$G_{\Gamma\cup S;\,N}(x, y) - G_0(x, y)$ бесконечно дифференцируема на $\overline{\operatorname{supp}\chi_0} \times \times \overline{\operatorname{supp}\chi_0}$ и $\chi_0(x) G_0(x, y) \chi_0(y)$ — ядро оператора Гильберта — Шмидта. Для $j = 1, \ldots, k$

$$\chi_j \tilde{R}_{\Gamma\cup S;\,N} \chi_j \leqslant \chi_j \tilde{R}_{\Gamma\cup S_j \cup S;\,N} \chi_j = \tilde{R}_{\Gamma_j\cup S_j;\,N} \oplus 0$$

в силу пунктов (а), (b) леммы 1. По лемме 7, $\tilde{R}_{\Gamma_j\cup S_j;\,N} \in \mathfrak{I}_2$, так что и $\chi_j \tilde{R}_{\Gamma\cup S;\,N} \chi_j \in \mathfrak{I}_2$. Случай $j = k+1$ аналогичен. ∎

XI.11. Оптическое и акустическое рассеяние II: метод Лакса — Филлипса

В этом разделе мы описываем другой подход в теории рассеяния, развитый Лаксом и Филлипсом. Его особенность в том, что основным объектом изучения становятся определенные семейства подпространств гильбертова пространства, описывающего динамику взаимодействия. Как мы увидим, этот подход наиболее естествен в применениях к классическим волновым уравнениям, удовлетворяющим принципу Гюйгенса, а не в квантовой механике, где волновые уравнения обладают дисперсией и имеют бесконечную скорость распространения возмущений. Однако с помощью принципа инвариантности волновых операторов его можно применять и в некоторых квантовомеханических задачах (см. пример 5).

Наиболее красивая и важная черта подхода Лакса — Филлипса состоит в том, что в нем естественным образом проявляются определенные аналитические свойства оператора рассеяния. Когда группа операторов, описывающая взаимодействие, удовлетворяет основным предположениям теории, гильбертово пространство теории $\mathcal{H}$ оказывается унитарно эквивалентным $L^2(\mathbb{R}; N)$, где N — некоторое вспомогательное гильбертово пространство. При такой реализации $\mathcal{H}$ оператор рассеяния действует как оператор умножения на $\mathcal{L}(N)$-значную функцию $s(\sigma)$, которая почти всюду унитарна и является граничным значением аналитической $\mathcal{L}(N)$-значной функции $s(z)$ в верхней полуплоскости. В типичных случаях $s(z)$ можно продолжить в нижнюю полуплоскость как мероморфную функцию, полюсы которой тесно связаны с геометрией рассеяния и физической интерпретацией теории. Мы уже встречались с примерами таких продолжений в § 7, 8 и в дополнении к § 6.

Полное изложение теории Лакса — Филлипса выходит за рамки этого раздела. Мы хотим лишь доказать несколько основных теорем, с тем чтобы прояснить структуру теории и источник упомянутых свойств аналитичности. Затем мы приведем ряд примеров, с тем чтобы показать, как на практике проверяют условия этих теорем. Подробности и многочисленные применения можно найти в ссылках, обсуждаемых в Замечаниях.

Основная идея, формулируемая и развиваемая в теории Лакса — Филлипса, — это идея приходящих и уходящих подпространств.

Определение. Пусть $U(t)$ — сильно непрерывная унитарная группа на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Замкнутое подпространство $D_+ \subset \mathcal{H}$ называется **уходящим,** если

(i) $U(t)[D_+] \subset D_+$ при $t \geqslant 0$;

(ii) $\bigcap\limits_t U(t)[D_+] = \{0\}$;

(iii) $\overline{\bigcup\limits_t U(t)[D_+]} = \mathcal{H}$.

Аналогично, если D_- удовлетворяет (ii), (iii) и

(i′) $U(t)[D_-] \subset D_-$ при $t \leqslant 0$,

то D_- называют **приходящим** подпространством.

Такая терминология естественно возникает в применениях общей теории Например, в гильбертовом пространстве свободного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ (см. пример 1) D_+ есть в точности множество начальных данных, таких, что решение $u(x, t)$ обращается в нуль при $|x| \leqslant t$, т е., говоря физически, таких, что волны в далеком будущем уходят на бесконечность Аналогично, D_- есть множество начальных данных, таких, что $u(x, t)$ обращается в нуль при $|x| \leqslant -t$. Такие решения отвечают волнам, сходящимся из далекого прошлого.

Пример уходящего подпространства можно построить следующим образом. Пусть N — гильбертово пространство, и пусть $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}; N)$. Определим $U(t)$ как сдвиг вправо на t единиц, т. е. $(U(t)f)(s) = f(s-t)$ Тогда

$$D_+ = L^2(0, \infty; N) \equiv \{f \in L^2(\mathbb{R}, N) \mid f(s) = 0 \text{ при } s < 0\}$$

— уходящее подпространство. Основная структурная теорема этого раздела утверждает, что на самом деле все уходящие подпространства, по существу, имеют такой вид.

