и, следовательно,

$$\frac{1}{Db^2D+1}-\frac{1}{D^2+1}=D^*\left(\frac{1}{D^*D+1}-\frac{1}{D^*D+b^{-2}}\right)D.$$

Таким образом, все сведено к изучению

$$\frac{1}{D^*D+1}-\frac{1}{D^*D+1+(b^{-2}-1)},$$

что может быть проделано с помощью обычных методов исследования возмущения $-d^2/dx^2$ некоторым потенциалом. По существу, коммутационная формула позволила «распутать» Db^2D и «вытащить» b наружу.

При изучении трехмерного случая (подробности см. в работах, указанных в Замечаниях) используются те же идеи, за двумя исключениями. Во-первых, $D=i\nabla$, и потому bD есть оператор из $L^2(\mathbb{R}^3)$ в $L^2(\mathbb{R}^3)^3$, а $(bD)^*$ — оператор из $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ и $L^2(\mathbb{R}^3)$. Поэтому необходимо обобщить коммутационную формулу на замкнутые операторы A из одного гильбертова пространства в другое и $B=A^*$. Кроме того, необходимо уметь обращаться с квадратами резольвент.

Если разрывы a и b лежат в компактном множестве, то при решении задачи можно применить прием, описанный в дополнении к § XI.11.

Дополнение к § XI.10. Свойства следов функций Грина

Пусть Γ — замкнутое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$ меры нуль. Пусть $H_0=-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а $H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$ и $H_{\Gamma;\,\mathrm{N}}$ суть $-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ с граничными условиями Дирихле и Неймана на Γ, определяемыми в § XIII.15. Пусть $R_0=(H_0+1)^{-1}$, $R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}=(H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}+1)^{-1}$, $R_{\Gamma;\,\mathrm{N}}=(H_{\Gamma;\,\mathrm{N}}+1)^{-1}$. В этом дополнении будет доказано, что при некоторых условиях на Γ при $n=3$ следы $R_0^2-R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}^2$ и $R_0^2-R_{\Gamma;\,\mathrm{N}}^2$ конечны. Похожий метод применим при $n\neq 3$, если R^2 заменить на R^m с $m>n/2$ (задача 116). Применения этих методов к рассеянию акустических волн препятствием описаны в примере 3 этого раздела.

Основные результаты таковы.

Теорема XI.79. Пусть Γ — произвольное замкнутое ограниченное подмножество нулевой меры в $\mathbb{R}^3$. Тогда след $R_0^2-R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}^2$ конечен.

Теорема XI.80. Пусть Γ — замкнутое ограниченное подмножество нулевой меры в $\mathbb{R}^3$. Пусть B — открытый шар, содержащий Γ, и пусть $\tilde{H}_{\partial B\cup\Gamma;\,\mathrm{N}}$ есть $-\Delta$ в $L^2(B)$ с граничными условиями Неймана на $\partial B \cup \Gamma$. Положим

$$\bar{R}_{\partial B \cup \Gamma;\, N} = (H_{\partial B \cup \Gamma;\, N} + 1)^{-1}$$

и предположим, что след $\bar{R}^2_{\partial B \cup \Gamma;\, N}$ конечен. Тогда след $R_0^2 - R^2_{\Gamma;\, N}$ конечен.

Заметим, что $R_0^2 - R^2_{\Gamma;\, D} \in \mathcal{I}_1$ при любых Γ, но в случае условий Неймана нужны ограничения на Γ. Следующий пример подтверждает необходимость таких ограничений.

Пример. Пусть Λ—объединение бесконечного множества попарно не пересекающихся шаров, имеющих все меньшие и меньшие радиусы и лежащих внутри единичного шара, и пусть $\Gamma = \partial\Lambda$. Тогда нуль является для $H_{\Gamma;\, N}$ собственным значением бесконечной кратности, а носители соответствующих собственных функций лежат в шаре. Если χ—оператор умножения на характеристическую функцию шара, то $\chi R^m_{\Gamma;\, N}$ не компактен ни при каком m. С другой стороны, оператор χR_0^m, в силу теоремы XI.21, компактен при любом $m \geqslant 2$, так что $R_0^m - R^m_{\Gamma;\, N}$ не компактен ни при каком m.

Конечно, теорема XI.80 не слишком полезна, если нет условий, гарантирующих конечность следа $\bar{R}^2_{\partial B \cup \Gamma;\, N}$. Но, к счастью, существуют весьма общие достаточные условия.

