XI.10. Оптическое и акустическое рассеяние I: методы оператора Шредингера

В настоящем разделе излагается техника описания рассеяния классических волн в неоднородной среде. Развиваемые методы привязаны к линейным волновым уравнениям и применимы к акустическому и оптическому рассеянию. Типичная физическая ситуация такова. Предположим, что неоднородная среда становится все более и более однородной при $x \to \infty$. Ввиду неоднородности среды распространение в ней акустических или оптических волн будет описываться линейным волновым уравнением с переменными коэффициентами. Если начальное возмущение обладает конечной энергией, то с ростом t волны будут расходиться на бесконечность. По мере своего распространения они будут все более и более похожи на решения соответствующих уравнений с постоянными коэффициентами. Таким образом, можно построить теорию рассеяния, которая свяжет решения уравнений с переменными коэффициентами и решения соответствующих уравнений с постоянными коэффициентами.

Основная идея этого раздела — сформулировать как однородное, так и неоднородное уравнения на языке гильбертовых пространств, с тем чтобы получить возможность пользоваться методами, развитыми в этой главе раньше. Это неизбежно приведет нас к задаче сравнения унитарных групп, действующих в двух *разных* гильбертовых пространствах. В следующем разделе мы опишем другой подход к этим же задачам, развитый Лаксом и Филлипсом. Для того чтобы объяснить, каким образом, возникают два гильбертовых пространства, начнем с примера.

Пример 1 (акустическое рассеяние в неоднородной среде). Распространение звуковых волн в однородной среде можно описать, задавая в каждый момент времени t функцию $u(x, t)$, равную разности между давлением в точке x в этот момент и равновесным давлением. Если линеаризовать нелинейные уравнения гидродинамики около равновесного давления, что служит хорошим приближением для малых u, то получится следующее волновое уравнение:

$$\begin{gathered} u_{tt}(x, t) = c_0^2 \Delta u(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = g(x), \end{gathered} \tag{186}$$

где f и g задаются начальным возмущением, а c_0 является скоростью распространения волн давления.

Далее, если среда, где распространяются волны, имеет изменяющуюся от точки к точке плотность $\rho(x)$, то давление будет подчиняться более сложному уравнению

$$u_{tt}(x,\ t)=c(x)^2\rho(x)\nabla\cdot\frac{1}{\rho(x)}\nabla u,\qquad u(x,\ 0)=f(x),\qquad u_t(x,\ 0)=g(x),\tag{187}$$

в котором скорость $c(x)$ будет также изменяться от точки к точке, поскольку таково поведение плотности. Предположим, что

$$c(x)\to c_0,\qquad \rho(x)\to\rho_0\tag{188}$$

при $|x|\to\infty$. Если эта сходимость достаточно быстрая, то нам, должно быть, удастся развить теорию рассеяния для уравнений (186), (187), поскольку естественно ожидать, что решения (187) распространяются на бесконечность, и когда они уходят достаточно далеко, то становятся очень похожими на решения (186).

Мы сформулируем оба уравнения как задачи в гильбертовом пространстве, используя идеи § X.13. Начнем со (186). Пусть $H_0=-c_0^2\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и $B_0=\sqrt{H_0}$. Обозначим через $[D(B_0)]$ замыкание $D(B_0)$ по норме $\|B_0u\|_2$. Отметим, что $[D(B_0)]$ содержит предельные элементы, которые не принадлежат $L^2(\mathbb{R}^3)$, поскольку $\sigma(B_0)$ содержит нуль. Пусть $\mathcal{H}_0$ — гильбертово пространство

$$\mathcal{H}_0=[D(B_0)]\oplus L^2(\mathbb{R}^3)$$

с нормой

$$\|\langle u,\ v\rangle\|^2=\|B_0u\|_2^2+\|v\|_2^2.$$

Введем

$$A_0=i\begin{pmatrix}0 & I\\ -B_0^2 & 0\end{pmatrix},\qquad D(A_0)=D(B_0^2)\oplus D(B_0),$$

где

$$D(B_0^2)=\{u\in[D(B_0)]\,|\,B_0u\in D(B_0)\},$$

причем и B_0, и его расширение на $[D(B_0)]$ обозначены через B_0. Ясно, что A_0 — самосопряженный оператор на $D(A_0)$, а (186) можно переписать следующим образом:

$$\varphi'(t)=-iA_0\varphi(t),\qquad \varphi(0)=\varphi_0\equiv\langle f,g\rangle,\tag{189}$$

введя $\mathcal{H}_0$-значную функцию $\varphi(t)=\langle u(t),u_t(t)\rangle$. Решение (189) будет иметь вид $\varphi(t)=W_0(t)\varphi_0$, где

$$W_0(t)=e^{-itA_0}=\begin{pmatrix}\cos B_0t & B_0^{-1}\sin B_0t\\ -B_0\sin B_0t & \cos B_0t\end{pmatrix},$$

причем матричные элементы определены в согласии с функциональным исчислением. Если $\varphi_0\in D(A_0)$, то $\varphi(t)$ сильно дифференцируема и удовлетворяет (189), откуда вытекает, что первая компонента $u(t)$ удовлетворяет (186). В дальнейшем будет удобно изменить внутреннее произведение в $L^2(\mathbb{R}^3)$ с помощью фиксированной константы.

Для того чтобы справиться с (187), предположим в дополнение к (188), что

$$0 < \rho_1 \leqslant \rho(x) \leqslant \rho_2 < \infty \quad \text{для всех} \quad x, \tag{190a}$$

$$0 < c_1 \leqslant c(x) \leqslant c_2 < \infty \quad \text{для всех} \quad x. \tag{190b}$$

Если ρ, кроме того, класса C^1, то

$$H_1 = -c(x)^2 \rho(x) \nabla \cdot \rho(x)^{-1} \nabla$$

— корректно определенный оператор на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Однако ясно, что из-за множителя $c(x)^2 \rho(x)$ он даже формально не симметричен относительно обычного L^2-произведения. Если же ввести $L^2_{\rho c}(\mathbb{R}^3)$ как $L^2(\mathbb{R}^3)$ с внутренним произведением

$$(f, g)_{\rho c} = (f, (c^2\rho)^{-1} g)_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

то относительно этого нового внутреннего произведения H_1 станет симметрическим на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Отметим, что, в силу (190a), $L^2_{\rho c}$ и L^2 совпадают как множества, а нормы, о которых мы говорим, эквивалентны. С H_1 на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subset L^2_{\rho c}$ связана квадратичная форма

$$q_1(f, g) = (f, H_1 g)_{\rho c} = (f, -\nabla \cdot \rho^{-1} \nabla g)_{L^2} = (\nabla f, \rho^{-1} \nabla g)_{L^2}.$$

Форма q_1 положительна и замыкаема в силу предположений (190a). Действительно, поскольку

$$\rho_2^{-1}(\nabla f, \nabla f)_2 \leqslant (\nabla f, \rho^{-1} \nabla f)_2 \leqslant \rho_1^{-1}(\nabla f, \nabla f), \tag{191}$$

замыкание q_1 имеет в качестве области определения $Q(-\Delta)$ Пусть H_1 — самосопряженный оператор в $L^2_{\rho c}$, отвечающий замыканию q_1 в силу теоремы VIII.15. Будем теперь действовать как прежде, определив B_1 как $\sqrt{H_1}$, $[D(B_1)]$ как замыкание $D(B_1)$ по норме $\|B_1 u\|_{\rho c}$, и положив

$$\mathscr{H}_1 = [D(B_1)] \oplus L^2_{\rho c}(\mathbb{R}^3),$$

$$A_1 = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -B_1^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В таком случае A_1 самосопряжен на $D(B_1^2) \oplus D(B_1)$ и порождает

$$W_1(t) = \begin{pmatrix} \cos B_1 t & B_1^{-1} \sin B_1 t \\ -B_1 \sin B_1 t & \cos B_1 t \end{pmatrix}.$$

Как и прежде, если $\varphi_0 \in D(A_1)$, то $u(t)$ — первая компонента пары $\varphi(t) = W_1(t)\varphi_0$ — удовлетворяет (187). Отметим, что проведенное построение H_1 не требует никакой регулярности ни от $c(x)$, ни от $\rho(x)$. Однако если обе эти функции гладкие, то и H_0, и H_1 самосопряжены в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (см. задачу 66).

