Теорема XI.70. Пусть $V(\mathbf{x})$ — измеримая функция на $\mathbb{R}^3$, такая, что оператор $-\Delta+V$ в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Предположим, что существует замкнутое множество $\mathscr{E}$ меры нуль в $\mathbb{R}^3$, такое, что для каждого $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{E}$ существует решение $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ в смысле обобщенных функций уравнения $(-\Delta+V)\varphi=k^2\varphi$, удовлетворяющее оценке

$$|\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})-e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}-\gamma(\mathbf{k}, \hat{x})x^{-1}e^{ikx}|\leqslant C(\mathbf{k})(1+x)^{-3/2-\varepsilon} \tag{154}$$

для $|x|\geqslant 1$. Предположим, что φ и γ — измеримые функции, $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})=\varphi(\mathbf{x}, -\mathbf{k})$ и $\sup\limits_{\mathbf{k}\in K}|C(\mathbf{k})|<\infty$ для каждого компактного подмножества $K\subset\mathbb{R}^3\setminus(\mathscr{E}\cup\{0\})$. Тогда существуют волновые операторы $\Omega^\pm$, $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$ и оператор $S=(\Omega^-)^*\Omega^+$ задается равенством

$$(Sf)(x)=f(x)+\int\limits_{\omega\in S^2}\int\beta(k, \Omega)f(|\mathbf{k}|\omega)e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3k\,d\Omega(\omega),$$

где

$$\beta(k, \Omega)=i\pi^{-1}\gamma(k, \Omega).$$

Детали доказательства, которое очень похоже на доказательство теоремы XI.69, мы оставляем читателю (задача 96). Однако, поскольку это доказательство дает столь наглядную картину рассеяния, которая к тому же так похожа на приводимую в некоторых физических учебниках, мы коротко опишем некоторые промежуточные шаги. Пусть $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus(\mathscr{E}\cup\{0\}))$ и

$$\psi(\mathbf{x})=\int g(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})d^3k.$$

Тогда, как и в центральном случае,

$$(e^{-iHt}\psi)(\mathbf{x})=\int g(\mathbf{k})e^{-ik^2t}\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})d^3k.$$

В силу (154) и теоремы о мажорированной сходимости, $\|e^{-itH}\psi-\eta_t\|\to 0$ при $t\to\pm\infty$, где

$$\eta_t(\mathbf{x})=\int g(\mathbf{k})e^{-ik^2t}\left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}-\gamma(\mathbf{k}, \hat{x})x^{-1}e^{ikx}\right]d^3k.$$

Главное здесь в том, что при $t\to-\infty$ второй член стремится к нулю согласно обобщению леммы 3 из § 3, поэтому $\|e^{-itH}\psi-e^{-itH_0}[(2\pi)^{3/2}\hat{g}]\|\to 0$ при $t\to-\infty$. При $t\to+\infty$ дают вклад оба члена, и мы имеем как падающую волну, так и «рассеянную».

XI.9. Дальнодействующие потенциалы

И классическая, и квантовомеханическая теории рассеяния, которыми мы занимались до сих пор, основаны на оценках, доказательства которых не проходят для потенциалов, убывающих как r^{-1}. Из того что мы сделали до сих пор, вообще не ясно, можно ли путем улучшения оценок перенести полученные результаты на случай дальнодействующих потенциалов, и один из выводов настоящего раздела как раз и состоит в том, что без существенной модификации теорий расширить их область применения нельзя; например, с помощью доказанной ниже теоремы XI.71 можно показать (задача 99), что

$$\underset{t\to\pm\infty}{\text{w-lim}}\, e^{it(-\Delta-r^{-1})}e^{it\Delta}=0 \tag{155}$$

и потому сильного предела не существует.

В этом разделе мы сначала кратко обсудим классическую и квантовую кулоновы задачи, а затем систематически изучим случай общих дальнодействующих потенциалов.

На первый взгляд кажется, что теория рассеяния для классических кулоновых сил находится в превосходном состоянии. Решения уравнения

$$\ddot{\mathbf{r}}=-r^{-2}(\mathbf{r}/r)$$

хорошо известны в замкнутой форме. Величины $l=\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}$ и $E={}^1/_2|\dot{\mathbf{r}}|^2-r^{-1}$ сохраняются, так что, выбрав полярные координаты в плоскости, перпендикулярной l, можно описать орбиты уравнением

$$r(\theta)^{-1}=l^{-2}[1+\sqrt{1+El^2}\cos(\theta-\theta_0)].$$

Это уравнение описывает эллипс (или окружность), если $E<0$, параболу, если $E=0$, и одну ветвь гиперболы, если $E>0$. Именно гиперболические орбиты естественно попытаться связать с теорией рассеяния. Гиперболы имеют в качестве асимптот прямые линии, т. е. орбиты движения в x-пространстве асимптотически совпадают со свободными орбитами. Более того, скорость движения имеет при $t\to\pm\infty$ предельные направления, а ввиду того что $r\to\infty$ и $v=\sqrt{2E+2r^{-1}}$, она имеет также и предельную величину. Таким образом, и в фазовом пространстве асимптотика орбиты отвечает свободной орбите. Проблема возникает при временно́й параметризации этих орбит. Для свободной орбиты $\mathbf{r}_{\text{free}}(t)=\mathbf{c}t+\mathbf{b}+o(1)$. С другой стороны, поскольку $\dot{\mathbf{r}}$ имеет предел, то и в случае взаимодействия $\mathbf{r}(t)=\mathbf{c}t+o(t)$ при $t\to\infty$. Можно провести дальнейший анализ члена $o(t)$ в этом выражении. Используя соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=\sqrt{E+r^{-1}}=\sqrt{E}\,(1+(2E)^{-1}(ct)^{-1}+o(t^{-1})),$$

легко получить, что

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{c}t+\mathbf{d}\ln t+O(1)$$

при $t \to \infty$. Отсюда ясно, что кулонова орбита $r(t)$ не приближается к $\mathbf{a}+\mathbf{b}t$, но тем не менее наличие асимптот заставляет предполагать, что какая-то модифицированная теория рассеяния должна существовать. Мы видим, что между физически правильной временно́й параметризацией кулоновой орбиты и свободной асимптоты существует логарифмическое расхождение. Заметим, что $d \geqslant 0$, т. е. частица движется по орбите, отвечающей взаимодействию, *быстрее*, чем соответствующая свободная частица по асимптоте. На первый взгляд это кажется удивительным, поскольку речь идет о потенциале притяжения; но дело в том, что именно ввиду притяжения закон сохранения энергии ведет к более быстрому движению взаимодействующей частицы, чем это показывает ее асимптотическая скорость.

