и опуская граничный член на бесконечности, получаем

$$\varphi(x) = e^{-ikx} - \int_x^\infty W(y)\,[\cos(kx-ky)\,\varphi(y) - k^{-1}\sin(kx-ky)\,\varphi'(y)]\,dy, \tag{150a}$$

и аналогично, интегрируя по частям в уравнении

$$\varphi'(x) = -ike^{-ikx} - \int_x^\infty \cos(kx-ky)\,V(y)\,\varphi(y)\,dy,$$

получаем

$$\varphi'(x) = -ike^{-ikx} + W(y)\,\varphi(y) + \\ + \int_x^\infty W(y)\,[k\sin(kx-ky)\,\varphi(y) + \cos(kx-ky)\,\varphi'(y)]\,dy. \tag{150b}$$

Переписывая (150) как систему уравнений для $\langle\varphi, \varphi'\rangle$, видим, что вследствие предложения она имеет C^1-решение. Применяя часть (с) предложения, легко найти, что полученное в результате решение удовлетворяет уравнению $\varphi''(x) = V(x)\,\varphi(x) - k^2\varphi(x)$. Наши результаты суммирует

Теорема XI.68. Пусть $V(r)$ — непрерывная функция, причем $V(r) = \partial W/\partial r$, где $W \in L^1[1, \infty)$. Тогда:

(a) уравнение $-\varphi'' + V\varphi = k^2\varphi$ не имеет ненулевых квадратично интегрируемых решений при $k \neq 0$;

(b) предположим, что $|W(x)| \leqslant C|x|^{-1-\varepsilon}$. Тогда для любого $k \neq 0$ существует решение $\varphi(x; k)$ того же уравнения на $[1, \infty)$, причем

$$|\varphi(x; k) - e^{-ikx}| \leqslant c(k)\,|x|^{-\varepsilon}, \quad x \geqslant 1,$$

и $c(k)$ могут быть выбраны независимо от k для $|k| \geqslant k_0 > 0$.

Дополнение 3 к § XI.8. Решения Йоста и основные задачи теории рассеяния

В этом дополнении мы рассмотрим те случаи, когда имеются регулярные решения $u_l(x; k)$ уравнения Шредингера и надежный контроль за скоростью стремления к нулю величины $|u_l(x; k) - \sin(kx - {}^1/_2 l\pi + \delta_l)|$, когда $|x| \to \infty$. На основе этой информации мы докажем, что существуют волновые операторы $\Omega^\pm$, что $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \operatorname{Ran}\Omega^-$ и что S-оператор есть умножение на $e^{2i\delta_l(k)}$ в представлении, где диагональны энергия и угловой момент. Это позволит нам раскрыть некоторые результаты § 8 и, что более важно, построить теорию рассеяния для некоторых потенциалов из дополнения 2. Более того, это прольет свет на принцип инвариантности волновых операторов. Здесь мы все время будем пользоваться символом $\hat{x}$ для обозначения $x/|x|$. Основной результат составляет следующая

Теорема XI.69. Пусть $V(\mathbf{x})$ — центральный потенциал на $\mathbb{R}^3$, такой, что оператор $-\Delta+V$ в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Предположим, что для каждого $l=0, 1, \ldots$ существует замкнутое множество $\mathscr{E}_l$ нулевой меры в $(0, \infty)$, такое, что для каждого $k\in(0, \infty)\diagdown\mathscr{E}_l$ существует вещественнозначное решение в смысле обобщенных функций

$$\varphi_l(\mathbf{x};\ k)=(k|\mathbf{x}|)^{-1}u_l(|\mathbf{x}|;\ k)Y_{lm}(\hat{x})$$

уравнения $(-\Delta+V)\varphi_l=k^2\varphi_l$, удовлетворяющее оценке

$$|u_l(k,\ r)-\sin(kr-{}^1/_2l\pi+\delta_l(k))|\leqslant c_l(k)(1+|r|)^{-1/2-\gamma} \quad (151)$$

для фиксированного $\gamma>0$. Предположим, что функции $\varphi_l(\mathbf{x};\ \cdot)$ и $\delta_l(\cdot)$ измеримы и $\sup\limits_{k\in K}c_l(k)<\infty$ для любого компактного подмножества $K\subset(0,\ \infty)\diagdown\mathscr{E}_l$. Тогда волновые операторы $\Omega^\pm(-\Delta+V,\ -\Delta)$ существуют, $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$ и $S=(\Omega^-)^*\Omega^+$ задается посредством

$$S\left[\sum_{l,\ m}Y_{lm}(\hat{x})\int_0^\infty j_l(k|x|)f_{lm}(k)\,dk\right]=$$

$$=\sum_{l,\ m}Y_{lm}(\hat{x})\int_0^\infty j_l(k|x|)\,e^{2i\delta_l(k)}f_{lm}(k)\,dk. \quad (152)$$