Для того чтобы развить теорию рассеяния применительно к (187), нам нужно сравнить $W_1(t)$ на $\mathcal{H}_1$ с $W_0(t)$ на $\mathcal{H}_0$. Области определения B_0 и B_1 равны $Q(-\Delta)$, а в силу (191)

$$\rho_2^{-1}\|B_0u\|_2^2 \leqslant \|B_1u\|_{\rho c}^2 \leqslant \rho_1^{-1}\|B_0u\|_2^2, \tag{192}$$

так что $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ совпадают как множества, но снабжены разными (хотя и эквивалентными) внутренними произведениями. Если ограничиться рассмотрением только одного из них, то одна из двух групп не будет унитарной. Таким образом, мы оказываемся в ситуации, где естественно воспользоваться формализмом двух гильбертовых пространств, описанным в § 3.

Для изучения проблем такого типа дадим абстрактную формулировку. Пусть H_0 и H_1 — неотрицательные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$. Для простоты предположим, что ни H_0, ни H_1 не имеют точечного спектра в нуле; общий случай изучается в работах, указанных в Замечаниях. Мы хотим развить теорию рассеяния для двух уравнений

$$u_0''(t) = -H_0u_0(t),$$
$$u_1''(t) = -H_1u_1(t)$$

в случае, когда задан «естественный» унитарный оператор отождествления V: $\mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}_1$ Пусть $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ — гильбертовы пространства, построенные как в примере, т.е.

$$\mathcal{H}_0 = [D(B_0)] \oplus \mathcal{K}_0, \qquad \mathcal{H}_1 = [D(B_1)] \oplus \mathcal{K}_1,$$

где $B_k = \sqrt{H_k}$, и снабженные нормами

$$\|\langle u, v\rangle\|_0^2 = \|B_0u\|_{\mathcal{K}_0}^2 + \|v\|_{\mathcal{K}_0}^2, \qquad \|\langle u, v\rangle\|_1^2 = \|B_1u\|_{\mathcal{K}_1}^2 + \|v\|_{\mathcal{K}_1}^2.$$

Решения приведенных выше уравнений представимы в виде

$$\begin{pmatrix} u_k(t) \\ u_k'(t) \end{pmatrix} = W_k(t) \begin{pmatrix} u_k(0) \\ u_k'(0) \end{pmatrix},$$

где

$$W_k(t) = \begin{pmatrix} \cos B_k t & B_k^{-1}\sin B_k t \\ -B_k \sin B_k t & \cos B_k t \end{pmatrix}.$$

Как и в примере, будем обозначать генератор группы $W_k(t)$ через A_k.

Наш план состоит в том, чтобы свести вопрос о существовании и полноте волновых операторов для $W_0(t)$, $W_1(t)$ к тому же вопросу, но для $V^{-1}H_1V$ и H_0 на $\mathcal{K}_0$. Таким способом задача, сформулированная для двух гильбертовых пространств, сведется к задаче в одном гильбертовом пространстве, причем для операторов, похожих на операторы Шредингера, которые мы уже изучили. Дальше мы покажем, как можно действовать, оставаясь в рамках теории с двумя гильбертовыми пространствами и применяя теорему XI.13 (см. пример 1 (заново)). Мы пользуемся без дополнительных разъяснений обозначениями и терминологией теории рассеяния в двух гильбертовых пространствах, введенными в § 3.

Начнем с выбора оператора отождествления J пространства $\mathcal{H}_0$ с $\mathcal{H}_1$, математически удобного, но физически неестественного. Позднее мы покажем, что при определенных обстоятельствах, обычно реализующихся в приложениях, существуют более естественные операторы отождествления, которые (асимптотически A_0-) эквивалентны J. Определим $J\colon \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$ соотношением

$$J\colon \langle u, v\rangle \mapsto \langle B_1^{-1}VB_0u, Vv\rangle.$$

Теорема XI.75. Пусть $\mathcal{K}_k$, $\mathcal{H}_k$, H_k, B_k, A_k, $k=0,1$, и V и J таковы, как описано выше. Предположим, что существуют (соответственно существуют и полны) волновые операторы $\Omega^\pm(V^{-1}B_1V, B_0)$ на $\mathcal{K}_0$. Тогда существуют (соответственно существуют и полны) обобщенные волновые операторы $\Omega^\pm(A_1, A_0; J)$, которые суть частичные изометрии из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$ с начальным пространством $P_{ac}(A_0)\mathcal{H}_0$.

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned}\|J\langle u, v\rangle\|^2_{\mathcal{H}_1} &= \|B_1(B_1^{-1}VB_0)u\|^2_{\mathcal{K}_1} + \|Vv\|^2_{\mathcal{K}_1} = \\ &= \|B_0u\|^2_{\mathcal{K}_0} + \|v\|^2_{\mathcal{K}_0} = \|\langle u, v\rangle\|^2_{\mathcal{H}_0},\end{aligned}$$

J унитарен и, таким образом, $\Omega^\pm(A_1, A_0; J)$, когда они существуют, суть частичные изометрии. Доказательство основного утверждения теоремы опирается на факторизацию

$$\frac{d^2}{dt^2} + B^2 = \left(\frac{d}{dt} - iB\right)\left(\frac{d}{dt} + iB\right),$$

так что если u удовлетворяет уравнению $u'' = -B^2u$, то $f_\pm = u' \pm iBu$ удовлетворяют уравнениям $df_\pm/dt = \pm iBf_\pm$. Для уточнения разложения определим

$$T_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} B_k & i \\ B_k & -i\end{pmatrix}.$$

В таком случае, в силу тождества параллелограмма, T_k есть унитарное отображение $\mathcal{H}_k$ на $\mathcal{K}_k \oplus \mathcal{K}_k$ и

$$T_kA_kT_k^{-1} = \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & -B_k\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$T_kW_k(t)T_k^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-itB_k} & 0 \\ 0 & e^{iB_kt}\end{pmatrix} \equiv \tilde{W}_k(t).$$

Далее, перемножая матрицы, легко найти, что

$$T_1 J T_0^{-1} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \equiv \tilde{V}$$

в смысле отображений из $\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_0$ в $\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_1$. Более того, в силу задачи 112,

$$T_0 P_{ac}(A_0) = \begin{pmatrix} P_{ac}(B_0) & 0 \\ 0 & P_{ac}(B_0) \end{pmatrix} \equiv \tilde{P}_{ac}(B_0).$$