Все это подсказывает, что можно ожидать в квантовой теории: похоже, что при вычислении $\lim e^{itH}e^{-itH_0}$ придется заменить e^{-itH_0} на $e^{-is(t)H_0}$, где $s(t)=t+d\ln t$. Более того, проанализировав все изложенное выше, мы видим, что постоянная d должна быть функцией энергии E, т. е. e^{-itH_0} нужно заменить на $\exp[-itH_0-if(H_0)\ln t]$ с подходящей f. Для того чтобы понять, какой оператор эволюции

$$U_D(t)=\exp[-itH_0-if(H_0)\ln t]$$

следует выбрать для модифицированной квантовой динамики, отметим, что при применении метода Кука к $\exp[it(H_0+V)]\,U_D(t)$ мы должны оценить

$$\|[V-t^{-1}f(H_0)]\,U_D(t)\varphi\|.$$

Но $U_D(t)$ почти равно e^{-itH_0}, поэтому, в силу теоремы IX.31 и идей метода стационарной фазы, следует ожидать, что для больших t координата «x» будет равна $2pt$, поскольку при $H_0=-\Delta$ масса $m=1/2$. Таким образом, $x^{-1}U_D(t)\varphi$ будет выглядеть как $1/2\,(pt)^{-1}\,U_D(t)\varphi$. В итоге для компенсации надо взять $f(H_0)=-p^{-1}/2$, что подкрепляется также соображениями, основанными на анализе классических решений. Для того чтобы избежать особенностей при $t=0$ и иметь возможность изучать $H=-\Delta-\lambda r^{-1}$, мы несколько изменим наш выбор и положим

$$H_D(t)=H_0-1/2\,\lambda\,(p\,|t|)^{-1}\,\theta(|4tH_0|-1),$$

где $H_0=-\Delta$, а $\theta(a)$ — характеристическая функция интервала $(0,\infty)$. Пусть

$$U_D(t)=\exp\left(-i\int_0^t H_D(s)\,ds\right). \tag{156}$$

Отметим, что интеграл в (156) можно рассматривать как интеграл от функций, зависящих от p, и потому определить

$U_D(t)$ с помощью функционального исчисления как оператор умножения в импульсном пространстве.

Теорема XI.71. Пусть $H_0 = -\Delta$, $H = -\Delta + V(r)$,

$$V(\mathbf{r}) = -\lambda r^{-1} + V_s(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3,$$

где $V_s(\mathbf{r})$ удовлетворяет условиям (45). Тогда

$$\Omega_D^{\pm} = \underset{t \to \mp\infty}{\text{s-lim}}\, e^{itH} U_D(t)$$

существуют и задают изометрии, такие, что

$$e^{-isH}\Omega_D^{\pm} = \Omega_D^{\pm} e^{-isH_0}. \tag{157}$$

Доказательство. Мы докажем, что

$$\|(H - H_D(t))\, U_D(t)\varphi\| \in L^1(\pm 1, \pm\infty) \tag{158}$$

для φ из плотного в L^2 множества $\mathcal{D}$. Из этой оценки следует существование $\Omega_D^{\pm}$. Изометричность $\Omega_D^{\pm}$ следует из унитарности $U_D(t)$. Равенство (157) доказывается точно так же, как и в случае короткодействующих потенциалов, если заметить, что (задача 100)

$$\underset{t \to \pm\infty}{\text{s-lim}}\, U_D(t)^* U_D(t+s) = e^{-isH_0}.$$

Для $t > 0$ определим

$$\tilde{H}_D(t) \equiv H_D(t) - H_0,$$

а для $t > 1/4p^2$ введем

$$A_D(t) \equiv \int_0^t \tilde{H}_D(s)\, ds = -\frac{1}{2}\lambda p^{-1}[\ln t + \ln(4p^2)].$$

В случае $L^2(1, \infty)$ оценка (158) вытекает из соотношений

$$\|V_s(r)\exp(-itH_0 - iA_D(t))\varphi\| \in L^1(1, \infty) \tag{159a}$$

и

$$\|[-\lambda r^{-1} - \tilde{H}_D(t)]\exp(-itH_0 - iA_D(t))\varphi\| \in L^1(1, \infty). \tag{159b}$$

(159a) легко получить, модифицируя (задача 101) метод стационарной фазы теоремы XI.16 применительно к тем φ, для которых $\hat{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Пусть

$$\eta(x, t) = \exp(ix^2/4t)\exp(i\lambda t(2x)^{-1}\ln(x^2/t)),$$

и для $\hat{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ положим

$$R_\varphi(x, t) = U_D(t)\varphi(x) - (2it)^{-3/2}\eta(x, t)\hat{\varphi}(x/2t).$$

Покажем, что R_φ допускает оценку

$$|R_\varphi(x, t)| \leqslant C(\ln|t|)^\mu t^{-5/2}[1+(x/t)^2]^{-m} \tag{160}$$

при всех $|t|>2$, любом целом m и подходящих постоянных C и μ, зависящих только от m и φ, а также что из (160) вытекает (159b).

Сначала заметим, что из (160) вытекает соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\| U_D(t)\varphi-(2it)^{-3/2}\eta(x, t)\hat{\varphi}(x/2t)\|_2=0 \tag{161}$$

для $\hat{\varphi}\in C_0^\infty$ и потому для всех φ. Это соотношение аналогично (IX.33) и будет играть важную роль при физической интерпретации $\Omega_D^\pm$, которую мы дадим ниже.

Пусть $\varphi_1=(p^{-1}\hat{\varphi})^\vee$. Тогда для достаточно больших t

$$[(\lambda r^{-1}+\tilde{H}_D(t))\,U_D(t)\varphi](x)=(\lambda x^{-1}U_D(t)\varphi)(x)-$$
$$-\lambda(2t)^{-1}(U_D(t)\varphi_1)(x)=\lambda x^{-1}R_\varphi(x, t)-\lambda(2t)^{-1}R_{\varphi_1}(x, t),$$

поскольку член $\lambda x^{-1}\eta(x, t)\hat{\varphi}(x/2t)$ полностью компенсируется членом $\lambda(2t)^{-1}\eta(x, t)\hat{\varphi}_1(x/2t)$. Далее, в силу (160),

$$\|\lambda x^{-1}R_\varphi(x, t)\|^2\leqslant t^{-4}(\ln|t|)^{2\mu}$$

и аналогично для члена с φ_1. Таким образом, (159) будет доказано, если доказать (160).

