + \int_x^\infty \left\|\frac{\partial D}{\partial x}(x, y)\right\| dy\right).$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на каждом компактном подмножестве в $[R_0, \infty)$, так что функция $u(x)$ дифференцируема и ее производная равна $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$. Итак, (144) выполняется. Случай, когда u_0 зависит от x, оставим читателю (задача 93). ∎

Теорема XI.65. Пусть $A(x)$ — непрерывная функция из $[R_0, \infty)$ в $\mathscr{L}(X)$ — множество ограниченных операторов в конечномерном линейном пространстве. Допустим, что $\|A(x)\| \in L^1(R, \infty)$. Предположим, что $u_0 \in X$. Тогда существует единственная непрерывно дифференцируемая функция $u(x, u_0)$, такая, что

$$\frac{du}{dx} = A(x)\, u(x)$$

и $\lim\limits_{x \to \infty} u(x) = u_0$. Каждое ненулевое решение имеет ненулевой предел при $x \to \infty$. Более того, $\|u(x) - u_0\| \leqslant 2\|u_0\| \int_x^\infty \|A(y)\|\, dy$ для всех x, таких, что $\int_x^\infty \|A(y)\|\, dy < 1/2$.

Доказательство. Выберем R_1 так, чтобы выполнялось неравенство $\int_{R_1}^\infty \|A(x)\|\, dx < 1$. Тогда, по предложению, уравнение

$$u(x) = u_0 - \int_x^\infty A(y)\, u(y)\, dy$$

имеет единственное решение на $[R_1, \infty)$, которое непрерывно дифференцируемо, причем $u'(x) = A(x)\, u(x)$ Используя локальное существование и единственность, его можно продолжить на $[R, \infty)$. Выбирая базис в X, можно найти n линейно независимых решений с различными линейно независимыми пределами на бесконечности. В силу локальной единственности, они порождают множество всех решений, откуда следует единственность и факт существования предела для каждого решения. Последняя оценка следует из части (b) предложения. ∎

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$-\varphi''(x)+V(x)\varphi(x)=k^2\varphi(x)$$

на $[1, \infty)$, где $\int_1^\infty |V(x)|\,dx<\infty$. Пусть $\Psi(x)=\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \varphi'(x)\end{pmatrix}$. Тогда $\Psi'(x)=C(x)\Psi(x)$, где

$$C(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ V(x)-k^2 & 0\end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi_\pm$ — векторнозначные функции

$$\varphi_\pm(x)=\begin{pmatrix}e^{\pm ikx}\\ \pm ike^{\pm ikx}\end{pmatrix}.$$

Напишем $\Psi(x)=\alpha(x)\varphi_+(x)+\beta(x)\varphi_-(x)$, где α и β — комплекснозначные функции. Тогда $q=\binom{\alpha}{\beta}$ удовлетворяет условию $q(x)=M(x)\Psi(x)$, причем

$$M(x)=(2ik)^{-1}\begin{pmatrix}ike^{-ikx} & e^{-ikx}\\ ike^{ikx} & -e^{ikx}\end{pmatrix}.$$

Значит,

$$q'(x)=D(x)\,q(x), \tag{146a}$$

где $D(x)=M'(x)M(x)^{-1}+M(x)C(x)M(x)^{-1}$, так что

$$D(x)=(2ik)^{-1}V(x)\begin{pmatrix}1 & e^{-2ikx}\\ -e^{2ikx} & -1\end{pmatrix}. \tag{146b}$$

Применяя теорему XI.65 к уравнению (146), видим, что если $\int_1^\infty |V(x)|\,dx<\infty$, то оно имеет решения, асимптотически сходящиеся к любому q_0 при $x\to\infty$. Выбирая $q=\binom{1}{0}$, находим решение φ уравнения Шредингера, удовлетворяющее условию $|\varphi(x)-e^{ikx}|+|\varphi'(x)-ike^{ikx}|\to 0$ при $x\to\infty$. Итак, мы получили доказательство существования решений Йоста, отчасти независимое от доказательства, данного в основном тексте этого раздела.

Пример 4. Рассмотрим решения уравнения $-f''(r)+l(l+1)\times r^{-2}f(r)=k^2f(r)$. Действуя, как в предыдущем примере, можно показать, что любое вещественнозначное решение удовлетворяет условию $|f(r)-C\sin(kr+D)|=O(r^{-1})$ и, в частности,

$$|krj_l(kr)-\sin(kr-{}^1/_2\pi l)|=O(r^{-1}).$$

Чтобы продолжить рассмотрение примера 2, нам потребуется следующее интересное обобщение теоремы XI.65.

Теорема XI.66 (теорема Долларда—Фридмана). Пусть $A(x)$ — непрерывная функция из $[R, \infty)$ в $\mathscr{L}(X)$ — множество ограниченных операторов на конечномерном нормированном линейном пространстве. Предположим, что $A = A_1 + A_2$, где

(i) $\| A_1(\cdot) \| \in L^1(R, \infty)$;

(ii) существует $B(x) = -\lim\limits_{r \to \infty} \int\limits_x^r A_2(y)\,dy$;

(iii) $\| B(\cdot) A(\cdot) \| \in L^1(R, \infty)$.