Доказательство. Фиксируем l, m и $f\in C_0^\infty((0,\ \infty)\diagdown\mathscr{E}_l)$. Положим

$$\psi(\mathbf{x})=Y_{lm}(\hat{x})\int_0^\infty(kx)^{-1}u_l(x;\ k)f(k)\,dk,$$

$$\psi_\pm^{(0)}(\mathbf{x})=Y_{lm}(\hat{x})\int_0^\infty j_l(kx)\,e^{\mp i\delta_l(k)}f(k)\,dk.$$

Применяя (151) и то, что $f\in C_0^\infty$, легко видеть, что ψ и $\psi_\pm^{(0)}$ лежат в $L^2(\mathbb{R}^3)$ (задача 94). Покажем, что

$$\lim_{t\to\mp\infty}\|e^{-itH}\psi-e^{-itH_0}\psi_\pm^{(0)}\|=0. \quad (153)$$

Если равенство (153) доказано, мы заключаем, что $\Omega^\pm$ существуют на плотном множестве, и получаем для них явные формулы, которые устанавливают, что $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$ и выполняется равенство (152). Пусть C — оператор комплексного сопряжения. Тогда $e^{-itH_0}C = Ce^{itH_0}$ и $e^{-itH}C = Ce^{itH}$, так что (153) нужно доказать лишь для случая $t \to -\infty$.

Поскольку оператор $-\Delta + V = H$ удовлетворяет уравнению $H\varphi_l(\cdot;\ k) = k^2\varphi_l(\cdot;\ k)$ в смысле обобщенных функций, мы видим, что для $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$(H\eta,\ \psi) = (\eta,\ \bar{\psi}),$$

где $\bar{\psi}$ задается формулой для ψ в которой $f(k)$ заменено на $k^2 f(k)$. Поскольку H в существенном самосопряжен на C_0^∞, то $\psi \in D(\bar{H})$ и $\bar{H}\psi = \bar{\psi}$. Повторяя эту процедуру и пользуясь тем, что $f \in C_0^\infty$, получаем

$$\psi(\mathbf{x},\ t) \equiv (e^{-itH}\psi)(\mathbf{x}) = Y_{lm}(\hat{x}) \int_0^\infty (kx)^{-1} u_l(x;\ k) e^{-itk^2} f(k)\, dk.$$

Аналогично,

$$\psi_+^{(0)}(\mathbf{x},\ t) \equiv (e^{-itH_0}\psi)(\mathbf{x}) = Y_{lm}(\hat{x}) \int_0^\infty j_l(kx) e^{-itk^2} e^{-i\delta_l(k)} f(k)\, dk.$$

Теперь *определим* функцию $\eta(\mathbf{x},\ t)$ равенством

$$\eta(\mathbf{x},\ t) = Y_{lm}(\hat{x}) \int_0^\infty (kx)^{-1} \sin(kx - {}^1/_2 l\pi + \delta_l(k))\, e^{-itk^2} f(k)\, dk.$$

Тогда

$$\alpha_t(\mathbf{x}) \equiv |\psi(\mathbf{x},t) - \eta(\mathbf{x},t)| = |Y_{lm}(\hat{x})| \left| \int_0^\infty (kx)^{-1} q(x,k)\, e^{-itk^2} f(k)\, dk \right|,$$

где $q(x,\ k) = u(x;\ k) - \sin(kx - {}^1/_2 l\pi + \delta_l(k))$. Далее, в силу (151), для каждого фиксированного x функция $(kx)^{-1} q(x,\ k) f(k)$ от k лежит в $L^1(0,\ \infty)$, так что $\alpha_t(x) \to 0$ при $t \to \pm\infty$ по лемме Римана — Лебега. Более того, в силу (151),

$$|\alpha_t(\mathbf{x})| \leqslant C |Y_{lm}(\hat{x})|\, x^{-1}(1+x)^{-1/2-\gamma}$$

для всех t. Значит, по теореме о мажорированной сходимости, $\int |\alpha_t(x)|^2 d^3x \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Это сводит доказательство (153) к демонстрации того, что

$$\int |\psi_+^{(0)}(x,\ t) - \eta(x,\ t)|^2 d^3x \to 0 \text{ при } t \to -\infty.$$

Положим

$$\zeta_\pm(\mathbf{x},\ t) = Y_{lm}(\hat{x}) \int (kx)^{-1} e^{\pm ikx} e^{\pm i\delta_l(k)} e^{\mp il\pi/2} e^{-ik^2t} f(k)\, dk.$$

По лемме 3 из § 3, $\lim\limits_{t\to-\infty}\int|\zeta_+(\mathrm{x},\,t)|^2\,d^3x=0$, так что

$$\lim_{t\to-\infty}\int|\eta(\mathrm{x},t)-{}^1/_2 i\zeta_-(\mathrm{x},t)|^2\,d^3x=0.$$

Та же последовательность построений приводит к равенству

$$\lim_{t\to-\infty}\int|\psi_+^{(0)}(\mathrm{x},\;t)-{}^1/_2 i\zeta_-(\mathrm{x},\;t)|^2\,d^3x=0,$$

если мы вместо (151) применим оценку $|krj_l(kr)-\sin(kr-{}^1/_2 l\pi)|\leqslant$ $\leqslant C(k)(1+|r|)^{-1}$. Мы заключаем, что (153) выполняется ∎

Выше φ было обобщенной собственной функцией с собственным значением $E(k)=k^2$. Явная функциональная зависимость $E(k)$ не играла никакой роли в доказательстве, которое проходит до тех пор, пока $E(k)$ строго монотонна. Это не только показывает, что в контексте предыдущей теоремы выполняется принцип инвариантности, но и делает прозрачной причину, по которой инвариантность вообще имеет место.