Для доказательства (160) введем $\varphi_C(x, t)$ равенством

$$\varphi_C(x, t)=[e^{-iA_D(t)}\varphi](x),$$

так чтобы для достаточно больших t

$$\hat{\varphi}_C(k, t)=\exp[{}^1/{}_2 i\lambda k^{-1}\ln(4k^2t)]\,\hat{\varphi}(k).$$

Поскольку $\hat{\varphi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\diagdown\{0\})$, постольку $\hat{\varphi}_C(\cdot, t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, и для любой нормы $\|\cdot\|_\alpha$ на $\mathcal{S}$ и всех t с $|t|>2$

$$\|\hat{\varphi}_C(\cdot, t)\|_\alpha\leqslant C_\alpha\ln(|t|)^{\nu(\alpha)},$$

откуда

$$\|\varphi_C(\cdot, t)\|_\alpha\leqslant D_\alpha\ln(|t|)^{\mu(\alpha)}; \tag{162}$$

ибо $\wedge$ есть гомеоморфизм $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. Теперь мы будем следовать доказательству теоремы IX.31 Воспользуемся равенствами

$$(U_D(t)\varphi)(x)=(4\pi it)^{-3/2}\int e^{i(x-y)^2/4t}\varphi_C(y, t)\,dy$$

и

$$e^{i(x-y)^2/4t}=e^{ix^2/4t}\,e^{-ix\cdot y/2t}\,e^{iy^2/4t}$$

и убедимся, что

$$R_\varphi(x,\ t)=(4\pi it)^{-3/2}e^{ix^2/4t}\int e^{-ix\cdot y/2t}(e^{iy^2/4t}-1)\varphi_C(y,\ t)\,dy. \tag{163}$$

Далее, применяя неравенства $|e^{iy^2/4t}-1|\leqslant|y^2/4t|$ и (162), получим

$$|R_\varphi(x,\ t)|\leqslant C|t|^{-5/2}\ln(|t|)^\mu.$$

Аналогично из (163) интегрированием по частям найдем

$$\left|\left(\frac{x}{t}\right)^{2m}R_\varphi(x,t)\right|\leqslant|t|^{-3/2}\left|\int(-\Delta_y)^m[e^{-ix\cdot y/2t}](e^{iy^2/4t}-1)\varphi_C(y,t)\,dy\right|\leqslant$$
$$\leqslant|t|^{-3/2}\int|(-\Delta_y)^m[(e^{iy^2/4t}-1)\varphi_C(y,\ t)]|\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_m|t|^{-5/2}(\ln|t|)^{\mu(m)},$$

так что

$$(1+(x/t)^2)^{2m}|R_\varphi(x,\ t)|\leqslant C_m|t|^{-5/2}(\ln|t|)^\mu,$$

откуда следует (160). ∎

Прежде чем обратиться к физической интерпретации $\Omega_D^\pm$, отметим два следствия их существования.

Следствие 1. Предположим, что $V_s(\mathbf{r})\to 0$ на ∞ и обладает свойствами (45). Тогда $\sigma_{ac}(H)=[0,\ \infty)$, где $H=-\Delta-\lambda|\mathbf{r}|^{-1}+V_s(r)$.

Следствие 2. Если $\lambda\neq 0$ и H таков же, как и выше, то обычных $\Omega^\pm(H,\ H_0)$ не существует.

Следствие 1 стандартным образом выводится из равенства (157). Доказательство следствия 2 мы оставляем читателю (задача 99).

Обратимся теперь к физической интерпретации $\Omega_D^\pm$. Пусть $\psi=\Omega_D^+\varphi$. Положим $\psi_t=e^{-itH}\psi$, $\varphi_t^{(0)}=e^{-itH_0}\varphi$, $\varphi_t^{(D)}=U_D(t)\varphi$. Считать, что, подобно случаю короткодействующих потенциалов, $\|\varphi_t^{(0)}-\psi_t\|\to 0$ при $t\to-\infty$, нельзя. Скорее

$$\|\varphi_t^{(D)}-\psi_t\|\to 0\quad\text{при}\quad t\to-\infty.$$

Однако, в силу (161) и (IX.33),

$$\|\eta_t\varphi_t^{(0)}-\varphi_t^{(D)}\|\to 0\quad\text{при}\quad t\to\pm\infty,$$
$$\|\gamma_t\hat{\varphi}_t^{(0)}-\hat{\varphi}_t^{(D)}\|=0\quad\text{при}\quad\text{всех } t$$

с подходящими фиксированными функциями $\eta_t(x)$ и $\gamma_t(k)$ единичной амплитуды. В итоге при $t\to-\infty$

$$\int\left||\varphi_t^{(0)}(x)|^2-|\psi_t(x)|^2\right|dx\to 0,\qquad\int\left||\hat{\varphi}_t^{(0)}(p)|^2-|\hat{\psi}_t(p)|^2\right|dp\to 0.$$

Следовательно, хотя ψ_t не является асимптотически свободной волновой функцией, порождаемые ею *вероятностные распределения* как координаты, так и импульса стремятся при $t \to -\infty$ к соответствующим распределениям, порождаемым свободной волновой функцией $\varphi_t^{(0)}$. Аналогичное утверждение справедливо и при $t \to \infty$. Именно в этом смысле движение «асимптотически свободно».

Полноту $\Omega_D^{\pm}$ можно доказать, налагая более жесткие ограничения на V_s.

Теорема XI.72. Предположим, что

(i) V_s —Δ-ограничен с относительной гранью $\alpha < 1$;
(ii) $V_s (H_0+1)^{-m-1}$ имеет след при некотором m.