Теорема XI.82. Пусть $U(t)$ — сильно непрерывная унитарная группа на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и D_+ — уходящее подпространство для $U(t)$. Тогда существуют вспомогательное гильбертово пространство N и унитарное отображение $\mathcal{R}_+$ пространства $\mathcal{H}$ на $L^2(\mathbb{R}; N)$, такие, что $\mathcal{R}_+[D_+] = L^2(0, \infty; N)$, а $U_+(t) \equiv \mathcal{R}_+ U(t) \mathcal{R}_+^{-1}$ есть сдвиг вправо на t единиц. Аналогично, если D_- — приходящее подпространство, то существует унитарное отображение $\mathcal{R}_-$ на $L^2(\mathbb{R}; N')$, такое, что $\mathcal{R}_-[D_-] = L^2(-\infty, 0; N')$ и $U_-(t) \equiv \mathcal{R}_- U(t) \mathcal{R}_-^{-1}$ есть сдвиг вправо на t единиц. Если $U(t)$ имеет одновременно и уходящее, и приходящее подпространства, то N и N' можно выбрать одинаковыми, хотя $\mathcal{R}_+$ может отличаться от $\mathcal{R}_-$. Описанные представления единственны с точностью до изоморфизмов N

$U_+(t)$, $L^2(0, \infty; N)$ и $L^2(\mathbb{R}; N)$ называются **уходящим трансляционным представлением** группы $U(t)$, подпространства D_+ и пространства $\mathcal{H}$. Аналогично, $U_-(t)$, $L^2(-\infty, 0; N)$ и $L^2(\mathbb{R}; N)$ называются **приходящим трансляционным представлением** $U(t)$, D_- и $\mathcal{H}$.

Перед тем как приступить к доказательству теоремы, сделаем несколько замечаний. Прежде всего, если $U(t)$ обладает приходящим и уходящим подпространствами, оператор рассеяния можно построить следующим образом Пусть $\varphi_- = \mathcal{R}_-\varphi$, $\varphi_+ = \mathcal{R}_+\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{H}$. Определим $\tilde{S}$ как отображение $\tilde{S}$: $\varphi_- \mapsto \varphi_+$, т. е. $\tilde{S} = \mathcal{R}_+\mathcal{R}_-^{-1}$ есть унитарное отображение $L^2(\mathbb{R}; N)$ в себя. Отображение S определяется переводом этого оператора обратно в $\mathcal{H}$:

$$S \equiv \mathcal{R}_-^{-1}(\mathcal{R}_+\mathcal{R}_-^{-1})\mathcal{R}_- = \mathcal{R}_-^{-1}\mathcal{R}_+$$

Наконец, пусть $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье, унитарное отображение $L^2(\mathbb{R}; N)$ в себя. Введем

$$\hat{S} \equiv \mathcal{F}\tilde{S}\mathcal{F}^{-1}.$$

Операторы S, $\hat{S}$ и $\tilde{S}$ попарно унитарно эквивалентны, и потому каждый из них мы будем называть **оператором рассеяния**, различая используемые представления значками $\hat{}$ и $\tilde{}$. Поскольку $\mathcal{R}_\pm U(t) = U_\pm(t)\mathcal{R}_\pm$ и $U_+(t) = U_-(t)$, оператор S коммутирует с $U(t)$. Оператор $\tilde{S}$ коммутирует со сдвигами и потому, грубо говоря, должен задаваться операцией свертки с некоторой $\mathcal{L}(N)$-значной функцией τ на $\mathbb{R}$, так что $\hat{S}$ должен задаваться операцией умножения на операторнозначную функцию $s = (2\pi)^{1/2}\hat{\tau}$. Если дополнительно предположить, что $D_- \subset D_+^\perp$, то $\tilde{S}$ будет переводить $L^2(-\infty, 0; N)$ в себя, так что носитель τ должен лежать в $(-\infty, 0]$. Тогда, по теореме Пэли — Винера, s имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость. Это и приведет к аналитическим свойствам, о которых говорилось в начале этого раздела (подробности приведены в теореме XI.89 и ее следствиях).

Подчеркнем, что данное сейчас определение оператора рассеяния не требовало никаких ссылок на свободную динамику. Но практически уходящие и приходящие подпространства строятся с помощью свободной динамики, так что $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ оказываются унитарно эквивалентными обычным волновым операторам. Подробнее это обсуждается ниже. Однако описанное построение оператора рассеяния открывает возможность определения S и в тех случаях, когда нет «естественного» кандидата на роль свободной системы, или в случаях, когда сходимость полного решения к свободному решению при $t \to \pm\infty$ столь медленна, что обычное построение волновых операторов не проходит. Подчеркнем, однако, что описанное построение все-таки зависит не только от группы $U(t)$, задающей динамику взаимодействия. Например, если уходящее трансляционное представление $\mathcal{H}$ задано в виде $L^2(-\infty, \infty; N)$, то в качестве $\bar{D}_-$ можно взять $\mathcal{R}_+^{-1}[L^2(-\infty, 0; N)]$. Для пары D_+, $\bar{D}_-$ S-матрица будет единичной. Обычно дополнительные соображения, диктующие правильный выбор D_+ и D_-, связаны с геометрией задачи.