Далее, для $\varphi \in \mathcal{H}_0$

$$\begin{aligned} W_1(-t) J W_0(t) P_{ac}(A_0)\varphi &= T_1^{-1} \tilde{W}_1(-t) T_1 J T_0^{-1} \tilde{W}_0(t) T_0 P_{ac}(A_0)\varphi = \\ &= T_1^{-1} \tilde{W}_1(-t) \tilde{V} \tilde{W}_0(t) \tilde{P}_{ac}(B_0)\varphi = \\ &= (T_1^{-} \tilde{V})(\tilde{V}^{-1} \tilde{W}_1(-t)\tilde{V}) \tilde{W}_0(t) \tilde{P}_{ac}(B_0)\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\tilde{V}^{-1} \tilde{W}_1(-t) \tilde{V} = \begin{pmatrix} e^{itV^{-1}B_1V} & 0 \\ 0 & e^{-itV^{-1}B_1V} \end{pmatrix},$$

имеем

$$(\tilde{V}^{-1} \tilde{W}_1(-t)\tilde{V}) \tilde{W}_0(t) = \begin{pmatrix} e^{itV^{-1}B_1V} e^{-itB_0} & 0 \\ 0 & e^{-itV^{-1}B_1V} e^{itB_0} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} W_1(-t) J W_0(t) P_{ac}(A_0)\varphi$ существует для всех $\varphi \in \mathcal{H}_0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t \to \pm\infty} e^{itV^{-1}B_1V} e^{-itB_0} P_{ac}(B_0)\psi$ существует для всех $\psi \in \mathcal{K}_0$.

Поскольку оператор J унитарен, он обратим; J^{-1} автоматически является левым A_0-обратным оператора J, а J является левым A_1-обратным J^{-1}. Таким образом, согласно предложению 5 (с) § 3, для доказательства полноты $\Omega^\pm(A_1, A_0; J)$ достаточно доказать существование $\Omega^\pm(A_0, A_1; J^{-1})$. С помощью рассуждений, похожих на только что проведенные, это сводится к существованию пределов $\operatorname*{s-lim}\limits_{t \to \pm\infty} e^{itB_0} e^{-itV^{-1}B_1V} P_{ac}(V^{-1}B_1V)$, что в свою очередь, в силу предложения 3 § 3, эквивалентно полноте $\Omega^\pm(V^{-1}B_1V, B_0)$. ∎

Вышеприведенные рассуждения объясняют, почему J удобен в качестве оператора отождествления. Однако с физической точки зрения выбор J достаточно искусствен. Предположим, например, что $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ совпадают как множества и снабжены эквивалентными внутренними произведениями, что совпадают области определения квадратичных форм H_0 и H_1 и что

$$d_0 (u, H_0 u)_{\mathcal{K}_0} \leqslant (u, H_1 u)_{\mathcal{K}_1} \leqslant d_1 (u, H_0 u)_{\mathcal{K}_0}. \tag{193}$$

Эквивалентно,

$$d_0 \| B_0 u \|^2_{\mathcal{K}_0} \leqslant \| B_1 u \|^2_{\mathcal{K}_1} \leqslant d_1 \| B_0 u \|^2_{\mathcal{K}_0},$$

так что $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ совпадают как множества и снабжены эквивалентными внутренними произведениями. В такой ситуации (реализующейся, например, при акустическом рассеянии) естественно использовать в качестве оператора отождествления тождественный оператор I_{01}: $\mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$ и интересоваться вопросами существования и полноты операторов $\Omega^{\pm}(A_1, A_0; I_{01})$. Мы ввели символ I_{01} потому, что дальше будем рассматривать оператор I_{01}^{*}, не равный I_{10}. Предположим, что задан унитарный оператор V: $\mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}_1$ и что $\Omega^{\pm}(A_1, A_0; J)$ существуют, хотя бы в силу теоремы XI.75. Если J и I_{01} асимптотически A_0-эквивалентны, т. е. если

$$\lim_{t \to \pm\infty} (J - I_{01}) W_0(t) P_{ac}(A_0)\varphi = 0 \tag{194}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{H}_0$, то, согласно предложению 5(a) § 3, $\Omega^{\pm}(A_1, A_0; I_{01})$ существуют и равны $\Omega^{\pm}(A_1, A_0; J)$. Поскольку $J\langle u, v\rangle = \langle B_1^{-1} V B_0 u, Vv\rangle$, мы ожидаем, что (194) справедливо только тогда, когда V ведет себя B_0-асимптотически как тождественный оператор, а B_0 и B_1 асимптотически равны. Технически второе условие мы сформулируем в виде

$$\|(H_0 - V^{-1} H_1 V) e^{-itB_0} w\|_{\mathcal{K}_0} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty \tag{195}$$

для всех w из плотного множества $\mathcal{D} \subset D(H_0) \cap D(V^{-1}H_1V) \cap \cap P_{ac}(H_0)$, инвариантного относительно e^{itB_0}, B_0 и B_0^{-1}. Первое условие будет удовлетворено при выполнении требования

$$\|(I + V^{-1}H_1V)(V^{-1} - I) e^{-itB_0} w\|_{\mathcal{K}_0} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty \tag{196}$$

для всех $w \in \mathcal{D}$.

Теорема XI.76. Пусть $\mathcal{K}_k$, $\mathcal{H}_k$, H_k, B_k, A_k, $k = 0, 1$, V, J и I_{01} таковы, как описано выше. Предположим, что

(i) $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ совпадают как множества и снабжены эквивалентными внутренними произведениями;

(ii) $Q(H_0)$ и $Q(H_1)$ совпадают как множества и выполняется (193);

(iii) справедливы соотношения (195) и (196);

(iv) на $\mathcal{K}_0$ существуют волновые операторы $\Omega^{\pm}(V^{-1}B_1V, B_0)$.

Тогда выполняется (194) и, в частности, $\Omega^{\pm}(A_1, A_0; I_{01})$ существуют и равны $\Omega^{\pm}(A_1, A_0; J)$.

Доказательство. Пусть w_0 и w_1 лежат в $\mathcal{D}$. Положим $\varphi = \langle w_0, w_1\rangle$. Поскольку $\mathcal{D}$ плотно в $P_{ac}(H_0)$ и $(I_{01} - J) W_0(t)$ равномерно ограничены, (194) достаточно доказать для таких φ. Пусть $u_0(t)$

и $v_0(t)$ — компоненты $W_0(t)\varphi$. Тогда, поскольку $\varphi \in P_{ac}(A_0)$, имеем

$$\|(J-I_{01}) W_0(t) P_{ac}(A_0)\varphi\|^2_{\mathscr{H}_1} = \|B_1(B_1^{-1}VB_0 - I) u_0(t)\|^2_{\mathscr{K}_1} + \\ + \|(V-I) v_0(t)\|^2_{\mathscr{K}_1} = \|(B_0 - V^{-1}B_1) u_0(t)\|^2_{\mathscr{K}_0} + \|(I-V^{-1}) v_0(t)\|^2_{\mathscr{K}_0}.$$

Поскольку $v_0(t) = -B_0(\sin B_0 t) w_0 + (\cos B_0 t) w_1$ и $w_k \in \mathscr{D}$, условие (196) и положительность H_1 ведут к убыванию второго члена при $t \to \pm\infty$. Первый член можно оценить следующим образом:

$$\|(B_0 - V^{-1}B_1) u_0(t)\|_{\mathscr{K}_0} \leqslant \|(B_0 - V^{-1}B_1V) u_0(t)\|_{\mathscr{K}_0} + \\ + \|(V^{-1}B_1V)(I - V^{-1}) u_0(t)\|_{\mathscr{K}_0}.$$

Как и раньше, второй член стремится к нулю в силу (196). Для упрощения обозначений положим $B_1' = V^{-1}B_1V$, а $\Omega^\pm(B_1', B_0)$ обозначим просто через $\Omega^\pm$. Мы должны показать, что

$$\|(B_0 - B_1') e^{-itB_0} w\|_{\mathscr{K}_0} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty,$$