Тогда $\Omega_D^{\pm}$ полны в том смысле, что

$$\operatorname{Ran}\Omega_D^{+} = \operatorname{Ran}\Omega_D^{-} = \mathscr{H}_{ac}(H).$$

Доказательство можно провести, обратившись к работе, приведенной в Замечаниях, и к задаче 102. Отметим также, что модифицированные волновые операторы существуют и при многоканальном рассеянии; см. Замечания. Применяя методы, описанные в § 17, Энсс доказал усиленные варианты приведенной теоремы. Похоже, что можно доказать соответствующие аналоги и в многоканальном случае.

В оставшейся части этого раздела мы намерены обсудить теорию рассеяния в случае дальнодействующих потенциалов более общих, чем кулоновы потенциалы. Такая общая теория прояснит выбор $U_D(t)$.

Рассмотрим сначала классический случай. Предположим, что $\mathbf{F} = -\nabla V$, причем

$$\lim_{x\to\infty} V(\mathbf{x}) = 0, \tag{164a}$$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x})| \leqslant k(1+x)^{-1-\alpha}, \tag{164b}$$

$$|\partial F_i(\mathbf{x})/\partial x_j| \leqslant k(1+x)^{-2-\alpha}, \tag{164c}$$

где $\alpha > 0$. Конечно, если $\alpha > 1$, то мы имеем случай короткодействующего потенциала, рассмотренный в § 2, поэтому предположим, что $\alpha < 1$ Для удобства предположим также, что α^{-1} не равно целому числу. Иногда мы еще будем предполагать, что F — «почти центрально-симметричная» сила, т. е. для некоторого $\varepsilon > 0$

$$|\mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{x})| \leqslant k(1+x)^{-2-\varepsilon}, \tag{165}$$

где $\mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_{\parallel}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{F}_{\parallel}(\mathbf{x}) = x^{-2}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x}))\,\mathbf{x}$.

Так же как в случае короткодействующих потенциалов, рассмотрим задачу

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{p}(t), \quad \dot{\mathbf{p}}(t)=-\nabla V, \quad \mathbf{p}(0)=\mathbf{p}_0, \quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0 \tag{166}$$

и введем множества

$$\Sigma_\pm=\{\langle\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0\rangle\in\mathbb{R}^6 \mid V(\mathbf{x}_0)+\frac{1}{2}p_0^2>0, \text{ решение } \mathbf{x}(t)$$
$$\text{задачи (166) удовлетворяет условию } \overline{\lim_{t\to\mp\infty}}\,|\mathbf{x}(t)|=\infty\}.$$

Как и в § 2, можно показать (задача 103), что $\Sigma_+=\Sigma_-$ почти всюду и для $\langle\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0\rangle\in\Sigma_\pm$ и некоторой $c>0$ при всех t

$$|\mathbf{x}(t)|\geqslant c|t|-d. \tag{167}$$

Теорема XI.73. Пусть $\mathbf{F}$ и V удовлетворяют условиям (164).

(a) Пусть $\langle\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)\rangle$ — решение (166) с начальными данными в Σ_+. Тогда существует

$$\lim_{t\to-\infty}\mathbf{p}(t)\equiv\mathbf{p}_{\text{in}}.$$

Более того, $\mathbf{p}(t)-\mathbf{p}_{\text{in}}=O(|t|^{-\alpha})$ при $t\to-\infty$, и реализуется каждое значение $\mathbf{p}_{\text{in}}\neq 0$.

(b) Если $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ — два решения, для которых $\lim_{t\to-\infty}(\mathbf{p}_1(t)-\mathbf{p}_2(t))=0$, то существует

$$\mathbf{a}\equiv\lim_{t\to-\infty}(\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)).$$

Более того, $|\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)-\mathbf{a}|=O(|t|^{-\alpha})$ при $t\to-\infty$, и для заданного $\mathbf{p}_{\text{in}}\neq 0$ и соответствующего $\mathbf{x}_1$ реализуется каждое значение $\mathbf{a}$. Если $\mathbf{a}=0$, то $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1$ для всех t; если $\mathbf{a}=\mathbf{p}_{\text{in}}t_0$, то $\mathbf{x}_2(t)=\mathbf{x}_1(t-t_0)$.

(c) Предположим, что выполняется еще и (165). Тогда для любого вектора $\mathbf{w}$, такого, что $\mathbf{w}\cdot\mathbf{p}_{\text{in}}=0$,

$$\lim_{t\to-\infty}\mathbf{x}(t)\cdot\mathbf{w}\equiv\alpha(\mathbf{w})$$

существует и $\mathbf{x}(t)\cdot\mathbf{w}-\alpha(\mathbf{w})=O(|t|^{-\delta})$, где $\delta=\min\{\varepsilon, \alpha\}$; при этом путем перебора всех $\mathbf{x}$ с заданным $\mathbf{p}_{\text{in}}\neq 0$ можно реализовать все линейные функционалы α на $\{\mathbf{w}\mid \mathbf{w}\cdot\mathbf{p}_{\text{in}}=0\}$.

Доказательство. Пусть $\langle x(t), p(t)\rangle$ — решение с начальными данными в Σ_+. В силу (164b) и (167),

$$|F(x(t))|\leqslant k(1+|x(t)|)^{-1-\alpha}\leqslant C_1(1+|t|)^{-1-\alpha},$$

так что существует

$$\lim_{t\to-\infty}p(t)=p_0+\lim_{t\to-\infty}\int_0^t F(x(s))\,ds$$

и $p(t)-p_{\text{in}}=O(|t|^{-\alpha})$. Отложим пока доказательство того, что реализуется каждое значение $p_{\text{in}}\neq 0$.