Одно из ограничений, внутренне присущих теории в том виде, как она описана, очевидно из самой теоремы XI.82. Существование уходящего или приходящего трансляционного представления для группы $U(t)$ предполагает, что ее генератор H имеет абсолютно непрерывный спектр, заполняющий всю вещественную ось с однородной кратностью. Это, однако, не запрещает применения теории в задачах квантовой механики (см. пример 5).

В качестве подготовки к доказательству теоремы XI.82 мы сначала докажем ее дискретный аналог.

Теорема XI.83. Пусть V — унитарный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть D_+ — замкнутое подпространство $\mathcal{H}$, такое, что

(i) $V[D_+] \subset D_+$;

(ii) $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{Z}} V^k[D_+] = \{0\}$;

(iii) $\overline{\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} V^k[D_+]} = \mathcal{H}$.

Тогда существуют гильбертово пространство N и унитарное отображение r_+ пространства $\mathcal{H}$ на $l_2(-\infty, \infty; N)$, такие, что

$$r_+[D_+] = \{f \mid f(n) = 0, \ n < 0\} \equiv l_2[0, \infty; N)$$

и $\bar{V} = r_+ V r_+^{-1}$ есть сдвиг вправо. Такое представление единственно с точностью до изоморфизмов N.

Доказательство. Мы докажем существование r_+, оставив доказательство единственности читателю (задача 121). Пусть $N = D_+ \cap (V[D_+])^\perp$; N — замкнутое подпространство $\mathcal{H}$. Поскольку V унитарен,

$$VN = VD_+ \cap V^2 D_+^\perp \subset VD_+ \subset N^\perp,$$

так что можно образовать прямую сумму $N \oplus VN$. Поскольку $N \oplus VD_+ = D_+$, имеем $VN \oplus V^2 D_+ = VD_+$, откуда $N \oplus VN \oplus V^2 D_+ =$

$=D_+$, или, эквивалентно,

$$N \oplus VN = D_+ \cap V^2 D_+^\perp.$$

Таким же образом по индукции получаем

$$\begin{gathered} V^j N \subset V^j D_+ \subset (N \oplus \ldots \oplus V^{j-1} N)_+^\perp, \\ N \oplus \ldots \oplus V^j N = D_+ \cap V^{j+1} D_+^\perp. \end{gathered} \tag{208}$$

В силу (i), $D_+ \supseteq VD_+ \supseteq \ldots \supseteq V^j D_+$, так что, в силу (ii) и (208),

$$\bigoplus_{k \geqslant 0} V^k N = D_+. \tag{209}$$

Применяя V^{-1} к $N \oplus VD_+ = D_+$, находим, что $V^{-1}N \oplus D_+ = V^{-1}D_+$, откуда, по индукции,

$$\bigoplus_{k \geqslant l} V^k N = V^l D_+$$

для любого целого l, положительного или отрицательного. Взяв $l \to -\infty$, с помощью (iii) получим, что

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V^k N = \mathscr{H}.$$

Таким образом, любой $\varphi \in \mathscr{H}$ можно однозначно представить в виде

$$\varphi = \sum_k V^k \varphi_k, \qquad \varphi_k \in N,$$

с $\|\varphi\|^2 = \sum_k \|\varphi_k\|^2$. В итоге отображение r_+: $\varphi \mapsto \{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ задает унитарное преобразование $\mathscr{H}$ на $l_2(-\infty, \infty; N)$. В силу (209), $r_+ D_+ = l_2[0, \infty; N)$. Наконец, легко проверить, что $\tilde{V}$ есть сдвиг вправо. ∎

Существуют по крайней мере три различных доказательства теоремы XI.82 Одно основано на обращении приводимого ниже доказательства теоремы XI.84 и использует теорему единственности фон Неймана. Второе использует технику анализа Фурье, теорему XI.83 и преобразование Кэли. Доказательство, которое мы приведем здесь, опирается на теорию спектральной кратности (см. § VII.2) и уходит корнями в общие методы теории групп, особенно в теорему импримитивности Макки. Напомним, что две меры называются эквивалентными тогда и только тогда, когда они взаимно абсолютно непрерывны. Основной технический результат, нужный для доказательства теоремы XI.82, тесно связан с тем, что мера Лебега — это единственная инвариантная относительно сдвигов мера на $\mathbb{R}$ (задача 122).