Определение. **Усеченный конус** в $x \in \mathbb{R}^n$ есть множество вида

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |y - x| < \varepsilon,\ (y - x)\cdot n > (1 - \delta)\,|y - x|\}$$

при некоторых ε, $\delta > 0$ и некотором единичном векто е n. Говорят, что открытое множество $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ с ограниченной границей обладает **ограниченным конусным свойством**, тогда и только тогда, когда существуют конечное открытое покрытие $U_1, \ldots, U_k$ границы $\partial\Lambda$ и усеченные конусы $C_1, \ldots, C_k$ в нуле, такие, что $C_i + x \subset \Lambda$, если $x \in U_i \cap \Lambda$.

Нетрудно видеть, что многогранники и множества с гладкой границей обладают ограниченным конусным свойством.

Теорема XI.81. Пусть Γ—замкнутое ограниченное множество нулевой меры в $\mathbb{R}^3$. Представим $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ в виде $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$, где Λ_1—неограниченная компонента, а Λ_2—объединение ограниченных компонент. Предположим, что Λ_1 и Λ_2 обладают ограниченным конусным свойством. Тогда для любого открытого шара, содержащего Γ, след $\bar{R}^2_{\partial B \cup \Gamma;\, N}$ конечен.

В этом дополнении мы доказываем теоремы XI.79 и 80 и даем набросок доказательства теоремы XI.81 для частного случая, когда Γ—объединение границ конечного числа звездных областей с гладкой границей. В общем случае теорема XI.81 доказывается совершенно другими методами (см. ссылки в Замечаниях).

При доказательстве теорем XI.79 и 80 нам понадобятся различные свойства R_0, $R_{\Gamma;\,D}$, $R_{\Gamma;\,N}$, устанавливаемые в гл. XIII или изложенными там методами. Приведем необходимые нам результаты.

Лемма 1. Пусть Γ фиксирована, и пусть B — фиксированный шар, содержащий Γ. Тогда:

(a) выполняются следующие операторные неравенства в $L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$R_{\Gamma;\,D}\leqslant R_0\leqslant R_{\Gamma;\,N}\leqslant R_{\partial B\cup\Gamma;\,N};$$

(b) при разложении $L^2(\mathbb{R}^3)$ в прямую сумму $L^2(B)\oplus L^2(\mathbb{R}^3\setminus B)$ справедливо представление $R_{\partial B\cup\Gamma;\,N}=\tilde{R}_{\partial B\cup\Gamma;\,N}\oplus R'$ с подходящей R';

(c) R_0, $R_{\Gamma;\,D}$, $R_{\Gamma;\,N}$ — сжатия $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ в себя.

Доказательство. (a) При подходящем значении символа $\leqslant$ применительно к неограниченным операторам справедливы неравенства $H_{\Gamma\cup\partial B;\,N}\leqslant H_{\Gamma;\,N}\leqslant H_0\leqslant H_{\Gamma;\,D}$ (см. предложение 4 в § XIII.15), с помощью которых (a) доказывается на основе общих соображений (задача 117).

(b) Это утверждение представляет собой в точности предложение 3 из § XIII.15.

(c) В силу второго критерия Бёрлинга — Дени (теорема XIII.51), $e^{-tH_{\Gamma;\,D}}$ есть сжатие на L^∞ (см пример 3 (заново) в дополнении 1 к § XIII.12), и потому это же справедливо для оператора $R_{\Gamma;\,D}$, представимого в виде

$$R_{\Gamma;\,D}=\int\limits_0^\infty e^{-t}e^{-tH_{\Gamma;\,D}}\,dt.$$

Аналогичное доказательство проходит для R_0 и для $R_{\Gamma;\,N}$. ∎

Лемма 2. Если $(1+x^2)(R_0-R_{\Gamma;\,D})(1+x^2)$ есть оператор Гильберта — Шмидта, то след $R_0^2-R_{\Gamma;\,D}^2$ конечен. Аналогично, если $(1+x^2)(R_0-R_{\Gamma;\,N})(1+x^2)$ — оператор Гильберта — Шмидта, то след $R_0^2-R_{\Gamma;\,N}^2$ конечен.