Пусть x_1, x_2 — два решения с одинаковым значением p_{in}. Пусть $\Delta(t)=x_1(t)-x_2(t)$. Тогда

$$|\dot{\Delta}(t)|=|p_1(t)-p_2(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{t}|F(x_1(s))-F(x_2(s))|\,ds,$$

поскольку $p_i(t)=p_{\text{in}}+\int_{-\infty}^{t}F(x_i(s))\,ds$. Теперь, в силу (164с) и (167),

$$|F(x_1(t))-F(x_2(t))|\leqslant C_2|\Delta(t)|(1+|t|)^{-2-\alpha},$$

так что

$$|\dot{\Delta}(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{t}|\Delta(s)|(1+|s|)^{-2-\alpha}\,ds. \tag{168}$$

Предположим, что $|\Delta(t)|\leqslant C_\gamma|t|^\gamma$, $\alpha<\gamma\leqslant 1$ при $t\leqslant -1$. Тогда, в силу (168), $|\dot{\Delta}(t)|\leqslant C(1+\alpha-\gamma)^{-1}|t|^{-1-\alpha+\gamma}$, так что

$$|\Delta(t)|=\left|\Delta(-1)+\int_{-1}^{t}\dot{\Delta}(s)\,ds\right|\leqslant C'_\gamma|t|^{\gamma-\alpha}.$$

Но $|\Delta(t)|\leqslant C|t|$. Поэтому, повторяя проделанную оценку N раз, где N таково, что $\alpha N<1$, $\alpha(N+1)>1$, получаем, что $|\Delta(t)|\leqslant$ $\leqslant C'|t|^{1-N\alpha}$. Тогда, в силу (168),

$$|\dot{\Delta}(t)|\leqslant C((N+1)\alpha)^{-1}|t|^{-(N+1)\alpha}$$

для $t<0$, так что существует $\lim\limits_{t\to-\infty}\Delta(t)=\Delta(0)+\lim\limits_{t\to-\infty}\int_0^t\dot{\Delta}(s)\,ds$.

Это означает, что $\Delta(t)$ ограничена, и, в силу (168), $\Delta(t)-a=$ $=O(|t|^{-\alpha})$. Доказательство реализуемости каждого a мы опять-таки отложим.

Если $a=0$, то $\Delta(t)\to 0$ при $t\to-\infty$. Следовательно, в силу (168), при $t<0$ имеем

$$|\Delta(t)|\leqslant(2+\alpha)^{-1}(1+\alpha)^{-1}(1+|t|)^{-\alpha}\sup_{-\infty\leqslant s<t}|\Delta(s)|.$$

Выберем t таким, что $(2+\alpha)^{-1}(1+\alpha)^{-1}(1+|t|)^{-\alpha}<1$. Тогда можно заключить, что $\Delta(s)=0$ при $s\leqslant t$, так что $\Delta(t)=0$ для всех t в силу локальной единственности решения.

При заданных t_0 и $x_1(t)$ легко убедиться, что $x_3(t)\equiv x_1(t-t_0)$ обладает свойством: $\dot{x}_3(t)\to p_{\text{in}}$ и $x_1(t)-x_3(t)=\int_{t-t_0}^{t}\dot{x}_1(s)\,ds\to p_{\text{in}}t_0$.

В силу только что доказанной единственности, любое x_2, такое, что $x_2 \longrightarrow p_{\rm in}$ и $x_1 - x_2 \longrightarrow p_{\rm in} t_0$, совпадает с x_3.

Предположим теперь, что выполняется (165) и $w \cdot p_{\rm in} = 0$. Допустим, что $|w \cdot F(x(t))| \leqslant C |t|^{-\gamma}$, где $1 < \gamma < 2$. Тогда, ввиду того что

$$
\begin{aligned}
w \cdot p(t) &= \int_{-\infty}^{t} w \cdot F(x(s))\, ds, \\
w \cdot x(t) &= w \cdot x(0) + \int_{0}^{t} (p(s) \cdot w)\, ds,
\end{aligned}
\tag{169}
$$

имеем оценку

$$|w \cdot x(t)| \leqslant C_2 (1 + |t|)^{2-\gamma}.$$

Таким образом, в силу (167),

$$|w \cdot x(t)|\, |x(t)|^{-1} \leqslant C_4 (1 + |t|)^{1-\gamma}.$$

В результате, применяя неравенство

$$|a \cdot F(x(s))| \leqslant |F_{\perp}(x(s))|\, |a| + \frac{|a \cdot x(s)|}{|x(s)|} |F(x(s))|,$$

имеем с учетом (164) и (165)

$$|w \cdot F(x(t))| \leqslant \text{const}\, [(1 + |t|)^{-2-\varepsilon} + (1 + |t|)^{-\gamma-\alpha}].$$

Начав с $\gamma = 1 + \alpha$ и повторив эту процедуру нужное число раз, получим оценку

$$|w \cdot F(x(t))| \leqslant \text{const}\, (1 + |t|)^{-2-\delta},$$

где $\delta = \min(\varepsilon, \alpha)$. Таким образом, в силу (169), получим, что $w \cdot p(t) = O(|t|^{-1-\delta})$, так что у $w \cdot x(t)$ есть предел $\alpha(w)$ и $w \cdot x(t) - \alpha(w) = O(|t|^{-\delta})$.

Наконец, вернемся к вопросу существования, т. е. утверждению о реализуемости всех $\mathbf{p}_{\rm in} \neq 0$ и $\mathbf{a}$; это в свою очередь автоматически будет означать реализуемость каждого линейного отображения α: $w \longmapsto \alpha(w)$. Очевидно, достаточно построить вспомогательную функцию $\mathbf{z}(\mathbf{p}, t)$, такую, что $\lim\limits_{t \to -\infty} \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p}$, а затем для любого $\mathbf{a}$ найти решение $\mathbf{x}(t)$, такое, что $\lim\limits_{t \to -\infty} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(\mathbf{p}, t)) = \mathbf{a}$ и $\lim\limits_{t \to -\infty} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{p}$. Функция $\mathbf{z}$ заменяет простейшую функцию $\mathbf{p}t$, используемую в случае короткодействия. Если у нас будет «правильная» функция $\mathbf{z}(\mathbf{p}, t)$, мы сможем так же, как в случае короткодействия, построить решение x с помощью теоремы о сжимающих отображениях.