Тогда существует единственная непрерывно дифференцируемая X-значная функция $u(x; u_0)$, такая, что

$$du/dx = A(x)\,u(x)$$

и $\lim\limits_{x \to \infty} u(x; u_0) = u_0$. Каждое ненулевое решение этого дифференциального уравнения имеет ненулевой предел при $x \to \infty$ и

$$|u(x; u_0) - u_0| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\sup_{y \geqslant x} \| B(y) \| + \int\limits_x^\infty \| A_1(y) \|\,dy + \int\limits_x^\infty \| B(y)\,A(y) \|\,dy\right) \| u_0 \| \quad (147)$$

для всех x, при которых выражение в скобках меньше $1/2$.

Доказательство. Начнем с некоторых преобразований формального уравнения

$$u(x) = u_0 - \int\limits_x^\infty A(y)\,u(y)\,dy.$$

Запишем $A_2(y)$ в виде $dB(y)/dy$ и проинтегрируем по частям. Граничный член на бесконечности должен исчезать, поскольку

$$\lim_{y \to \infty} \| B(y) \| = 0 \quad (148)$$

вследствие сходимости интеграла, определяющего $B(y)$. Пользуясь равенством $u'(y) = A(y)\,u(y)$, находим, что

$$u(x) = u_0 + B(x)\,u(x) - \int\limits_x^\infty [A_1(y) - B(y)\,A(y)]\,u(y)\,dy. \quad (149)$$

Мы пришли к (149) формально. Теперь решим это уравнение, а потом покажем, что решение обладает требуемыми свойствами. Пусть

$$\gamma(x) = \sup_{y \geqslant x} \| B(y) \| + \int\limits_x^\infty (\| A_1(y) \| + \| B(y)\,A(y) \|)\,dy.$$

Согласно (148) и по условиям теоремы, $\gamma(x) \to 0$ при $x \to \infty$; значит, по предложению, уравнение (149) имеет решения в $[R_1, \infty)$ для достаточно большого R_1, и эти решения удовлетворяют неравенству (147). В силу части (c) предложения, решение принадлежит C^1 и

$$u'(x) = B(x)u'(x) + A_2(x)u(x) + [A_1(x) - B(x)A(x)]u(x),$$

так что

$$(1 - B(x))u'(x) = (1 - B(x))A(x)u(x).$$

В силу (148), матрица $1 - B(x)$ обратима при больших x; итак, мы получили искомое решение дифференциального уравнения при больших x. Остальная часть доказательства следует из локальной разрешимости, как в теореме XI.65. ∎

Пример 2 (заново). Мы ищем решения уравнения $-\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = k^2\varphi(x)$, где $V(x)$ имеет вид (142). Как в примере 3, сначала перепишем уравнение в виде (146). Пусть $D = D_1 + D_2$, где D_1 происходит из члена $Q(x)$, а D_2 — из членов $r^{-1}\sin(\alpha_j r)$. Очевидно, что D_1 лежит в L^1. Более того, поскольку

$$\int_r^x y^{-1}e^{i\beta y}\,dy = (i\beta y)^{-1}e^{i\beta y}\Big|_r^x + \frac{1}{i\beta}\int_r^x y^{-2}e^{i\beta y}\,dy,$$

мы видим, что для $\beta \neq 0$ существует $\lim\limits_{x\to\infty}\int_r^x y^{-1}e^{i\beta y}\,dy$ и предельная функция ограничена функцией r^{-1}. Отсюда следует, что, коль скоро $\alpha_j \neq \pm 2k$ для всех j, интеграл $B(r) = \int_r^\infty D_2(x)\,dx$ существует как несобственный и $BD \in L^1$, причем $\int_r^\infty \|B(y)D(y)\|\,dy = O(r^{-1})$. В результате можно применить теорему XI.66 и немедленно получить доказательства частей (a) и (b) следующей теоремы.

Теорема XI.67. Пусть V имеет вид (142).

(a) Пусть k — вещественное число, причем $k \neq 0, \pm\alpha_1/2, \ldots, \pm\alpha_m/2$. Тогда любое ненулевое решение уравнения $-\varphi'' + V\varphi = k^2\varphi$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to\infty}[\varphi(x) - ae^{ikx} - be^{-ikx}] = 0$$

для подходящих a и b. В частности, это уравнение не имеет ненулевых квадратично интегрируемых решений.

(b) В предположениях части (a) существует единственное решение $\varphi(x;\ k)$ на $[1, \infty)$, удовлетворяющее неравенству

$$|\varphi(x;\ k)-e^{-ikx}|\leqslant c_k|x|^{-\alpha}, \qquad x\geqslant 1,$$

причем $\alpha=\min\{1,\ 2\varepsilon\}$, где ε определено в (142b). Более того, коэффициенты c_k могут быть выбраны независимо от k, когда k пробегает компактное подмножество в $\{k\in\mathbb{R}\,|\,k\neq 0,\ \pm\alpha_1/2,\ \ldots,\ \pm\alpha_m/2\}$.