или, эквивалентно,

$$\left\| e^{itB_1'} (B_0 - B_1') e^{-itB_0} w \right\|_{\mathscr{K}_0} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty$$

для $w \in \mathscr{D}$. В силу (iv),

$$e^{itB_1'} B_0 e^{-itB_0} w \to \Omega^+ B_0 w \quad \text{при} \quad t \to -\infty.$$

Таким образом, учитывая соотношение $B_1'\Omega^+ w = \Omega^+ B_0 w$, можно получить требуемый результат при $t \to -\infty$, если доказать, что

$$e^{itB_1'} B_1' e^{-itB_0} w = B_1' e^{itB_1'} e^{-itB_0} w \to B_1'\Omega^+ w.$$

Возьмем $w \in \mathscr{D}$, воспользуемся равенством

$$\left\| B_1' e^{itB_1'} e^{-itB_0} w - B_1'\Omega^+ w \right\|^2_{\mathscr{K}_0} = \|B_1'\Omega^+ w\|^2_{\mathscr{K}_0} + \left\| B_1' e^{itB_1'} e^{-itB_0} w \right\|^2_{\mathscr{K}_0} - \\ - \left(B_1' e^{itB_1'} e^{-itB_0} w,\ B_1'\Omega^+ w \right)_{\mathscr{K}_0} - \left(B_1'\Omega^+ w,\ B_1' e^{itB_1'} e^{-itB_0} w \right)_{\mathscr{K}_0}$$

и перенесем B_1' в другую часть; тогда, как легко видеть, два последних члена сходятся к $-\|B_1'\Omega^+ w\|^2_{\mathscr{K}_0}$. Таким образом, стремление к нулю всего выражения в целом можно доказать, убедившись, что, например,

$$\lim_{t \to -\infty} \left\| B_1' e^{itB_1'} e^{-itB_0} w \right\|^2_{\mathscr{K}_0} \leqslant \|B_1'\Omega^+ w\|^2_{\mathscr{K}_0}.$$

Прямое вычисление дает

$$\overline{\lim_{t\to-\infty}}\,\|B_1'e^{itB_1'}e^{-itB_0}w\|^2_{\mathcal{K}_0}=\overline{\lim_{t\to-\infty}}\,(e^{-itB_0}w,\ H_1'e^{-itB_0}w)_{\mathcal{K}_0}=$$
$$=\overline{\lim_{t\to-\infty}}\,(e^{-itB_0}w,\ H_0e^{-itB_0}w)_{\mathcal{K}_0}=\|B_0w\|^2_{\mathcal{K}_0}=$$
$$=\|\Omega^+B_0w\|^2_{\mathcal{K}_0}=\|B_1'\Omega^+w\|^2_{\mathcal{K}_0}. \qquad (197)$$

На втором шаге мы использовали (195). Это доказывает (194) в случае $t\to-\infty$. Доказательство другого случая аналогично. ∎

Заметим, что во всех предположениях теорем XI.75, XI.76 фигурируют операторы H_0 и $H_1'=V^{-1}H_1V$ на $\mathcal{K}_0$. Таким образом, задача рассеяния, сформулированная в двух гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$, сводится к изучению рассеяния для двух самосопряженных операторов в одном гильбертовом пространстве $\mathcal{K}_0$. На самом деле, если несколько изменить точку зрения, можно переформулировать теоремы XI.75, XI.76, полностью избежав необходимости обращаться к теории рассеяния в двух гильбертовых пространствах. Действительно, если выполнены предположения (i) и (ii) теоремы XI.76, то $W_1(t)$ есть сильно непрерывная группа ограниченных операторов на $\mathcal{H}_0$ (в общем случае не унитарная). Предположения (iii) и (iv) дают условия на H_0 и $V^{-1}H_1V$ в $\mathcal{K}_0$, благодаря которым «волновые операторы»

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} W_1(-t)\,W_0(t)\,P_{ac}(A_0)$$

существуют на $\mathcal{H}_0$. А по теореме XI.75, если $\Omega^\pm(V^{-1}H_1V,\ H_0)$ полны, то эти волновые операторы полны как отображения из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_0$.

Пример 1 (продолжение). Применим доказанные теоремы к акустическому рассеянию. В дополнение к условиям (188) и (190) предположим, что $c(x)$ и $\rho(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции с ограниченными производными. В принципе эти условия гладкости могут быть отброшены; см. обсуждение в конце раздела. Введем $\mathcal{K}_0=L^2(\mathbb{R}^3)=\mathcal{K}_1$ с внутренними произведениями

$$(u,\ v)_{\mathcal{K}_0}=(c_0^2\rho_0)^{-1}(u,\ v)_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$
$$(u,\ v)_{\mathcal{K}_1}=(u,\ (c(x)^2\rho(x))^{-1}v)_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Операторы H_k, B_k, A_k остаются такими же, как в примере 1. В частности, $D(B_0)=D(B_1)$ и справедливо (193). В итоге оказываются выполненными условия (i) и (ii) теоремы XI.76, так что гильбертовы пространства $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$, построенные из $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ описанным выше способом, совпадают как множества, а заданные на них внутренние произведения эквивалентны. В качестве унитарного отображения $V\colon \mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}_1$ естественно взять

$$V\colon\ u(x) \mapsto [c(x)^2 \rho(x)/c_0^2\rho_0]^{1/2} u(x),$$

так что

$$V^{-1}H_1V = -[c(x)^2 \rho(x)]^{1/2} (\nabla \cdot \rho(x)^{-1} \nabla) [c(x)^2 \rho(x)]^{1/2}.$$

Для проверки (195) и (196) выберем в качестве $\mathcal{D}$ множество функций $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, фурье-образы которых имеют носители, отделенные от нуля. Заметим, что и $(H_0 - V^{-1}H_1V) e^{-itB_0}w$, и $(I + V^{-1}H_1V) \times (V^{-1} - I) e^{-itB_0}w$ можно записать в виде суммы членов вида $f(x) e^{\pm itB_0} P(D) w$, где $P(D)$ — дифференциальный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами, а $f(x)$ — произведение членов вида $\rho(x) - \rho_0$, $c(x) - c_0$, $\rho(x)$, ρ_0, $c(x)$, c_0, или их обратных, или квадратных корней из этих членов, или их производных до второго порядка. Более того, среди сомножителей всегда встречается хотя бы один член вида $\rho(x) - \rho_0$, $c(x) - c_0$, $D^\alpha \rho(x)$ или $D^\alpha c(x)$, где $0 \neq |\alpha| \leqslant 2$. Если $w \in \mathcal{D}$, то $e^{\pm itB_0} P(D) w$ представляет собой регулярный волновой пакет свободного волнового уравнения $(m = 0)$ в трехмерном пространстве, так что по теореме XI.18

$$\| e^{\pm itB_0} P(D) w \|_\infty \leqslant c/|t|.$$

Таким образом, если потребовать, чтобы $\rho(x) - \rho_0$, $c(x) - c_0$, $D^\alpha \rho(x)$, $D^\alpha c(x)$ при $0 \neq |\alpha| \leqslant 2$ лежали в $L^2(\mathbb{R}^3)$, то

$$\| f(x) e^{\pm itB_0} P(D) w \|_{\mathcal{K}_0} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty$$

для каждого из рассматриваемых членов, так что (195) и (196) выполняются. Другой не требующий обращения к методу стационарный фазы способ доказательства таков. Поскольку носитель $\hat{w}$ компактен, $E_{[-M,\,M]}(-\Delta) w = w$ при некотором M. Значит, если $\rho(x) - \rho_0$ и т. п. лежат в $L^2_\delta(\mathbb{R}^3)$ с некоторым $\delta > 3/2$, то $f(x) E_{[-M,\,M]}(-\Delta)$ есть оператор Гильберта—Шмидта и потому компактен. В таком случае сходимость к нулю доказывается с помощью леммы 2 § 3.