Как сделать хороший выбор $\mathbf{z}(\mathbf{p}, t)$? Для того чтобы получить приближенную функцию, отправляясь от функции $\dot{\mathbf{z}}$, стремящейся к $\mathbf{p}$ при $t \to -\infty$, мы попытаемся интегрировать от $-\infty$. Однако получить $\mathbf{z}$ интегрированием $\dot{\mathbf{z}}$ прямо от $-\infty$ мы не в состоянии, поскольку $\dot{\mathbf{z}}$ стремится к $\mathbf{p}$ только как $|t|^{-\alpha}$ с $\alpha < 1$. Поэтому проинтегрируем $\dot{\mathbf{z}}$ от $t=0$ и определим $\mathbf{z}_n(\mathbf{p}, t)$ индуктивно:

$$\mathbf{z}_0(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p}t,$$

$$\dot{\mathbf{z}}_n(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{F}(\mathbf{z}_{n-1}(\mathbf{p}, s))\, ds,$$

$$\mathbf{z}_n(\mathbf{p}, t) = \int\limits_0^t \dot{\mathbf{z}}_n(\mathbf{p}, s)\, ds.$$

Возьмем $z(p, t)$ равным $z_N(p, t)$ с $N=[1/\alpha]$ (целая часть $1/\alpha$). Ясно, что для любого фиксированного $p \neq 0$ и $t \leqslant 0$

$$|z_n(p, t)| \geqslant c|t| - d \tag{170}$$

при $n=0, \ldots, N$ и некоторой $c > 0$. Более того, просто доказательство по индукции типа уже проведенных выше дает неравенство

$$|z_n(p, t) - z_{n-1}(p, t)| \leqslant Kt^{1-n\alpha} \tag{171}$$

при $n=1, \ldots, N$. Если x удовлетворяет соотношениям

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)), \qquad x(t) - z_N(p, t) - a \to 0, \qquad \dot{x}(t) - \dot{z}_N(p, t) \to 0,$$

то $y(t) = x(t) - z_N(p, t) - a$ удовлетворяет уравнению

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_{-\infty}^{w} [F(z_N(p, s) + a + y(s)) - F(z_{N-1}(p, s))]\, ds\, dw: \tag{172}$$

Обратно, решения (172) дают решения уравнения Ньютона с требуемым асимптотическим поведением. Имея (164с), (170) и (171), можно воспользоваться методом сжимающих отображений § 2 (задача 104) и найти решения (172), а также доказать существование, завершив доказательство теоремы. ▮

Какова же физическая интерпретация этой теоремы? Рассмотрим случай, когда одновременно выполнены условия (164) и (165). Тогда при заданном $\mathbf{p}_{\text{in}} \neq 0$ и перпендикулярном ему $\mathbf{b}_{\text{in}}$ существует однопараметрическое семейство решений x_s, таких, что

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) \to \mathbf{p}_{\text{in}}, \qquad \mathbf{x}_s(t) - \mathbf{p}_{\text{in}}(\mathbf{p}_{\text{in}} \cdot \mathbf{x}(s))\, p_{\text{in}}^{-2} \to \mathbf{b}_{\text{in}}$$

при $t \to -\infty$. Они различаются лишь временно́й параметризацией, т. е. $x_s(t) = x_0(t-s)$. Таким образом, если $\langle \mathbf{x}_s(0), \dot{\mathbf{x}}_s(0) \rangle \in \Sigma_-$

(а это имеет место при почти всех $\mathbf{p}_{\text{in}}$ и $\mathbf{b}_{\text{in}}$; см. задачу 105), то $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{p}_{\text{out}}$ и

$$\lim_{t\to\infty} [\mathbf{x}_s(t) - \mathbf{p}_{\text{out}}(\mathbf{p}_{\text{out}}\cdot\mathbf{x}(s))\, p_{\text{out}}^{-2}] = \mathbf{b}_{\text{out}},$$

независимо от s. В результате мы приходим к естественно определенному отображению

$$\tilde{S}\colon \langle \mathbf{p}_{\text{in}}, \mathbf{b}_{\text{in}}\rangle \to \langle \mathbf{p}_{\text{out}}, \mathbf{b}_{\text{out}}\rangle.$$

Как и в случае короткодействующих потенциалов, если сила центральна, то благодаря закону сохранения момента количества движения b_{out} полностью определяется вектором $\mathbf{p}_{\text{out}}$, так что S описывается заданием одного лишь угла рассеяния как функции $\mathbf{p}_{\text{in}}$ и $\mathbf{b}_{\text{in}}$. Однако в отличие от короткодействующих потенциалов в случае дальнодействия время задержки перестает быть конечным. Действительно, можно показать (задача 106), что если $V_\varepsilon(x)$ — некоторая короткодействующая модификация V, например $V_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x^2} V(x)$, то при $\varepsilon \to 0$ часть оператора рассеяния, заданная величиной $\tilde{S}_\varepsilon$, сходится к определенному выше $\tilde{S}$. При этом в типичных случаях время задержки расходится при $\varepsilon \to 0$, если V — по-настоящему дальнодействующий потенциал.

Проведенное рассуждение наводит на мысль о том, что проблема дальнодействия при квантовом рассеянии связана с бесконечными зависящими от энергии фазами, ибо аналогом классического времени задержки служит фаза квантового оператора рассеяния, а переход от обычной к модифицированной динамике можно рассматривать как бесконечную зависящую от энергии корректировку фазы. К сожалению, приведенная выше формулировка не имеет квантового обобщения, поскольку отображение $\langle p, a\rangle \mapsto z_N(p, t) + a$ при фиксированном t в общем случае *не является* каноническим преобразованием, так что в квантовой механике ему не будет отвечать унитарный оператор. Однако иногда в классическом случае можно построить приближенные решения $\tilde{z}(p, a, t)$, такие, что $\langle p, a\rangle \mapsto \tilde{z}(p, a, t)$ является каноническим преобразованием при каждом t, а уравнения (166) обладают решением $x(p, a, t)$ со свойствами $|x - \tilde{z}| + |\dot{x} - \dot{\tilde{z}}| \to 0$ при $t \to -\infty$ и $\dot{\tilde{z}}(p, a, t) \to p$, $\tilde{z}(p, a, t) - \tilde{z}(p, b, t) \to a - b$ при $t \to -\infty$. При исследовании квантового случая ниже мы будем придерживаться аналогии именно с таким классическим построением. При этом, перенося рассуждения, проводимые ниже применительно к квантовому случаю, на классический, можно передоказать теорему XI.73 и получить доказательство, основанное на приближенной динамике, *задаваемой* каноническим преобразованием; см. ссылки в Замечаниях и задачу 107.