Лемма. Предположим, что $d\mu$ — нетривиальная мера Бореля на $\mathbb{R}$, обладающая тем свойством, что $d\mu(\cdot + a)$ эквивалентна $d\mu$ для всех $a \in \mathbb{R}$. Тогда $d\mu$ эквивалентна мере Лебега.

Доказательство. По условию,

$$d\mu(x+y) = g_y(x)\, d\mu(x). \tag{210}$$

Отсюда вытекает, что $g_y(x)$ — измеримая функция x при каждом фиксированном y, а $\int h(x) g_y(x)\, d\mu(x) = \int h(x-y)\, d\mu(x)$ — измеримая функция y при каждой измеримой функции h, а потому $g_y(x)$ измерима по совокупности переменных.

Зададим такую $h \geqslant 0$, что $\int h(y)\, dy = 1$, и пусть f — простая функция. Тогда, свободно пользуясь теоремой Фубини, с учетом (210) получим

$$\begin{aligned} \alpha \equiv \int f(x)\, d\mu(x) &= \iint f(x) h(y)\, d\mu(x)\, dy = \\ &= \iint f(x+y) g_y(x) h(y)\, d\mu(x)\, dy \end{aligned} \tag{211}$$

Сделаем замену переменных $z = x + y$ при фиксированном x. Тогда

$$\int f(x+y) g_y(x) h(y)\, dy = \int f(z) g_{z-x}(x) h(z-x)\, dz$$

в силу трансляционной инвариантности меры Лебега. В итоге

$$\alpha = \int f(z) G(z)\, dz,$$

где

$$G(z) = \int g_{z-x}(x) h(z-x)\, d\mu(x).$$

Поскольку f произвольна, $d\mu(x) = G(x)\, dx$.

Теперь зададим такую $h \geqslant 0$, что $\int h(y)\, d\mu(y) = 1$, и, как и выше, проделаем необходимые вычисления:

$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx &= \iint f(x) h(y)\, d\mu(y)\, dx = \iint f(x+y) h(y)\, dx\, d\mu(y) = \\ &= \iint f(z) h(z-x) g_{-x}(z)\, d\mu(z)\, dx = \int f(z) H(z)\, d\mu(z), \end{aligned}$$

где $H(z) = \int h(z-x) g_{-x}(z)\, dx$. Отсюда

$$dx = H(x)\, d\mu(x). \quad \blacksquare$$

Доказательство теоремы XI.82. На основе доказательства теоремы XI.83 введем

$$D_+(t) \equiv U(t)[D_+], \qquad t \in \mathbb{R},$$
$$D_+(\infty) \equiv \{0\}, \qquad D_+(-\infty) \equiv \mathcal{H}$$

и для $a<b$

$$N(a, b]=D_+(a)\cap D_+(b)^{\perp}.$$

Пусть $P_{(a,b]}$ — ортогональный проектор на $N(a, b]$. Используя свойства (i)—(iii) и непрерывность $U(t)$, легко проверить, что $\{P_{(a,b]}\}$ порождает проекторнозначную меру $\{P_\Omega\}$, удовлетворяющую условию $U(t)P_\Omega U(t)^{-1}=P_{\Omega+t}$. Вводя оператор

$$X=\int_{\mathbb{R}}\lambda\, dP_\lambda,$$

получим соотношение $U(t)XU(t)^{-1}=X+t$. Из единственности классов спектральных мер заданной кратности (теорема VII.6) следует, что классы спектральных мер оператора X инвариантны относительно сдвигов. Таким образом, по доказанной только что лемме, каждый класс должен содержать меру Лебега. Но, поскольку классы спектральных мер не пересекаются, существует всего один такой класс, т. е. X есть самосопряженный оператор однородной кратности m с некоторым m и с соответствующей спектральной мерой dx. Отсюда следует существование гильбертова пространства N размерности m и унитарного отображения $Q_+\colon \mathscr{H}\to L^2(\mathbb{R}, dx; N)$, таких, что $Q_+P_\Omega Q_+^{-1}$ есть оператор умножения на χ_Ω — характеристическую функцию Ω.

Пусть $W(t)=Q_+U(t)Q_+^{-1}$ и $T_0(t)$ — сдвиг вправо на t единиц, действующий на $L^2(\mathbb{R}, dx; N)$. Тогда $W(t)T_0(t)^{-1}$ при каждом t коммутирует с каждым $Q_+P_\Omega Q_+^{-1}$, так что по теореме XIII.84 существует $\mathscr{L}(N)$-значная измеримая функция $K_t(s)$, удовлетворяющая равенству

$$(W(t)T_0(-t)f)(s)=K_t(s)f(s).$$

Функция $K_t(s)$ задана только почти всюду по s, но для определенности мы зададим ее при каждом s. Тогда