Остается исследовать, когда $\Omega^\pm(V^{-1}B_1V,\ B_0)$ существуют и полны. Сначала применим теорему XI.10 (теорему Бирмана) к $V^{-1}H_1V$ и H_0. Мы уже знаем, что $D(B_1) = D(B_0)$, и в силу условий, наложенных на $\rho(x)$ и $c(x)$, $Q(H_0) = Q(V^{-1}H_0V)$. Таким образом, $D(V^{-1}B_1V) = D(B_0)$, и поэтому $V^{-1}H_1V$ и H_0 взаимно подчинены. Более того,

$$H_0 - V^{-1}H_1V = (c(x)^2 - c_0^2)\,\Delta + h(x) \cdot \nabla + e(x),$$

где $h(x)$ и $e(x)$ — суммы функций вида $f(x)$, описанных выше. В итоге для каждого ограниченного интервала I

$$(H_0 - V^{-1}H_1V)\, E_I(H_0)$$

есть сумма операторов вида $f(x)\,g(-i\nabla)$, где g — произведение полинома и характеристической функции конечного интервала. Согласно теореме XI.21, оператор $f(x)\,g(-i\nabla)$ имеет конечный след, если $f\in L^2_\delta(\mathbb{R}^3)$ с некоторым $\delta>3/2$. Наконец, если след $(H_0-V^{-1}H_1V)\,E_I(H_0)$ конечен, то след $E_I(V^{-1}H_1V)(H_0-V^{-1}H_1V)\times\times E_I(H_0)$ автоматически конечен, поскольку $E_I(V^{-1}H_1V)$ ограничен, так что выполняются все условия теоремы Бирмана.

Мы доказали, что в случае, когда $c(x)^2-c_0^2$, $\rho(x)-\rho_0$, $D^\alpha\rho(x)$, $D^\alpha c(x)$ при $0\neq|\alpha|\leqslant 2$ лежат в $L^2_\delta(\mathbb{R}^3)$ с некоторым $\delta>3/2$, $\Omega^\pm(V^{-1}H_1V,\ H_0)$ существуют и полны. Поскольку $\sqrt{x}$ — допустимая функция, принцип инвариантности (теорема XI.11) позволяет утверждать существование и полноту $\Omega^\pm(V^{-1}B_1V,\ B_0)$. В итоге, применяя теоремы XI.75 и XI.76, получаем, что справедлива

Теорема XI.77. Предположим, что $c(x)$ и $\rho(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции с ограниченными производными, удовлетворяющие (188) и (190). Предположим, что $c(x)^2-c_0^2$, $\rho(x)-\rho_0$, $D^\alpha\rho(x)$, $D^\alpha c(x)$, $0\neq|\alpha|\leqslant 2$, лежат в $L^2_\delta(\mathbb{R}^3)$ с некоторым $\delta>3/2$. Тогда волновые операторы $\Omega^\pm(A_1,\ A_0;\ I_{01})$ системы (186), (187) существуют и полны.

Мы доказали полноту в смысле обобщенных волновых операторов. Можно доказать, что $\mathscr{H}_{ac}(A_1)=\mathscr{H}_1$, так что *каждое* решение (187) имеет в качестве асимптотики решение свободного уравнения. В дополнении к § 6 мы, по существу, доказали отсутствие у A_1 сингулярного спектра. В § XIII.13 мы докажем, что в спектре A_1 нет собственных значений.

Условия убывания, наложенные на $c(x)^2-c_0^2$, $\rho(x)-\rho_0$, $D^\alpha\rho(x)$, $D^\alpha c(x)$, не слишком жестки и выполняются в любой разумной физической системе. С другой стороны, условия гладкости значительно сужают область применимости теоремы, поскольку во многих задачах с неоднородными средами бывают скачки $\rho(x)$ или $c(x)$ при переходе от одной среды к другой К счастью, условия гладкости можно исключить.

Пример 1 (заново). Существование и полноту волновых операторов при акустическом рассеянии в неоднородной среде можно доказать прямо с помощью теоремы Белопольского — Бирмана (теорема XI.13). Возьмем $\mathscr{K}_k$, $\mathscr{H}_k$, A_k, B_k, H_k такими же, как и выше, и выберем I_{01} в качестве оператора отождествления из $\mathscr{H}_0$ в $\mathscr{H}_1$. Нам нужно проверить условия (a) — (d) теоремы XI.13. (a) очевидно. Поскольку $D(A_k)=D(B_k^2)\oplus D(B_k)$ и мы уже знаем, что $D(B_0)=D(B_1)$, для проверки (d$_1$) остается доказать, что $D(H_0)=D(H_1)$. Но V переводит $D(H_0)$ в себя, поэтому нужно убедиться лишь в том, что области определения $V^{-1}H_1V$ и H_0 в $\mathscr{K}_0$ одинаковы. Доказательство этого факта, в котором можно использовать симметричную форму теоремы Като—Реллиха (см. задачу 66), мы оставляем читателю.

Для проверки (b) мы хотим показать, что $(A_1-A_0)E_I(A_0)$ имеет конечный след как оператор из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$. Поскольку отождествление есть ограниченный оператор из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$, достаточно показать, что $(A_1-A_0)E_I(A_0)$ имеет конечный след как оператор на $\mathcal{H}_0$. Положим $C=B_0^2-B_1^2$, и пусть T_0—унитарное отображение $\mathcal{H}_0\to\mathcal{K}_0\oplus\mathcal{K}_0$, введенное при доказательстве теоремы XI.75. Тогда

$$T_0(A_1-A_0)E_I(A_0)T_0^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-CB_0^{-1} & -CB_0^{-1}\\ CB_0^{-1} & CB_0^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_I(B_0) & 0\\ 0 & E_I(B_0)\end{pmatrix}$$

на $\mathcal{K}_0\oplus\mathcal{K}_0=L^2(\mathbb{R}^3)\oplus L^2(\mathbb{R}^3)$. В силу того что ∇B_0^{-1}—ограниченный оператор, коммутирующий с $E_I(B_0)$, такое же доказательство, как в примере 1 (продолжение), показывает, что след оператора $\pm CB_0^{-1}E_I(B_0)$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$ конечен, если выполняются условия, наложенные на $c(x)$ и $\rho(x)$ в теореме XI.77. Таким образом, при этих же условиях справедливо и (b).