Теорема XI.74. Пусть $V = V_L + V_s$ — измеримая функция на $\mathbb{R}^n$, где V_s удовлетворяет условиям (45), а V_L — неравенству

$$|(D^\alpha V_L)(x)| \leqslant C(1+x)^{-|\alpha|-\varepsilon}, \qquad |\alpha| \leqslant M;$$

здесь $\varepsilon > 1/2$, если $M=1$, $\varepsilon > 1/5$, если $M=2$, и $\varepsilon > 0$, если $M=3$. Тогда существует C^∞-функция $W(\mathbf{k}, t)$, определенная для всех $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $t \in \mathbb{R}$ и такая, что

(a) $$W(k, s+t) - W(k, t) \to sk^2/2 \tag{173}$$

при $t \to \pm\infty$ и любых фиксированных k, s;

(b) для любого самосопряженного расширения H оператора $-{}^1/_2\Delta + V$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ существуют

$$\operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{itH} U_D(t) = \Omega_D^\pm,$$

где $U_D(t) = \exp(-iW(-i\nabla, t))$.

Полное доказательство этой теоремы включает в себя большое количество тонких оценок. Мы не будем приводить его здесь, а ограничимся описанием некоторых важных моментов, включая метод построения W.

Суть условия (173) в том, что оно влечет за собой (задача 100) равенство

$$\operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} [U_D(t+s)\, U_D(t)^{-1}] = e^{-isH_0},$$

и потому выполняется обычное соотношение

$$e^{-isH}\Omega_D^\pm = \Omega_D^\pm e^{-isH_0}.$$

Конечно, на это можно возразить, что W не всегда однозначно определено, и это действительно так. Однако если W и W' — две функции, удовлетворяющие (a) и (b), $\operatorname{Ran}\Omega_D^+ = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H)$, то (задача 108) существует измеримая конечная почти всюду функция $F(k)$, такая, что

$$(\Omega_D^+)' = \Omega_D^+ e^{iF(-i\nabla)}.$$

В частности, $\operatorname{Ran}\Omega_D^+$ не зависит от W, и потому асимптотическая полнота имеет место для какого-то одного W тогда и только тогда, когда она имеет место для любого другого W.

Кроме того, можно показать, что при любом выборе W асимптотическое *распределение вероятностей*, отвечающее $U_D(t)f$ как в x-, так и в p-пространстве, совпадает с распределением, отвечающим $e^{-itH_0}f$. Конечно, если $(\Omega_D^\pm)' = \Omega_D^\pm e^{iF_\pm(k)}$, то ядра S-операторов на поверхности энергии связаны равенством

$$S'(k, k') = S(k, k')\, e^{i(F_+(k) - F_-(k'))},$$

так что дифференциальные сечения рассеяния тоже не зависят от выбора W. Однако «фаза» $S(k, k')$, к сожалению, остается не определенной до тех пор, пока не сделан выбор W. Вопрос о том, что есть «правильная фаза», весьма интересен, и мы обсуждаем его в Замечаниях.

Обратимся теперь к трем аспектам доказательства теоремы XI.74: (i) сглаживанию V_L, (ii) выбору W, (iii) замечаниям, касающимся оценок.

Ясно, что заданный потенциал V, подчиненный требованиям теоремы XI.74, можно многими способами разбить на сумму V_L и V_s с V_s, удовлетворяющим (45). Первый шаг — сделать разбиение таким, чтобы V_L был C^∞-функцией, а его производные все быстрее и быстрее убывали на бесконечности. В действительности можно сделать разбиение, при котором

$$|(D^\alpha V_L)(x)| \leqslant C_\alpha (1+x)^{-m(|\alpha|)} \tag{174a}$$

для всех α, где

$$m(1)+m(3) > 4, \tag{174b}$$

$$m(l) \geqslant \delta l - \varepsilon, \qquad \delta > 1/2. \tag{174c}$$

Например (задача 109), в случае $\varepsilon > 0$, $M=3$ можно взять $m(1)=1+\varepsilon$, $m(2)=2+\varepsilon$, $m(3)=3+\varepsilon$, $m(l)=3+\varepsilon+{}^2/_3(l-3)$ для $l>3$. Как реально построить V_L? Начнем с разложения $V=\tilde{V}_s+\tilde{V}_L$. Первый приходящий на ум кандидат на роль V_L — функция $f=h*\tilde{V}_L$, где $h\in C_0^\infty$. Функция f, конечно, будет класса C^∞, но ее высшие производные могут не убывать автоматически поскольку $\tilde{V}_L$ может быть только класса C^1, а $D^\alpha h$ не будет иметь нужного «убывания». Иногда даже при фиксированной h нужно, чтобы она все более и более расплывалась при $x\to\infty$! Для того чтобы все это учесть, следует взять $\tilde{V}_L=\sum \tilde{V}_L^{(n)}$, где $\tilde{V}_L^{(n)}$ таковы, что их носители лежат внутри все более обширных сферических оболочек, уходящих на бесконечность. Тогда V_L можно взять равным $\sum h_n * \tilde{V}_L^{(n)}$, где h_n становится все более и более расплывающимся. Для того чтобы получить короткодействующую разность $V_L-\tilde{V}_L$, нужно применять дополнительный трюк. Набросок построения в случае $\varepsilon>0$, $M=3$ дан в задаче 109.

Как будет объяснено дальше, решающую роль играет неравенство (174b). В случае $M=3$, $\varepsilon>0$ оно выполняется очевидным образом, и это служит причиной того, что при $\varepsilon>0$, $M=3$ описанное построение всегда возможно и для него не нужны никакие априорные сведения о $D^\alpha V_L$ с $|\alpha|\geqslant 4$. По этой же причине ε должно быть больше $1/2$ (соответственно $\varepsilon>1/5$), если $M=1$ (соответственно $M=2$). Когда новое V_L строится описанным выше способом, указанные значения ε требуются для того, чтобы гарантировать выполнение (174b) (см. задачу 110).