Доказательство. Запишем $R_0^2-R_{\Gamma;\,D}^2$ в виде

$$R_0^2-R_{\Gamma;\,D}^2=R_0(R_0-R_{\Gamma;\,D})+(R_0-R_{\Gamma;\,D})R_0-(R_0-R_{\Gamma;\,D})^2.$$

По теореме XI.21 или просто явным вычислением с помощью интегрального ядра $4\pi|x-y|^{-1}e^{-|x-y|}$ оператора R_0 получаем, что $R_0(1+x^2)^{-1}$ есть оператор Гильберта — Шмидта. Следовательно, для конечности следа $R_0^2-R_{\Gamma;\,D}^2$ достаточно, чтобы $(1+x^2)\times$

$\times(R_0 - R_{\Gamma;\,D})$ и $(R_0 - R_{\Gamma;\,D})$ были операторами Гильберта — Шмидта, а это вытекает из условий леммы. Случай граничных условий Неймана разбирается аналогично. ∎

Лемма 3. Пусть $K \geqslant 0$, а C и D — ограниченные операторы, такие, что $C + D = I$. Тогда K — оператор Гильберта — Шмидта в том и только том случае, когда C^*KC и D^*KD — операторы Гильберта — Шмидта. В частности, если χ — характеристическая функция ограниченного множества Ω и одновременно $\chi(R_0 - R_{\Gamma;\,D})\chi$ $(1 + x^2)(1 - \chi)(R_0 - R_{\Gamma;\,D})(1 - \chi)(1 + x^2)$, соответственно $\chi(R_{\Gamma;\,N} - R_0)\chi$ и $(1 + x^2)(1 - \chi)(R_{\Gamma;\,N} - R_0)(1 - \chi)(1 + x^2)$, суть операторы Гильберта — Шмидта, то след $R_0^2 - R_{\Gamma;\,D}^2$ (соответственно $R_0^2 - R_{\Gamma;\,N}^2$) конечен.

Доказательство. Для того чтобы K лежал в $\mathcal{I}_2$, необходимо и достаточно, чтобы $K^{1/2}$ лежал в $\mathcal{I}_4$. А это происходит тогда и только тогда, когда и $K^{1/2}C$, и $K^{1/2}D$ лежат в $\mathcal{I}_4$. Это доказывает первую часть леммы.

Вторая часть следует из первой части, леммы 2 и леммы 1 (a), из которой вытекает, что $R_{\Gamma;\,N} - R_0$ и $R_0 - R_{\Gamma;\,D}$ — неотрицательные операторы. ∎

$R_{\Gamma;\,D}$ задает билинейную форму на $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ по следующему правилу: $\langle\varphi, \psi\rangle \mapsto (\overline{\varphi}, R_{\Gamma;\,D}\psi)$, и потому, в силу теоремы о ядре (теорема V.12), существует обобщенная функция $G_{\Gamma;\,D}(x, y)$, называемая **функцией Грина задачи Дирихле**, такая, что

$$(\varphi, R_{\Gamma;\,D}\psi) = \int \overline{\varphi}(x)\, G_{\Gamma;\,D}(x, y)\, \psi(y)\, dx\, dy$$

для $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. **Функция Грина задачи Неймана** $G_{\Gamma;\,N}(x, y)$ и **свободная функция Грина** $G_0(x, y)$ определяются аналогично. Конечно,

$$G_0(x, y) = (4\pi)^{-1}|x - y|^{-1} e^{-|x-y|}.$$

Лемма 4. Пусть B — открытый шар, содержащий Γ. Тогда $G_{\Gamma;\,D} - G_0$ и $G_{\Gamma;\,N} - G_0$ бесконечно дифференцируемы на $(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B})$ и удовлетворяют неравенствам

$$|(G_{\Gamma;\,N} - G_0)(x, y)| \leqslant Ce^{-{}^1/_2|x| - {}^1/_2|y|}, \tag{206a}$$

$$|(G_{\Gamma;\,D} - G_0)(x, y)| \leqslant Ce^{-{}^1/_2|x| - {}^1/_2|y|}. \tag{206b}$$

В частности, если χ — характеристическая функция B, то

$$(1 + x^2)(1 - \chi)(R_0 - R_{\Gamma;\,D})(1 - \chi)(1 + x^2),$$
$$(1 + x^2)(1 - \chi)(R_{\Gamma;\,N} - R_0)(1 - \chi)(1 + x^2)$$

суть операторы Гильберта — Шмидта.