Наконец, проверим (c). Простая выкладка показывает, что I_{01}^*: $\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_0$ задается формулой

$$I_{01}^*\langle u,\ v\rangle=\langle-(c_0^2\rho_0)B_0^2\nabla\cdot\rho(x)^{-1}\nabla u,\ (c_0^2\rho_0/c(x)^2\rho(x))v\rangle.$$

Таким образом, можно написать

$$(I_{01}^*I_{01}-I_{00})\langle u,\ v\rangle=\langle Q_1u,\ Q_2v\rangle,$$

где

$$Q_1=-(c_0^2\rho_0)B_0^{-2}\nabla\cdot(1/\rho(x))\nabla-I,\qquad Q_2=(c_0^2\rho_0/c(x)^2\rho(x))-I.$$

Используя, как и выше, диагонализующее преобразование T_0, найдем, что

$$T_0(I_{01}^*I_{01}-I_{00})E_I(A_0)T_0^{-1}=$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}B_0Q_1B_0^{-1}+Q_2 & B_0Q_1B_0^{-1}-Q_2\\ B_0Q_1B_0^{-1}-Q_2 & B_0Q_1B_0^{-1}+Q_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_I(B_0) & 0\\ 0 & E_I(B_0)\end{pmatrix}.$$

В результате дело свелось к доказательству компактности $B_0Q_1B_0^{-1}E_I(B_0)$ и $Q_2E_I(B_0)$ как операторов в $L^2(\mathbb{R}^3)$. Для второго оператора это немедленно следует из условий теоремы XI.77 для $c(x)$ и $\rho(x)$. Что касается первого оператора, то заметим, что

$$B_0Q_1B_0^{-1}E_I(B_0)=-(c_0^2\rho_0)(B_0^{-1}\nabla)\cdot\left(\frac{1}{\rho(x)}-\frac{1}{\rho_0}\right)(\nabla B_0^{-1})E_I(B_0).$$

Поскольку $B_0^{-1}\nabla$ ограничен, а $(\rho(x)^{-1}-\rho_0^{-1})(\nabla B_0^{-1})E_I(B_0)$ в силу теоремы XI.21 имеет конечный след, след $B_0Q_1B_0^{-1}E_I(B_0)$ конечен и потому сам оператор компактен. В итоге мы заключаем, что $(I_{01}^*I_{01}-I_{00})E_I(A_0)$ компактен, если $\rho(x)$ удовлетворяет условиям теоремы XI.77.

Итак, условия (a) — (d_1) теоремы Белопольского — Бирмана проверены, и потому можно утверждать, что $\Omega^{\pm}(A_1, A_0; I)$ существуют и полны. Заметьте, что использование теоремы Белопольского — Бирмана не позволяет полностью обойтись без редукции к одному гильбертову пространству, поскольку к такой редукции мы вынуждены были прибегнуть при проверке условий теоремы. Избежать явного доказательства (195) и (196) нам позволили соображения компактности, которыми, впрочем, можно было бы воспользоваться и для проверки (195) и (196).

Пример 2 (оптическое рассеяние). Рассеяние электромагнитных волн в неоднородной среде происходит в соответствии с уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla\times E &= -\mu(x)\frac{\partial H}{\partial t}, & \nabla\times H &= \varepsilon(x)\frac{\partial E}{\partial t}, \\ \nabla\cdot(\varepsilon(x)E) &= 0, & \nabla\cdot(\mu(x)H) &= 0, \end{aligned} \tag{198}$$

где E и H — функции из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, представляющие электрическое и магнитное поля, $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ суть 3×3-матричнозначные функции на $\mathbb{R}^3$, представляющие диэлектрическую и магнитную проницаемости. Мы будем предполагать, что $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ класса C^2 с ограниченными производными; поскольку мы хотим, чтобы энергия

$$(E, H) = \int_{\mathbb{R}^3} [\overline{E(x)}\cdot\varepsilon(x)E(x) + \overline{H(x)}\cdot\mu(x)H(x)]\,dx$$

была положительна, будем считать, что

$$c_1 I \leqslant \varepsilon(x) \leqslant c_2 I, \qquad c_3 I \leqslant \mu(x) \leqslant c_4 I \tag{199}$$

для всех x и некоторых положительных постоянных c_i. Предположим, что существуют положительно определенные постоянные матрицы ε_0 и μ_0, такие, что

$$\varepsilon(x) \to \varepsilon_0, \qquad \mu(x) \to \mu_0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty.$$

В таком случае задача состоит в построении теории рассеяния для уравнений (198) в терминах свободных уравнений

$$\begin{aligned} \nabla\times E &= -\mu_0\frac{\partial H}{\partial t}, & \nabla\times H &= \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}, \\ \nabla\cdot(\varepsilon_0 E) &= 0, & \nabla\cdot(\mu_0 H) &= 0. \end{aligned} \tag{200}$$

Для того чтобы сделать это, перепишем (198) в виде уравнения второго порядка для E:

$$\ddot{E} = -\varepsilon^{-1}\nabla\times(\mu^{-1}(\nabla\times E)) \tag{201}$$

и аналогично поступим с (200). Далее, возьмем в качестве $\mathscr{K}_0$ и $\mathscr{K}_1$ пространство $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ с внутренними произведениями

$$(E, F)_{\mathscr{K}_0} = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{E(x)} \cdot \varepsilon_0 F(x)\, dx, \quad (E, F)_{\mathscr{K}_1} = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{E(x)} \cdot \varepsilon(x) F(x)\, dx.$$

Положим $Q = \{E \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \mid \nabla \times E \in L^2(\mathbb{R}^3)^3\}$. Определим квадратичные формы q_0 и q_1 на Q, полагая

$$q_0(E, F) = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \times E) \cdot \mu_0^{-1} (\nabla \times F)\, dx,$$

$$q_1(E, F) = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \times E) \cdot \mu(x)^{-1} (\nabla \times F)\, dx.$$

Им соответствуют положительные самосопряженные операторы в $\mathscr{K}_0$ и $\mathscr{K}_1$

$$H_0 E = -\varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mu_0^{-1} (\nabla \times E),$$
$$H_1 E = -\varepsilon(x)^{-1} \nabla \times \mu(x)^{-1} (\nabla \times E),$$

а квадратные корни из этих операторов благодаря (199) удовлетворяют (193). Наконец, определим V: $\mathscr{K}_0 \to \mathscr{K}_1$ соотношением

$$(VE)(x) = \varepsilon(x)^{-1/2} \varepsilon_0^{1/2} E.$$

В результате возникает ситуация, охватываемая почти во всем теоремами XI.75 и XI.76, кроме того, что теперь нуль принадлежит точечному спектру как H_0, так и H_1. Это не вызывает никаких трудностей с применением этих теорем, поскольку их легко обобщить на этот случай; см. ссылки в Замечаниях. Таким образом, как и в примере 1, задачу рассеяния можно свести к изучению H_0 и $V^{-1}H_1V$ в $\mathscr{K}_0$. Как и в примере 1, справедливы (195) и (196), поскольку $P_{ac}(H_0)$ проектирует на подпространство, не содержащее нулевых мод, и каждая компонента $e^{\pm itB_0} P_{ac}(B_0) w$ удовлетворяет свободному уравнению, а потому и условию

$$\| e^{\pm itB_0} P_{ac}(B_0) w \|_\infty < c/t.$$

С помощью этой оценки, метода стационарной фазы и метода Кука легко доказать существование волновых операторов $\Omega^\pm(V^{-1}H_1V, H_0)$. В таком случае существование $\Omega^\pm(A_1, A_0; I_{01})$ доказывается так же, как в примере 1.