$$(W(t)f)(s)=K_t(s)f(t+s).$$

Групповое свойство $W(t)W(u)=W(t+u)$ ведет к соотношению

$$K_t(s)K_u(t+s)=K_{t+u}(s), \tag{212}$$

которое выполняется в следующем смысле: для каждых t и u оно имеет место при почти всех s. Таким образом, оно справедливо для почти всех троек $\langle s, t, u\rangle$, поэтому можно выбрать фиксированное значение s так, что (212) будет справедливо для почти всех $\langle t, u\rangle$. Для выбранного значения s определим B соотношением

$$(Bf)(t)=K_{t-s}(s)f(t).$$

Тогда

$$(BW(a)B^{-1}f)(t)=K_{t-s}(s)K_a(t)[K_{t+a-s}(s)]^{-1}f(t+a)=f(t+a)$$

для почти всех t и a, где мы воспользовались (212), сделав замену переменных $t' = t + s$, $u' = a$. Теперь ясно, что $BW(a)B^{-1} = T_0(a)$ для почти всех a, а потому, в силу непрерывности, для всех a. Полагая $\mathcal{R}_+ = BQ_+$, получим утверждение теоремы ▮

Теоремой XI.82 можно воспользоваться для доказательства теоремы фон Неймана (теорема VIII.14) о единственности представлений канонических коммутационных соотношений.

Теорема XI.84 (теорема фон Неймана). Пусть $U(t)$ и $V(s)$ — две сильно непрерывные унитарные однопараметрические группы на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, такие, что

$$U(t)V(s) = e^{its}V(s)U(t) \qquad \text{для всех } t \text{ и } s.$$

Тогда существуют гильбертово пространство N и унитарное отображение $\mathcal{R}$ из $\mathcal{H}$ на $L^2(\mathbb{R}; N)$, такие, что $\mathcal{R}U(t)\mathcal{R}^{-1}$ есть сдвиг вправо на t единиц, а $\mathcal{R}V(s)\mathcal{R}^{-1}$ есть умножение на $e^{-i\lambda s}$.

Доказательство. Пусть P и Q — самосопряженные операторы, такие, что $U(t) = e^{-itP}$ и $V(s) = e^{-isQ}$. Пусть $\mathcal{D}$ — множество векторов из $\mathcal{H}$ вида

$$\varphi_f = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t, s)\, U(t)V(s)\varphi\, dt\, ds,$$

где $\varphi \in \mathcal{H}$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Точно так же, как в доказательстве теоремы VIII.8, можно показать, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{H}$, $\mathcal{D} \subset D(Q)$, $\mathcal{D} \subset D(P)$ и что $\mathcal{D}$ инвариантно относительно действия $U(t)$ и $V(s)$. По теореме VIII.10, P и Q самосопряжены в существенном на $\mathcal{D}$. Пусть $\psi \in \mathcal{D}$; тогда, поскольку $U(t)\psi \in \mathcal{D}$, можно продифференцировать обе части равенства

$$U(t)V(s)\psi = e^{its}V(s)U(t)\psi$$

по s. Полагая $s = 0$, получим

$$U(t)QU(-t)\psi = (Q - tI)\psi. \tag{213}$$

Поскольку это равенство справедливо на $\mathcal{D}$, которое есть существенная область определения для Q и $Q - tI$, мы заключаем, что Q и $Q - tI$ унитарно эквивалентны и (213) справедливо для всех $\psi \in D(Q)$. Пусть теперь $\{E_\Omega\}$ — спектральное семейство оператора Q. Тогда $\{U(t)E_\Omega U(t)^{-1}\}$ — спектральное семейство оператора $U(t)QU(t)^{-1}$. Так как $E_\Omega = \chi_\Omega(Q)$, то из (213) вытекает соотношение

$$U(t)E_{(-\infty,\lambda)}U(t)^{-1} = E_{(-\infty,\lambda+t)} \tag{214}$$

для всех λ и t из $\mathbb{R}$.

Положим $D_- = \operatorname{Ran} E_{(-\infty,\,0]}$. Покажем, что D_- — приходящее подпространство для $U(t)$ на $\mathscr{H}$. Прежде всего из (214) следует, что $U(t)D_- = \operatorname{Ran} E_{(-\infty,\,\lambda+t]}$ для всех t. Тогда:

(i) $U(t)D_- \subset D_-$, $t \leqslant 0$;

(ii) $\bigcap_t U(t)D_- = \{0\}$;