Доказательство. Мы рассмотрим задачу Неймана. Задача Дирихле рассматривается аналогично. Пусть $h, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$. Тогда $(H_{\Gamma;\,N}+1)\,h = (-\Delta+1)\,h$, так что

$$\iint \overline{[(-\Delta+1)\,h](x)}\,G_{\Gamma;\,N}(x, y)\,g(y)\,dx\,dy = \int \overline{h(x)}\,g(x)\,dx.$$

Следовательно, на $C_0^\infty((\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma))$

$$(-\Delta_x+1)\,G_{\Gamma;\,N}(x, y) = \delta(x-y)$$

в смысле обобщенных функций. Таким образом,

$$(-\Delta_x-\Delta_y+2)\,(G_{\Gamma;\,N}(x, y)-G_0(x, y)) = 0.$$

Из свойства эллиптической регулярности (теорема IX.25) вытекает, что $Q(x, y) \equiv G_{\Gamma,\,N}(x, y)-G_0(x, y)$ бесконечно дифференцируема на $(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$ и, в частности, на $(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B})$. Мы утверждаем, что для $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}$

$$Q(x, y) = \int\limits_{z \in \partial B} \left[\frac{\partial Q(z, y)}{\partial n_z}\,G_0(z, x) - Q(z, y)\,\frac{\partial G_0}{\partial n_z}(z, x)\right] d\Omega_z, \tag{207}$$

где $d\Omega$ — поверхностная мера на ∂B, а n_z — внешняя нормаль к B в точке z.

Пусть $\tilde{B}$ — шар достаточно большого радиуса, охватывающий ∂B, x, y. Тогда (207) с $\int\limits_{z \in \partial B}$ замененным на $\int\limits_{z \in \partial B} - \int\limits_{z \in \partial \tilde{B}}$, выводится из уравнений $(-\Delta_x+1)\,Q(x, y) = 0$, $(-\Delta_x+1)\,G_0(x, y) = \delta(x-y)$ с помощью стандартных рассуждений, использующих формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega} (h\,\Delta g - g\,\Delta h)\,dx = \int\limits_{d\Omega} (h\,\partial g/\partial n - g\,\partial h/\partial n)\,d\sigma.$$

Таким образом, формула (207) будет доказана, если убедиться, что интеграл по $\partial \tilde{B}$ стремится к нулю, когда $\partial \tilde{B}$ стремится к ∞. Требуется доказать даже более слабое утверждение, а именно: допустим, мы смогли доказать, что интеграл по $\partial \tilde{B}$ стремится к нулю при $r_0 \to \infty$ после интегрирования по y с некоторой $h \in C_0^\infty$ и интегрирования по радиусу $\partial \tilde{B}$ от r_0 до r_0+1; тогда, взяв интеграл по радиусу $\partial \tilde{B}$ с помощью формулы Грина и устремив r_0 к ∞, мы получим (207) с усредненным y. Выбрав затем h равной δ-функции, мы получим (207).

В интеграле по радиусу $\partial \tilde{B}$ можно проинтегрировать $\partial Q/\partial n_z$ по частям и получить остаточный член, куда будут входить только G_0, $\partial G_0/\partial n_z$ и Q (но не $\partial Q/\partial n_z$). Поскольку G_0 и $\partial G_0/\partial n_z$ экспоненциально убывают при $|x-z| \to \infty$, достаточно доказать ограниченность $\int Q(z, y)h(y)\,dy$ при $z\to\infty$. Но это следует из леммы 1 (с)! В результате (207) выполняется для границы ∂B любого шара, содержащего Γ.

Выберем шары B_1 и B_2 так, чтобы $\Gamma\subset B_1$, $\bar{B}_1\subset B_2$, $\bar{B}_2\subset B$. Теперь, поскольку Q бесконечно дифференцируема на $(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma)\times\times(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma)$, можно утверждать, что Q, $\nabla_x Q$, $\nabla_y Q$ и $\nabla_x\nabla_y Q$ равномерно ограничены на $\bar{B}_2\setminus B_1$ и потому, в силу (207) с B_1 вместо B, Q и $\nabla_y Q$ равномерно ограничены для $x\in\mathbb{R}^3\setminus B$ и $y\in B_2$. В силу симметрии Q, мы получаем равномерную ограниченность Q и $\nabla_x Q$ для $x\in B_2$ и $y\in\mathbb{R}^3\setminus B$. Используя (207) с B_2 вместо B, полученную равномерную ограниченность, экспоненциальное убывание G_0 и симметрию Q, получаем (206). ∎