Однако наличие нулевых мод вызывает трудности в доказательстве полноты, поскольку теперь больше нельзя ожидать, что след оператора $(V^{-1}H_1V - H_0) E_I(H_0)$ конечен, когда интервал I содержит нуль. Один из возможных способов преодоления этой трудности — доказать существование пределов

$$e^{itH_0} e^{-itV^{-1}H_1V} P_{ac}(V^{-1}H_1V) w$$

путем прямого применения метода Кука. Однако это весьма сложно, поскольку $e^{-itV^{-1}H_1V}P_{ac}(V^{-1}H_1V)w$ удовлетворяет волновому уравнению с переменными коэффициентами, и потому при получении различных оценок нельзя пользоваться преобразованием Фурье. Проблему нулевых мод можно обойти, действуя иначе. Определим операторы $\tilde{H}_k$ на $\mathcal{K}_k$ с помощью квадратичных форм

$$\tilde{q}_k(E, F) = q_k(E, F) + \int (\nabla\cdot\gamma_k E)\cdot(\nabla\cdot\gamma_k F)\,dx,$$

где $\gamma_0 = \varepsilon_0$ и $\gamma_1 = \varepsilon(x)$. Теперь конечность следа $(V^{-1}\tilde{H}_1V+1)^{-2} - (\tilde{H}_0+1)^{-2}$ можно доказать благодаря дополнительному члену, убирающему нулевые моды и превращающему $V^{-1}\tilde{H}_1V$ и $\tilde{H}_0$ в строго эллиптические операторы. Существование и полнота $\Omega^{\pm}(V^{-1}\tilde{H}_1V, \tilde{H}_0)$ в таком случае вытекают из следствия 2 теоремы XI.11. Наконец, элементарным образом можно показать, что существование $\Omega^{\pm}(V^{-1}\tilde{H}_1V, \tilde{H}_0)$ гарантирует существование $\Omega^{\pm}(V^{-1}H_1V, H_0)$. Причина этого в том, что динамические моды и нулевые моды в уравнениях Максвелла полностью независимы, и потому задание искусственной динамики для нулевой моды никак не отражается на динамических модах. Детали можно найти в работах, указанных в Замечаниях.

Пример 3 (рассеяние акустических волн препятствием). Пусть $\mathcal{O}$ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^3$ с границей Γ, имеющей нулевую меру, и связным дополнением. Тогда уравнение для акустических волн вне препятствия $\mathcal{O}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u = 0, && x\in\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O},\\ &\frac{\partial u}{\partial\hat{n}} = 0, && x\in\Gamma,\\ &u(x, 0) = f(x), && x\in\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O},\\ &u_t(x, 0) = g(x), && x\in\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O}, \end{aligned} \tag{202}$$

где u — разность между давлением в точке x в момент времени t и равновесным давлением. Граничные условия Неймана можно объяснить следующим образом. Градиент давления вызывает пропорциональный поток жидкости. Условие $\nabla u\cdot\hat{n} = 0$ на Γ как раз и утверждает отсутствие потока через Γ. При начальном возмущении $\langle f(x), g(x)\rangle$, заданном вне препятствия, решение уравнения (202) будет зависеть от геометрии препятствия, но для больших положительных и отрицательных времен волны должны уходить от препятствия на бесконечность. По мере того как все большая и большая часть энергии уходит от препятствия, решение (202) должно все более и более походить на решение уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ во всем $\mathbb{R}^3$. Таким образом, можно надеяться построить теорию рассеяния для уравнения (202) в терминах решений свободного волнового уравнения.

Мы можем выбрать одно и то же гильбертово пространство для H_0 и H_1 путем простой уловки: разрешив существование акустических возмущений внутри препятствия. Поскольку внутренность препятствия и внешнее пространство разделены, это не скажется на теории рассеяния. Пусть H_0 обозначает $-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$, и пусть H_1 — лапласиан Неймана H_N на $L^2(\mathbb{R}^3)$ с граничными условиями Неймана на Γ, определяемый в § XIII.15. В таком случае $\mathcal{K}_0 = L^2(\mathbb{R}^3) = \mathcal{K}_1$ и, в силу граничных условий, $Q(H_N) \supset Q(H_0)$. Далее, для $w \in Q(H_0)$

$$\| B_0 w \|_2^2 = \| B_N w \|_2^2. \tag{203}$$

Единственная трудность в применении абстрактной теории, развитой в теореме XI.75, состоит в том, что если Γ разделяет $\mathbb{R}^3$ на более чем одну связную компоненту, то B_1 имеет нулевое собственное значение: $H_N\varphi = 0$ и $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, если φ постоянно на одной из ограниченных связных компонент. С физической точки зрения эти собственные функции для задачи рассеяния не важны, поскольку они относятся к *внутренности* препятствия. Математически эту трудность можно обойти, обобщив теорему XI.75 так, чтобы допустить точечный спектр в нуле (см. ссылки в Замечаниях), или с помощью следующего простого приема. Переопределим H_N на каждой такой постоянной внутри области собственной функции так, чтобы $H_N\varphi = \varphi$. В предположении, что число связных внутренних компонент конечно, такое переопределение не изменит условий принадлежности классу операторов со следом, указанных ниже или доказываемых в дополнении. Переопределив таким способом H_N, можно применить теорию, развитую в этом разделе. В частности, в силу теоремы XI.75, $\Omega^\pm(A_N, A_0; J)$ существуют и полны как операторы из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$, если $\Omega^\pm(H_N, H_0)$ существуют и полны на $\mathcal{K}_0 = L^2(\mathbb{R}^3)$. Здесь $J\colon \langle u, v\rangle \longmapsto \langle B_N^{-1} B_0 u, v\rangle$. В дополнении показано, как убедиться в конечности следа оператора $(H_N+1)^{-2} - (H_0+1)^{-2}$, а значит, в силу следствия 3 теоремы XI.11, в существовании и полноте $\Omega^\pm(H_N, H_0)$.

Поскольку теперь (193) не справедливо, равенство $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1$ больше не выполняется. Однако благодаря включению $Q(H_0) \subset Q(H_N)$ и равенству (203) пространство $\mathcal{H}_0$ допускает естественное вложение в $\mathcal{H}_1$ в качестве подпространства. Поэтому в качестве оператора отождествления естественно взять это вложение. Заметим, что (193) нигде не использовалось при доказательстве теоремы XI.76, хотя оно нужно для равенства $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1$. Поскольку $V = I$, условие (196) выполняется автоматически, и ввиду (203) в условии (195) нет необходимости. Действительно, доказательство теоремы XI.76 проходит как и прежде, но основное равенство (197) теперь выполняется в силу (203), без ссылок на (193) и (195). Таким образом, $\Omega^{\pm}(A_{\mathrm{N}}, A_0; I)$ существуют и полны.

Случай рассеяния на препятствии с граничными условиями Дирихле физически менее интересен, но из-за того, что соответствующий результат о локальной компактности проще (см. дополнение), он является хорошим объектом для проверки различных подходов в теории рассеяния. Пусть $H_1 = H_{\mathrm{D}}$, где H_{D} — лапласиан Дирихле с границей Г, определяемый в § XIII.15. Тогда $Q(H_{\mathrm{D}}) \subset Q(H_0)$ и

$$\|B_0 w\|_2^2 = \|B_{\mathrm{D}} w\|_2^2 \tag{204}$$

для $w \in Q(H_{\mathrm{D}})$. Таким образом, ситуация похожа на то, что было, только теперь $Q(H_{\mathrm{D}}) \subset Q(H_0)$, тогда как при условиях Неймана $Q(H_{\mathrm{N}}) \supset Q(H_0)$. Таким образом, мы имеем дело с операторами, сопряженными к обычным волновым операторам. Теорема XI.75 показывает, что $\Omega^{\pm}(A_0, A_{\mathrm{D}}, J')$ существуют и полны как отображения из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_0$, если $\Omega^{\pm}(H_0, H_{\mathrm{D}})$ существуют и полны на $\mathcal{K}_1 = L^2(\mathbb{R}^3)$. Здесь J': $\langle u, v\rangle \longmapsto \langle B_0^{-1} B_{\mathrm{D}} u, v\rangle$. В дополнении показано, что след $(H_0+1)^{-2} - (H_{\mathrm{D}}+1)^{-2}$ конечен, так что, как и выше, существование и полнота $\Omega^{\pm}(H_0, H_{\mathrm{D}})$ вытекают из следствия 3 теоремы XI.11. Следуя той же идее, что и выше, заключение теоремы XI.76 можно автоматически вывести из (204), поэтому J' можно заменить вложением I_{10}, переводящим $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_0$. Тогда $\Omega^{\pm}(A_0, A_{\mathrm{D}}; I_{10})$ существуют и полны. Поскольку I_{10} — изометрия, I_{10}^* есть левый A_{D}-обратный к I_{10}. Таким образом, в силу предложения 5 (с) из § 3, $\Omega^{\pm}(A_{\mathrm{D}}, A_0; I_{10}^*)$ существуют и полны.