Следствие 1. Если $V(\mathrm{x})$ — центральный потенциал, удовлетворяющий оценке

$$|V(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-3/2-\varepsilon}$$

($\varepsilon>0$), то волновые операторы $\Omega^\pm(-\Delta+V,\;-\Delta)$ существуют, $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$, а S-оператор дается равенством (152).

Конечно, этот результат не нов для нас — в § 8 были получены более сильные результаты, — однако доказательство здесь совершенно прямое. Следующий результат основан на теореме XI.67.

Следствие 2. Пусть

$$V(x)=\sum_{j=1}^{m}\gamma_j r^{-1}\sin(\alpha_j r)+Q(r),$$

причем $|Q(r)|\leqslant C(1+r)^{-3/2-\varepsilon}$. Тогда существуют $\Omega^\pm(-\Delta+V,$ $-\Delta)$, $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$ и S-оператор задается равенством (152).

Слегка модифицируя построение, можно включить в эту схему сильно осциллирующие потенциалы теоремы XI.68 (задача 95). Более того, обращаясь к результатам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, можно доказать, что $\operatorname{Ran}\Omega^\pm=$ $=\operatorname{Ran}P_{\mathrm{ac}}(-\Delta+V)$ и что оператор $-\Delta+V$ не имеет сингулярного спектра в ситуациях, описанных в следствиях 1 и 2. Наконец, отметим вариант теоремы XI.69 для нецентральных потенциалов.

Теорема XI.70. Пусть $V(\mathbf{x})$ — измеримая функция на $\mathbb{R}^3$, такая, что оператор $-\Delta+V$ в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Предположим, что существует замкнутое множество $\mathscr{E}$ меры нуль в $\mathbb{R}^3$, такое, что для каждого $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{E}$ существует решение $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ в смысле обобщенных функций уравнения $(-\Delta+V)\varphi=k^2\varphi$, удовлетворяющее оценке

$$|\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})-e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}-\gamma(\mathbf{k}, \hat{x})x^{-1}e^{ikx}|\leqslant C(\mathbf{k})(1+x)^{-3/2-\varepsilon} \qquad (154)$$

для $|x|\geqslant 1$. Предположим, что φ и γ — измеримые функции, $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})=\varphi(\mathbf{x}, -\mathbf{k})$ и $\sup\limits_{\mathbf{k}\in K}|C(\mathbf{k})|<\infty$ для каждого компактного подмножества $K\subset\mathbb{R}^3\setminus(\mathscr{E}\cup\{0\})$. Тогда существуют волновые операторы $\Omega^\pm$, $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$ и оператор $S=(\Omega^-)^*\Omega^+$ задается равенством

$$(Sf)(x)=f(x)+\int\limits_{\omega\in S^2}\int\beta(k, \Omega)f(|\mathbf{k}|\omega)e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3k\,d\Omega(\omega),$$

где

$$\beta(k, \Omega)=i\pi^{-1}\gamma(k, \Omega).$$

Детали доказательства, которое очень похоже на доказательство теоремы XI.69, мы оставляем читателю (задача 96). Однако, поскольку это доказательство дает столь наглядную картину рассеяния, которая к тому же так похожа на приводимую в некоторых физических учебниках, мы коротко опишем некоторые промежуточные шаги. Пусть $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus(\mathscr{E}\cup\{0\}))$ и

$$\psi(\mathbf{x})=\int g(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})d^3k.$$

Тогда, как и в центральном случае,

$$(e^{-iHt}\psi)(\mathbf{x})=\int g(\mathbf{k})e^{-ik^2t}\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})d^3k.$$

В силу (154) и теоремы о мажорированной сходимости, $\|e^{-itH}\psi-\eta_t\|\to 0$ при $t\to\pm\infty$, где

$$\eta_t(\mathbf{x})=\int g(\mathbf{k})e^{-ik^2t}\left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}-\gamma(\mathbf{k}, \hat{x})x^{-1}e^{ikx}\right]d^3k.$$

Главное здесь в том, что при $t\to-\infty$ второй член стремится к нулю согласно обобщению леммы 3 из § 3, поэтому $\|e^{-itH}\psi-e^{-itH_0}[(2\pi)^{3/2}\hat{g}]\|\to 0$ при $t\to-\infty$. При $t\to+\infty$ дают вклад оба члена, и мы имеем как падающую волну, так и «рассеянную».

XI.9. Дальнодействующие потенциалы

И классическая, и квантовомеханическая теории рассеяния, которыми мы занимались до сих пор, основаны на оценках, доказательства которых не проходят для потенциалов, убывающих