(iii) $\overline{\bigcup_t U(t)D_-} = \mathscr{H}$

в силу обычных свойств спектральных операторов. Значит, в силу теоремы XI.82, существуют вспомогательное гильбертово пространство N и унитарное отображение $\mathscr{R}_-$ пространства $\mathscr{H}$ на $L^2(\mathbb{R};\ N)$, такие, что $\mathscr{R}_- D_- = L^2(-\infty,\ 0;\ N)$, а $\mathscr{R}_- U(t)\mathscr{R}_-^{-1}$ есть сдвиг вправо на t единиц. Наконец, поскольку $\mathscr{R}_- E_{(-\infty,\,0)}\mathscr{R}_-^{-1} = \chi_{(-\infty,\,0)}$, равенство (214) приводит к соотношению $\mathscr{R}_- E_{(-\infty,\,\lambda)}\mathscr{R}_-^{-1} = \chi_{(-\infty,\,\lambda)}$ для всех λ. В итоге $\mathscr{R}_- Q\mathscr{R}_-^{-1}$ есть операция умножения на λ, а $\mathscr{R}_- e^{-isQ}\mathscr{R}_-^{-1}$ — операция умножения на $e^{-i\lambda s}$. ∎

Теорему XI.82 можно переформулировать с помощью преобразования Фурье. Определяемое обычным образом, преобразование Фурье $\mathscr{F}$ есть унитарное отображение $L^2(\mathbb{R};\ N)$ на себя. Оно отображает $L^2(0,\ \infty;\ N)$ на класс $\mathscr{H}^2_-(\mathbb{R};\ N)$ Харди — Лебега, а $L^2(-\infty,\ 0;\ N)$ на $\mathscr{H}^2_+$ (см. замечания к § IX.3).

Теорема XI.85. Пусть D_+ — уходящее подпространство для унитарной группы $U(t)$ на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существуют вспомогательное гильбертово пространство N и унитарное отображение $\mathscr{F}\circ\mathscr{R}_+$ пространства $\mathscr{H}$ на $L^2(\mathbb{R};\ N)$, такие, что $\mathscr{F}\circ\mathscr{R}_+[D_+] = \mathscr{H}^2_-(\mathbb{R};\ N)$, а $(\mathscr{F}\circ\mathscr{R}_+)U(t)(\mathscr{F}\circ\mathscr{R}_+)^{-1}$ есть оператор умножения на $e^{-it\sigma}$.

Описанное только что представление называется **уходящим спектральным представлением** для $U(t)$, D_+ и $\mathscr{H}$. Для приходящего подпространства справедлива похожая теорема с той только разницей, что в ней $\mathscr{F}\circ\mathscr{R}_+$ заменяется на $\mathscr{F}\circ\mathscr{R}_-$, а $\mathscr{H}^2_-(\mathbb{R};\ N)$ на $\mathscr{H}^2_+(\mathbb{R};\ N)$.

Обсуждение, проведенное после формулировки теоремы XI.82, показывает, что существование приходящего и уходящего подпространств позволяет строить теорию рассеяния. Но теорема XI.82 ничего не говорит о том, как в действительности построить приходящие и уходящие подпространства для $U(t)$. Поскольку $U(t)$ описывает динамику системы со взаимодействием, это нетривиальный вопрос. В приложениях нужное построение существенно опирается на то, что $U(t)$ тесно связана со свободной динамикой, задаваемой группой $U_0(t)$, которая обладает многими специальными свойствами. Пусть, например, $W_0(t)$ и $W(t)$ — унитарные группы, описывающие распространение акустических волн в свободном пространстве и в неоднородной среде, построенные в предыдущем разделе. Предположим, что область неоднородности содержится в некотором конечном шаре $\mathscr{B}_{r_0}$. Гильбертовы пространства, в которых действуют $W_0(t)$ и $W(t)$, эквивалентны, и нормы любой пары функций с носителями вне $\mathscr{B}_{r_0}$ равны между собой. Более того, любые начальные данные с компактным носителем преобразуются операторами $W_0(t)$ так, что их носители в конце концов оказываются вне $\mathscr{B}_{r_0}$, и до тех пор, пока эти начальные данные остаются вдали от $\mathscr{B}_{r_0}$, $W_0(t)$ и $W(t)$ *согласуются* между собой. Эти и другие специфические черты $W_0(t)$ и $W(t)$ используются в примерах 1 и 2 ниже. А сейчас вернемся на время к общей теории и точно сформулируем, что мы имеем в виду, говоря о «тесной связи» между $U(t)$ и $U_0(t)$.

Предположим, что $U(t)$ и $U_0(t)$—сильно непрерывные унитарные группы на гильбертовых пространствах $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_0$, и пусть J—оператор отождествления из $\mathscr{H}_0$ в $\mathscr{H}$. Предположим, что

(0) существуют подпространства $D_{\pm}^{r_0} \subset \mathscr{H}_0 \cap \mathscr{H}$, такие, что $\mathscr{H}_0$-норма и $\mathscr{H}$-норма одинаковы на $D_{\pm}^{r_0}$, а J—единичный оператор на $D_{\pm}^{r_0}$;

(1) $D_{+}^{r_0}$ и $D_{-}^{r_0}$—приходящее и уходящее подпространства *как для* $U(t)$, *так и для* $U_0(t)$;

(2) при $t \geqslant 0$ группы $U(t)$ и $U_0(t)$ одинаково действуют на $D_{+}^{r_0}$, а при $t \leqslant 0$ на $D_{-}^{r_0}$;

(3) существуют гильбертово пространство N и унитарное отображение $\mathscr{R}_0$: $\varphi \longmapsto \tilde{\varphi}$ из $\mathscr{H}$ на $L^2(\mathbb{R}; N)$, такие, что $D_{+}^{r_0}$ и $D_{-}^{r_0}$ переходят соответственно в $L^2(r_0, \infty; N)$ и $L^2(-\infty, -r_0; N)$, где r_0—некоторое положительное число, а $U_0(t)$ переходит в операцию сдвига по t. Иначе говоря, с точностью до сдвига на r_0 единиц это представление служит *одновременно* и приходящим и уходящим для $U_0(t)$.