Доказательство теоремы XI.79. Поскольку, в силу леммы 1 (а), $0\leqslant R_0-R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}\leqslant R_0$, достаточно доказать, что $\chi R_0\chi$ — оператор Гильберта — Шмидта; это позволит заключить, что $\chi(R_0-R_{\Gamma;\,\mathrm{D}})\chi\in\in\mathcal{I}_2$, и завершить доказательство ссылками на леммы 3 и 4. Но принадлежность $\chi R_0\chi$ идеалу $\mathcal{I}_2$ доказывается путем прямых вычислений на основе формулы для G_0 или с помощью теоремы XI.21.

Доказательство теоремы XI.80. В силу леммы 1 (а),

$$0\leqslant R_{\Gamma;\,\mathrm{N}}-R_0\leqslant R_{\Gamma;\,\mathrm{N}}\leqslant R_{\partial B\cup\Gamma;\,\mathrm{N}},$$

а по лемме 1 (b), $\chi R_{\partial B\cup\Gamma;\,\mathrm{N}}\chi=\tilde{R}_{\partial B\cup\Gamma;\,\mathrm{N}}\oplus 0$, где правая часть есть оператор Гильберта — Шмидта в силу предположений. В таком случае утверждение теоремы вытекает из лемм 3 и 4. ∎

Приведем теперь набросок доказательства теоремы XI.81 в частном случае, оставив подробности читателю.

Лемма 5. Пусть $\Omega\subset B\subset\mathbb{R}^3$ — открытый шар с центром в нуле. Пусть $\Gamma=\partial\Omega$, $S=\partial B$. Тогда $\tilde{R}_{\Gamma\cup S;\,\mathrm{N}}$ с граничными условиями Неймана на Γ и S есть оператор Гильберта — Шмидта в $L^2(B)$.

Доказательство. По лемме 1 (b), $\tilde{R}_{\Gamma\cup S;\,\mathrm{N}}=R_1\oplus R_2$ в соответствии с разложением $L^2(B)=L^2(\Omega)\oplus L^2(B\setminus\Omega)$. Рассмотрим подробнее R_1; анализ R_2 аналогичен. $\tilde{H}_{\Gamma;\,\mathrm{N}}$ есть прямая сумма $\bigoplus\limits_{l,m}\tilde{h}_{l,m}$ операторов, отвечающая разложению $L^2(B)=\bigoplus\tilde{\mathcal{H}}_{l,m}$, где $\tilde{\mathcal{H}}_{l,m}==\{\psi(r)Y_{l,m}(\theta,\varphi)\}$. Изоморфизм $\psi(r)Y_{l,m}\leftrightarrow r\varphi\equiv f$ переводит $\tilde{\mathcal{H}}_{l,m}$ в $L^2(0, a)$, где $a=\mathrm{rad}(\Omega)$, а $\tilde{h}_{l,m}$ — в

$$h_{l,m}=-d^2/dr^2+l(l+1)r^{-2},$$

с граничными условиями

$$f(0)=0,\qquad a^2(r^{-1}f)'(a)=af'(a)-f(a)=0.$$

Благодаря этому собственные функции $h_{0,0}$ можно найти явно, выразив их через тригонометрические функции, и убедиться, что n-е собственное значение удовлетворяет неравенству $E_{n,\,l=0} \geqslant C_1 n^2$. Поскольку $h_{l,\,m} \geqslant h_{0,\,0} + l(l+1)a^{-2}$, так что $E_{n,\,l} \geqslant C(n^2+l^2)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} (E_{n,\,l}+1)^{-2} \leqslant d_1 \int_0^{\infty} (x^2+l^2+1)^{-2}\,dx = d\,(l^2+1)^{-3/2},$$

и, значит,

$$\operatorname{Tr}(R_1^2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{n=0}^{\infty} (E_{n,\,l}+1)^{-2} < \infty. \blacksquare$$

Лемма 6. Пусть Γ_1 и Γ_2 — два замкнутых множества нулевой меры, лежащих внутри открытых в $\mathbb{R}^3$ множеств Ω_1 и Ω_2 соответственно. Пусть $S_i = \partial\Omega_i$. Предположим, что существует C^∞-диффеоморфизм F окрестности $\overline{\Omega}_1$ в окрестность $\overline{\Omega}_2$, такой, что $F[\Omega_1] = \Omega_2$ и $F[\Gamma_1] = \Gamma_2$. Тогда $\tilde{R}_{\Gamma_1 \cup S_1;\,N}$ есть оператор Гильберта — Шмидта в том и только том случае, когда $\tilde{R}_{\Gamma_2 \cup S_2;\,N}$ — оператор Гильберта — Шмидта.