Обратимся теперь к построению W. При применении метода Кука для изучения пределов $\Omega_D^{\pm}$ приходится проводить оценку

$$\iint \left(\frac{1}{2}k^2+V(x)-\frac{\partial W}{\partial t}\right) e^{ik\cdot x-iW(k,\,t)}\hat{\varphi}(k)\,dx\,dk.$$

Короткодействующую часть V можно оценить так же, как раньше. Вклад дальнодействующей части частично должен компенсироваться $\partial W/\partial t$, так же как это было в кулоновом случае. Если используется метод стационарной фазы, то можно ожидать, что интеграл, о котором шла речь выше, будет сосредоточен около точек, где $x=\partial W/\partial k$. Таким образом, для того чтобы эффект компенсации был как можно больше, можно попытаться решить уравнение

$$V_L\left(\frac{\partial W}{\partial k}\right)+\frac{k^2}{2}=\frac{\partial W}{\partial t}. \tag{175}$$

Прежде чем обсуждать точные решения этого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, мы хотим переписать его в несколько ином виде и обсудить приближенные решения. Естественно представлять себе, что $U_D(t)$ получится в результате интегрирования нестационарного уравнения с гамильтонианом

$$H(t)=H_0+f(-i\nabla,\,t).$$

Ясно, что следует взять f в виде

$$f(k,\,t)\equiv\frac{\partial W}{\partial t}-\frac{k^2}{2}. \tag{176}$$

Если ввести $x(k,\,t)\equiv\partial W/\partial k$, то (175) примет следующий вид:

$$f(k,\,t)=V_L(x(k,\,t)). \tag{177}$$

Теперь, применяя $\partial/\partial k$ к (175), легко убедиться, что $x(k,\,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(k,\,t)=k+\nabla_k V_L(x(k,\,s)). \tag{178}$$

Если попытаться взять $W\equiv 0$ при $t=t_0$, то (177) и (178) приведут к интегральному уравнению

$$f(k,\,t)=V_L\left(kt-kt_0+\int_{t_0}^{t}\nabla_k f(k,\,s)\,ds\right). \tag{179}$$

Простейшее приближенное решение (179) получится, если взять $t_0=0$ и $f(k,\,t)\approx V_l(kt)$. Полагая

$$W(k,\,t)=\frac{1}{2}k^2t+\int_{t_0}^{t}f(k,\,s)\,ds+\text{const},$$

мы видим, что это приближение приводит к W, которое использовалось в кулоновом случае. Такой выбор можно делать для определения модифицированных волновых операторов при $V_L(x) = |x|^{-\alpha}$ до тех пор, пока $\alpha > 1/2$. При $\alpha < 1/2$ необходимо либо попытаться решить (175) точно, либо перейти к следующим приближениям в решениях (179), взяв, например,

$$f(k, t) \approx V_L\left(kt + \int_0^t s(\nabla V_L)(ks)\,ds\right).$$

Такой метод более высоких приближений действительно применялся, но оказалось, что, когда $\alpha \to 0$, его применение требует сведений о поведении все более и более высоких производных V_L.

Ключ к доказательству теоремы XI.74 — в построении *точных* решений (175), которое становится возможным после осознания того, что это есть стандартное уравнение классической механики, а именно **уравнение Гамильтона — Якоби**, записанное в импульсном пространстве. Теперь мы можем провести формальное решение (175). Пусть $g(\eta)$ — произвольная гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ (или подмножестве $\mathbb{R}^n$). Фиксируем вещественное t_0. Пусть $X(\eta, t)$ — решение уравнения Ньютона

$$\ddot{X}(\eta, t) = -(\nabla V_L)(X(\eta, t))$$

с начальными условиями

$$X(\eta, t_0) = g(\eta), \tag{180a}$$

$$\dot{X}(\eta, t_0) = \eta. \tag{180b}$$

Предположим, что для каждого фиксированного t отображение $\eta \mapsto k \equiv \dot{X}(\eta, t)$ обратимо и $\eta = N(k, t)$ — обратная функция, т. е.

$$\dot{X}(N(k, t), t) = k. \tag{181}$$

Введем

$$x(k, t) = X(N(k, t), t), \tag{182}$$

т. е. x есть значение в момент времени t того решения уравнения Ньютона, удовлетворяющего условиям (180), которое в момент t имеет скорость k. Мы утверждаем, что x удовлетворяет (178), и тем самым решения (179) можно получить при помощи (176) и (177). Для проверки этого продифференцируем сначала (181) по k и t:

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial \eta}\frac{\partial N}{\partial k} = 1, \tag{183}$$

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial \eta}\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial \dot{X}}{\partial t} = 0;$$

отсюда, используя равенство $\ddot{X}(\eta, t) = -(\nabla V_L)(X)$, получаем

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial \eta}\frac{\partial N}{\partial t} = (\nabla V_L)(x). \tag{184}$$

Из (182) вытекает, что

$$\frac{\partial x}{\partial k} = \frac{\partial X}{\partial \eta}\frac{\partial N}{\partial k}, \tag{185}$$

а из (183)—(185) мы видим, что

$$\frac{\partial N}{\partial t}\frac{\partial X}{\partial \eta} = (\nabla V_L)(x)\frac{\partial x}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}V_L(x(k, t)).$$

Следовательно,

$$\dot{x}(k, t) = \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial \eta}\frac{\partial N}{\partial t} = k + \frac{\partial}{\partial k}V_L(x(k, t)),$$

а это и есть (178).

Единственный «формальный» момент в этом доказательстве — использование обратимости отображения $\eta \mapsto \dot{X}(\eta, t)$. На основе сведений об асимптотике V_L можно построить такую функцию $W(k, t)$ на $\{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \times \mathbb{R}$, что для любого компактного $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует T_K, при котором W удовлетворяет (175) на $K \times \{t \mid |t| > T_K\}$. Эту функцию W можно использовать при построении обобщенных волновых операторов.

Наконец, обратимся к некоторым вопросам, связанным с оценками. Важность (174b) вытекает из того факта, что в случае, когда это равенство справедливо, можно показать, что W удовлетворяет оценке

$$|D_k^\alpha(t^{-1}\partial W/\partial k - k)| \leqslant Ct^{-\beta}, \qquad |\alpha| \leqslant 1,$$

для некоторых $\beta > 0$. Это означает, что для больших t критические точки функции $x \cdot k - W(k, t)$, являющиеся решениями уравнения

$$x/t = k + t^{-1}(\partial W/\partial k - tk),$$

однозначно определены и лежат около критической точки $x/t = k$, отвечающей короткодействующим потенциалам. Другой аспект, который следует отметить в связи с оценками, — это необходимость развития метода стационарной фазы дальше, чем это сделано в теореме XI.15. Переписав интеграл

$$\int u(k)\, e^{i\omega f(k)}\, dk = \int v(y)\, e^{i\omega(y,\, Ay)/2}\, dy$$

так, как это было сделано там, и применив (43), нужно рассмотреть разложение $\exp\{i(k, A^{-1}k)/2\omega\}$ по степеням ω^{-1}, а не пользоваться простой оценкой, как в теореме XI.15.