Пусть через $T_0(t)$ обозначен сдвиг вправо, действующий в $L^2(\mathbb{R}; N)$. Для построения уходящего трансляционного представления для $U(t)$ мы переводим $U(t)\varphi$ для каждого φ из $D_{+}^{r_0}$ в $T_0(t)\tilde{\varphi}$. В силу (2), отображение корректно определено и сохраняет норму, а в силу (iii), оно плотно задано. Более того, его область значений тоже плотна, ибо $\mathscr{R}_0$ отображает $D_{+}^{r_0}$ на $L^2(r_0, \infty; N)$. Следовательно, это отображение продолжается до унитарного преобразования $\mathscr{H}$ на $L^2(\mathbb{R}; N)$, при котором $U(t)$ переходит в $T_0(t)$, а $D_{+}^{r_0}$ в $L^2(r_0, \infty; N)$. Сдвиг влево с помощью $T_0(-r_0)$ позволяет завершить построение уходящего трансляционного представления для $U(t)$ Похожее построение дает приходящее трансляционное представление. Как и прежде, обозначим отображения на эти представления через $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$. Отметим, что, в силу (3), $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ ортогональны. Это будет иметь важные последствия, о которых речь впереди.

В такой ситуации, когда у нас есть группа $U_0(t)$ свободной динамики, естествен вопрос: как оператор рассеяния Лакса — Филлипса связан с обычными волновыми операторами и оператором рассеяния? Пусть D — плотное в $\mathcal{H}_0$ множество векторов φ, таких, что $\mathcal{R}_0\varphi$ имеет компактный носитель. Если $\varphi \in D$, то $U_0(s)\varphi \in D_+^{r_0}$ для некоторого s, так что, в силу (2), $U(-t)JU_0(t)\varphi$ не зависит от t при $t \geqslant s$. Таким образом,

$$\Omega^-\varphi = \lim_{t\to\infty} U(-t)JU_0(t)\varphi$$

существует. Поскольку D плотно в $\mathcal{H}_0$, этот предел существует на всем $\mathcal{H}_0$; аналогично доказывается существование Ω^+

Заметим теперь, что если $\psi \in D_+^{r_0}$, то $\Omega^-\psi = \psi$; таким образом, если $\varphi \in D$ и $U_0(s_1)\varphi \in D_+^{r_0}$, то

$$\Omega^-U_0(s_1)\varphi = U_0(s_1)\varphi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_+\Omega^-\varphi &= T_0(-s_1)\mathcal{R}_+\Omega^-U_0(s_1)\varphi = T_0(-s_1)\mathcal{R}_+U_0(s_1)\varphi = \\ &= T_0(-r_0-s_1)\mathcal{R}_0U_0(s_1)\varphi = T_0(-r_0)\mathcal{R}_0\varphi,\end{aligned}$$

поскольку $\mathcal{R}_+ = T_0(-r_0)\mathcal{R}_0$ на $D_+^{r_0}$. В связи с тем что множество взятых φ плотно, получаем $\mathcal{R}_+\Omega^- = T_0(-r_0)\mathcal{R}_0$ и аналогично $\mathcal{R}_-\Omega^+ = T_0(r_0)\mathcal{R}_0$. Поскольку $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_\pm$ и $T_0(t)$ унитарны, это означает, что $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \mathcal{H} = \operatorname{Ran}\Omega^-$, так что волновые операторы полны. Наконец,

$$\begin{aligned}(\Omega^-)^{-1}\Omega^+ &= \mathcal{R}_0^{-1}T_0(r_0)\mathcal{R}_+\mathcal{R}_-^{-1}T_0(r_0)\mathcal{R}_0 = \\ &= \mathcal{R}_0^{-1}T_0(r_0)\tilde{S}T_0(r_0)\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0^{-1}(T_0(2r_0)\tilde{S})\mathcal{R}_0.\end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до несущественного множителя $T_0(2r_0)$ произведение $(\Omega^-)^{-1}\Omega^+$ есть оператор рассеяния Лакса — Филлипса, преобразованный в $\mathcal{H}_0$. Итак, справедлива