(c) Предположим, что $k=\alpha_j/2$ для некоторого j. Тогда существует решение u уравнения $-\varphi''+V\varphi=k^2\varphi$, которое удовлетворяет условиям

$$u=\begin{cases} r^{-\gamma_j/2\alpha_j}(\cos(\alpha_j r/2)+o(1)), & \gamma_j/\alpha_j>0,\\ r^{+\gamma_j/2\alpha_j}(\sin(\alpha_j r/2)+o(1)), & \gamma_j/\alpha_j<0.\end{cases}$$

По поводу доказательства части (c) см. ссылки в Замечаниях и задачи 97, 98. Суть части (c) состоит в том, что, когда γ_j больше α_j, существует решение уравнения Шредингера, квадратично интегрируемое на бесконечности. В общем случае если имеется однопараметрическое семейство таких потенциалов, то одно из этих решений будет удовлетворять требуемому условию в начале координат. Поэтому существуют операторы Шредингера с положительными собственными значениями, погруженными в непрерывный спектр. Дальнейшее обсуждение см. в § XIII.13.

В следующем дополнении мы увидим, что, коль скоро $\varepsilon>1/4$, частью (b) этой теоремы можно воспользоваться для доказательства того, что волновые операторы $\Omega^{\pm}(-\Delta+V,\ -\Delta)$ существуют и имеют одинаковые области значений.

Доказательство теоремы Долларда—Фридмана и решение задачи, поставленной в примере 2, включали в себя интегрирование по частям в интегральном уравнении, имеющем очевидное происхождение. Тот же метод работает и в примере 1, однако «подходящее уравнение» задается не непосредственной формулой (146), а скорее интегральным уравнением Йоста (126). Отметим, что уравнение Йоста легко «вывести» из (146).

Пример 1 (заново). Начнем с уравнений Йоста и будем действовать формально в предположении, что $V(r)=\partial W/\partial r$, причем $\int_x^{\infty}|W(r)|\,dr<\infty$. Интегрируя по частям в уравнении

$$\varphi(x)=e^{-ikx}-\int_x^{\infty}\frac{\sin k(x-y)}{k}V(y)\,\varphi(y)\,dy$$

и опуская граничный член на бесконечности, получаем

$$\varphi(x)=e^{-ikx}-\int_x^\infty W(y)\left[\cos(kx-ky)\varphi(y)-k^{-1}\sin(kx-ky)\varphi'(y)\right]dy, \tag{150a}$$

и аналогично, интегрируя по частям в уравнении

$$\varphi'(x)=-ike^{-ikx}-\int_x^\infty \cos(kx-ky)V(y)\varphi(y)\,dy,$$

получаем

$$\varphi'(x)=-ike^{-ikx}+W(y)\varphi(y)+ \\ +\int_x^\infty W(y)\left[k\sin(kx-ky)\varphi(y)+\cos(kx-ky)\varphi'(y)\right]dy. \tag{150b}$$

Переписывая (150) как систему уравнений для $\langle\varphi, \varphi'\rangle$, видим, что вследствие предложения она имеет C^1-решение. Применяя часть (с) предложения, легко найти, что полученное в результате решение удовлетворяет уравнению $\varphi''(x)=V(x)\varphi(x)-k^2\varphi(x)$. Наши результаты суммирует

Теорема XI.68. Пусть $V(r)$ — непрерывная функция, причем $V(r)=\partial W/\partial r$, где $W\in L^1[1, \infty)$. Тогда:

(a) уравнение $-\varphi''+V\varphi=k^2\varphi$ не имеет ненулевых квадратично интегрируемых решений при $k\neq 0$;

(b) предположим, что $|W(x)|\leqslant C|x|^{-1-\varepsilon}$. Тогда для любого $k\neq 0$ существует решение $\varphi(x;k)$ того же уравнения на $[1, \infty)$, причем

$$|\varphi(x;k)-e^{-ikx}|\leqslant c(k)|x|^{-\varepsilon}, \quad x\geqslant 1,$$

и $c(k)$ могут быть выбраны независимо от k для $|k|\geqslant k_0>0$.

Дополнение 3 к § XI.8. Решения Йоста и основные задачи теории рассеяния

В этом дополнении мы рассмотрим те случаи, когда имеются регулярные решения $u_l(x;k)$ уравнения Шредингера и надежный контроль за скоростью стремления к нулю величины $|u_l(x;k)-\sin(kx-{}^1/_2 l\pi+\delta_l)|$, когда $|x|\to\infty$. На основе этой информации мы докажем, что существуют волновые операторы $\Omega^\pm$, что $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$ и что S-оператор есть умножение на $e^{2i\delta_l(k)}$ в представлении, где диагональны энергия и угловой момент. Это позволит нам раскрыть некоторые результаты § 8 и, что более