Доказательство. Рассмотрим унитарное отображение U: $L^2(\Omega_2, d^3x) \to L^2(\Omega_1, d^3x)$, заданное формулой

$$(Uf)(x) = (G^{1/2} f)(Fx),$$

где $G = \det\{J_{ij}\}$ и $\{J_{ij}\} = \{\partial F_i(x)/\partial x_j\}$. Тогда

$$U\tilde{H}_{\Gamma_2 \cup S_2;\,N}\,U^{-1} = H',$$

где H' как форма имеет ту же область определения, что и $\tilde{H}_{\Gamma_1 \cup S_1;\,N}$, и

$$(f, H'f) = \int_{\Omega_1} \sum_i \left| \sum_j (J^{-1})_{ij} \frac{\partial (G^{1/2} f)}{\partial x_j} \right|^2 d^3x \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \int_{\Omega_1} \left(\sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 + |f|^2 \right) d^3x =$$
$$= C_1 (f, (H_{\Gamma_1 \cup S_1;\,N} + 1) f).$$

Отсюда следует (задача 117) неравенство

$$\tilde{R}_{\Gamma_1 \cup S_1;\,N} \leqslant C_2 (H'+1)^{-1},$$

так что $\tilde{R}_{\Gamma_1 \cup S_1;\,N}$ есть оператор Гильберта — Шмидта, если таков $(H'+1)^{-1}$. Поскольку H' унитарно эквивалентен $\tilde{H}_{\Gamma_2 \cup S_2;\,N}$, мы видим, что $\tilde{R}_{\Gamma_1 \cup S_1;\,N} \in \mathcal{I}_2$, если $\tilde{R}_{\Gamma_2 \cup S_2;\,N} \in \mathcal{I}_2$. Обратное утверждение справедливо в силу симметрии предположений и утверждения леммы. $\blacksquare$

Определение. Открытое множество Ω в $\mathbb{R}^3$ называется **звездным относительно точки** $x_0 \in \Omega$, если для любого единичного вектора n и некоторого $a_n > 0$ справедливо равенство $\Omega \cap \{x_0 + tn \mid t \in [0, \infty)\} = \{x_0 + tn \mid t \in [0, a_n)\}$. Если a_n — бесконечно дифференцируемая функция n, то говорят, что Ω имеет **гладкую границу.**

Лемма 7. Пусть Γ_1 — граница открытого множества D_1, звездного относительно точки x_0 и имеющего гладкую границу. Пусть

$$\Omega_1 = \{y \mid x_0 + (1+\varepsilon)^{-1}(y - x_0) \in D_1\}$$

для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$. Тогда существует C^∞-диффеоморфизм F окрестности множества $\overline{\Omega} \supset D_1$ на окрестность некоторого шара $\overline{\Omega}_2$, такой, что $F[\Omega_1] = \Omega_2$, а $\Gamma_2 \equiv F[\Gamma_1]$ — граница некоторой сферы в Ω_2, концентрической с Ω_2. В частности, $\tilde{R}_{\Gamma_1 \cup S_1;\, \mathrm{N}}$ — оператор Гильберта — Шмидта.

Доказательство. Полагаем $F(x) = (x - x_0)\, a_{n(x)}^{-1}$, где $n(x) = (x - x_0)/|x - x_0|$. ∎

Наконец мы готовы к доказательству некоторого частного случая теоремы XI.81.

Теорема XI.81′. Пусть Γ — объединение конечного числа попарно не пересекающихся множеств $\{\Gamma_j\}_{j=1}^k$, каждое из которых есть гладкая граница открытого ограниченного звездного множества Ω_j. Пусть B — любой открытый шар, содержащий Γ, и $S = \partial B$. Тогда $\tilde{R}_{\Gamma \cup S;\, \mathrm{N}}$ — оператор Гильберта — Шмидта.