В итоге доказана следующая

Теорема XI.78. Пусть $\mathcal{O}$ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^3$ с границей Г.

(a) Если мера Г равна нулю, $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ обладает конечным числом связных компонент и Г удовлетворяет условиям регулярности теоремы XI.81, то волновые операторы для уравнения (202) с граничными условиями Неймана существуют и полны.

(b) Если мера Г равна нулю, то волновые операторы для уравнения (202) с граничными условиями Дирихле существуют и полны.

В примерах 1 и 2 коэффициенты, описывающие неоднородность, считались дважды непрерывно дифференцируемыми функциями пространственных переменных. Это очень жесткое ограничение, поскольку в большинстве физических задач происходит резкое изменение скорости распространения волн или плотности при переходе из одной среды в другую. К счастью, случай с негладкими коэффициентами можно описать без больших трудностей. Заметим, что в примере 1 при определении H_1 в $\mathcal{K}_1$ мы не пользовались гладкостью $\rho(x)$, точно так же никакие условия гладкости не использовались и при доказательстве абстрактных теорем. Единственное место, где условия гладкости были существенны,— это проверка конечности следа оператора $(V^{-1}H_1V - H_0)E_I(H_0)$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$; нужно было выразить $V^{-1}H_1V-H_0$ как сумму членов вида $f(x)P(D)$, чтобы иметь возможность применить теорему XI.21. П. Дейфт показал, как преодолеть эту трудность с помощью коммутационной формулы

$$\frac{\lambda}{BA+\lambda}+B\frac{1}{AB+\lambda}A=1. \tag{205}$$

Если A и B—ограниченные операторы на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то $\sigma(AB)\setminus\{0\}=\sigma(BA)\setminus\{0\}$ и для $-\lambda\notin\sigma(AB)\cup\{0\}$ (205) выполняется. В задаче 115 читателю предлагается провести полное доказательство этого факта. Более общо: если A—замкнутый оператор и $B=A^*$, то (205) выполняется для $-\lambda\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$. Для того чтобы понять, как (205) можно использовать, рассмотрим одномерный случай, когда обозначения наиболее просты. Тогда $H_1'=V^{-1}H_1V=-aDb^2Da$ и $H_0=D^2$, где $D=id/dx$ и a, b—функции от x, такие, что

$$0<a_0\leqslant a(x)\leqslant a_1,\qquad 0\leqslant b_0\leqslant b(x)\leqslant b_1$$

и $a(x)\to 1$, $b(x)\to 1$ достаточно быстро при $|x|\to\infty$. Как и в примере 1, определим H_1' следующим образом. Пусть Db^2D—самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R})$, отвечающий замыканию симметричной квадратичной формы $q(\varphi,\varphi)=(D\varphi, b^2D\varphi)_{L^2}$ на $C_0^\infty(\mathbb{R})\times C_0^\infty(\mathbb{R})$. Поскольку оператор умножения на a имеет ограниченный обратный, $H_1'=aDb^2Da$—корректно определенный самосопряженный оператор. Нам надо доказать, что след $\dfrac{1}{aDb^2Da+1}-\dfrac{1}{D^2+1}$ конечен. Используя формулу

$$\frac{1}{aDb^2Da+1}=a^{-1}\left(\frac{1}{Db^2D+a^{-2}}\right)a^{-1}$$

и свойства a, эту задачу легко свести к доказательству конечности следа $\dfrac{1}{Db^2D+1}-\dfrac{1}{D^2+1}$. Пусть A—оператор bD. В таком случае, ввиду того что Db^2D определялся с помощью квадратичных форм, $Db^2D=(bD)^*(bD)$ (см. § X.3), где bD обозначает операторное замыкание $bD\restriction C_0^\infty(\mathbb{R})$. Полагая $B=(bD)^*$ и применяя коммутационную формулу, получаем

$$\frac{1}{(bD)^*(bD)+1}=1-(bD)^*\left(\frac{1}{(bD)(bD)^*+1}\right)(bD)=1-D^*\left(\frac{1}{D^*D+b^{-2}}\right)D$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{Db^2D+1}-\frac{1}{D^2+1}=D^*\left(\frac{1}{D^*D+1}-\frac{1}{D^*D+b^{-2}}\right)D.$$

Таким образом, все сведено к изучению

$$\frac{1}{D^*D+1}-\frac{1}{D^*D+1+(b^{-2}-1)},$$

что может быть проделано с помощью обычных методов исследования возмущения $-d^2/dx^2$ некоторым потенциалом. По существу, коммутационная формула позволила «распутать» Db^2D и «вытащить» b наружу.

При изучении трехмерного случая (подробности см. в работах, указанных в Замечаниях) используются те же идеи, за двумя исключениями. Во-первых, $D=i\nabla$, и потому bD есть оператор из $L^2(\mathbb{R}^3)$ в $L^2(\mathbb{R}^3)^3$, а $(bD)^*$ — оператор из $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ и $L^2(\mathbb{R}^3)$. Поэтому необходимо обобщить коммутационную формулу на замкнутые операторы A из одного гильбертова пространства в другое и $B=A^*$. Кроме того, необходимо уметь обращаться с квадратами резольвент.

Если разрывы a и b лежат в компактном множестве, то при решении задачи можно применить прием, описанный в дополнении к § XI.11.

Дополнение к § XI.10. Свойства следов функций Грина

Пусть Γ — замкнутое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$ меры нуль. Пусть $H_0=-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а $H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$ и $H_{\Gamma;\,\mathrm{N}}$ суть $-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ с граничными условиями Дирихле и Неймана на Γ, определяемыми в § XIII.15. Пусть $R_0=(H_0+1)^{-1}$, $R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}=(H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}+1)^{-1}$, $R_{\Gamma;\,\mathrm{N}}=(H_{\Gamma;\,\mathrm{N}}+1)^{-1}$. В этом дополнении будет доказано, что при некоторых условиях на Γ при $n=3$ следы $R_0^2-R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}^2$ и $R_0^2-R_{\Gamma;\,\mathrm{N}}^2$ конечны. Похожий метод применим при $n\neq 3$, если R^2 заменить на R^m с $m>n/2$ (задача 116). Применения этих методов к рассеянию акустических волн препятствием описаны в примере 3 этого раздела.

Основные результаты таковы.

Теорема XI.79. Пусть Γ — произвольное замкнутое ограниченное подмножество нулевой меры в $\mathbb{R}^3$. Тогда след $R_0^2-R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}^2$ конечен.

Теорема XI.80. Пусть Γ — замкнутое ограниченное подмножество нулевой меры в $\mathbb{R}^3$. Пусть B — открытый шар, содержащий Γ, и пусть $\tilde{H}_{\partial B\cup\Gamma;\,\mathrm{N}}$ есть $-\Delta$ в $L^2(B)$ с граничными усло-