Доказательство. Пусть x_j — точка, относительно которой звездно множество Ω_j. Пусть S_j — множество, полученное небольшим растяжением Γ_j относительно x_j. Это можно сделать так, чтобы все S_j попарно не пересекались и лежали внутри B. Пусть S' сфера, концентрическая с S, меньшая S и охватывающая все S_i (рис. XI.13). Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_k$ — характеристические функции областей, окруженных поверхностями S_j, $j = 1, \ldots, k$. Пусть χ_{k+1} — характеристическая функция слоя между S и S', а χ_0 — характеристическая функция остальной части шара B, так что $\sum_{j=0}^{k+1} \chi_j \equiv 1$ на B. Тогда, по обобщению леммы 3, достаточно доказать, что $\chi_j \tilde{R}_{\Gamma \cup S;\, \mathrm{N}} \chi_j$ — оператор Гильберта — Шмидта для каждого $j = 0, 1, \ldots, k+1$. Случай $j = 0$ тривиален, ибо, по лемме 4, разность

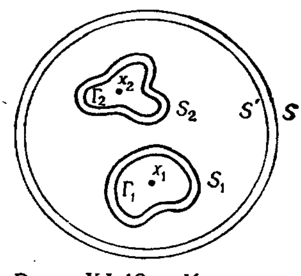

Рис. XI.13. Множества S_i и S.

$G_{\Gamma \cup S;\, N}(x, y) - G_0(x, y)$ бесконечно дифференцируема на $\overline{\operatorname{supp} \chi_0} \times \times \operatorname{supp} \chi_0$ и $\chi_0(x) G_0(x, y) \chi_0(y)$ — ядро оператора Гильберта — Шмидта. Для $j = 1, \ldots, k$

$$\chi_j \tilde{R}_{\Gamma \cup S;\, N} \chi_j \leqslant \chi_j \tilde{R}_{\Gamma \cup S_j \cup S;\, N} \chi_j = \bar{R}_{\Gamma_j \cup S_j;\, N} \oplus 0$$

в силу пунктов (a), (b) леммы 1. По лемме 7, $\tilde{R}_{\Gamma_j \cup S_j;\, N} \in \mathfrak{I}_2$, так что и $\chi_j \tilde{R}_{\Gamma \cup S;\, N} \chi_j \in \mathfrak{I}_2$. Случай $j = k+1$ аналогичен. ∎

XI.11. Оптическое и акустическое рассеяние II: метод Лакса — Филлипса

В этом разделе мы описываем другой подход в теории рассеяния, развитый Лаксом и Филлипсом. Его особенность в том, что основным объектом изучения становятся определенные семейства подпространств гильбертова пространства, описывающего динамику взаимодействия. Как мы увидим, этот подход наиболее естествен в применениях к классическим волновым уравнениям, удовлетворяющим принципу Гюйгенса, а не в квантовой механике, где волновые уравнения обладают дисперсией и имеют бесконечную скорость распространения возмущений. Однако с помощью принципа инвариантности волновых операторов его можно применять и в некоторых квантовомеханических задачах (см. пример 5).

Наиболее красивая и важная черта подхода Лакса — Филлипса состоит в том, что в нем естественным образом проявляются определенные аналитические свойства оператора рассеяния. Когда группа операторов, описывающая взаимодействие, удовлетворяет основным предположениям теории, гильбертово пространство теории $\mathscr{H}$ оказывается унитарно эквивалентным $L^2(\mathbb{R}; N)$, где N — некоторое вспомогательное гильбертово пространство. При такой реализации $\mathscr{H}$ оператор рассеяния действует как оператор умножения на $\mathscr{L}(N)$-значную функцию $s(\sigma)$, которая почти всюду унитарна и является граничным значением аналитической $\mathscr{L}(N)$-значной функции $s(z)$ в верхней полуплоскости. В типичных случаях $s(z)$ можно продолжить в нижнюю полуплоскость как мероморфную функцию, полюсы которой тесно связаны с геометрией рассеяния и физической интерпретацией теории. Мы уже встречались с примерами таких продолжений в § 7, 8 и в дополнении к § 6.

Полное изложение теории Лакса — Филлипса выходит за рамки этого раздела. Мы хотим лишь доказать несколько основных теорем, с тем чтобы прояснить структуру теории и источник упомянутых свойств аналитичности. Затем мы приведем ряд примеров, с тем чтобы показать, как на практике проверяют усло-