Теорема XI.86. Пусть $U_0(t)$, $U(t)$, J удовлетворяют условиям (0) — (3), а $\mathcal{R}_0$, T_0 и r_0 определены так, как описано выше. Тогда волновые операторы $\Omega^\pm$ существуют, полны и

$$(\Omega^-)^{-1}\Omega^+ = \mathcal{R}_0^{-1}(T_0(2r_0)\tilde{S})\mathcal{R}_0. \tag{215}$$

Пример 1 (свободное волновое уравнение в трехмерном пространстве). В § X.13 и XI.10 мы уже сформулировали проблему решения свободного волнового уравнения как задачу в гильбертовом пространстве. Будем далее использовать обозначения, введенные в § XI.10, полагая $c_0 = 1$. Если функция φ, задающая начальные данные, лежит в $\mathcal{H}_0$ и достаточно гладкая, то первая компонента $u(x, t)=(W_0(t)\varphi)_1$ удовлетворяет свободному волновому уравнению (186). Первый нужный нам факт есть принцип Гюйгенса.

Теорема XI.87 (принцип Гюйгенса). Пусть $W_0(t)$ — унитарная группа для свободного волнового уравнения на $\mathbb{R}^3$. Положим $u(x, t)=(W\ \ (t)\varphi)_1$. Предположим, что $\varphi=\langle f, g\rangle\in\mathcal{H}_0$ имеет компактный носитель. Тогда

$$\operatorname{supp} u(x, t)\subset\{x\in\mathbb{R}^3 \mid |x-y|=t \text{ для некоторого } y\in\operatorname{supp}\langle f, g\rangle\}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $f=0$, a $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Выведем явную формулу для решения уравнения (186) в случае $c_0=\rho_0=1$. Чтобы решить (186), нужно найти такое u, что $\hat{u}_{tt}(k, t)=-k^2\hat{u}(k, t)$, $\hat{u}(k, 0)=0$, $\hat{u}_t(k, 0)=\hat{g}(k)$. Это легко сделать, полагая

$$\hat{u}(k, t)=\frac{\sin|k|t}{|k|}\hat{g}(k).$$

Пусть H — обобщенная функция умеренного роста с фурье-образом $|k|^{-1}\sin|k|t$. Тогда

$$u(x, t)=\mathcal{F}^{-1}(|k|^{-1}(\sin|k|t)\hat{g}(k))=(2\pi)^{-3/2}H*g,$$

так что прежде, чем выписать решение, следует найти H. Пусть dS_R — поверхностная мера на сфере радиуса R; это есть обобщенная функция умеренного роста, такая, что с помощью угла θ между x и k ее фурье-образ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\widehat{dS_R}(k)&=(2\pi)^{-3/2}\int e^{-ik\cdot x}\,dS_R(x)=\\&=(2\pi)^{-3/2}\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}e^{-i|k|R\cos\theta}R^2\sin\theta\,d\psi=\\&=(2\pi)^{-1/2}R^2\int_0^\pi e^{-i|k|R\cos\theta}\sin\theta\,d\theta=\frac{2R\sin|k|R}{\sqrt{2\pi}|k|}.\end{aligned}$$

Таким образом, $H=(2t)^{-1}\sqrt{2\pi}\,dS_t$ при $t>0$, и

$$u(x, t)=\frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^3}g(x+y)\,dS_t(y).$$

Аналогичное представление справедливо при $t<0$. Отметим, что $v=u_t$ тоже удовлетворяет (186) с начальными условиями $v(x, 0)=g(x)$, $v_t(x, 0)=0$. Таким образом, решение (186) с начальными данными f, $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ можно представить в виде

$$u(x, t)=\frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^3}g(x+y)\,dS_t(y)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^3}f(x+y)\,dS_t(y)\right), \quad (216a)$$

откуда немедленно вытекает принцип Гюйгенса для начальных данных класса C_0^∞.

Теперь предположим, что $\varphi=\langle f, g\rangle\in\mathcal{H}_0$ с носителем в компактном множестве K, и пусть Σ_t — множество, где в соответствии с принципом Гюйгенса сосредоточено $u(x, t)$. Пусть $K^{(\varepsilon)}$ и $\Sigma_t^{(\varepsilon)}$ суть множества K и Σ_t с присоединенными к ним точками, находящимися от них на расстоянии меньшем ε. Тогда существует последовательность $\varphi_n=\langle f_n, g_n\rangle$ пар C_0^∞-функций с носителем в $K^{(\varepsilon)}$, такая, что $\varphi_n\to\varphi$ в $\mathcal{H}_0$. Поскольку $W_0(t)$ — унитарная группа, $W_0(t)\varphi_n\to W_0(t)\varphi$ и, в частности,

$$\int_{R^3}|\nabla(u_n-u)(x)|^2\,dx\to 0.$$

Согласно лемме о принципе неопределенности (§ X.2),

$$\int_{|x|<r}|u(x, t)-u_n(x, t)|^2\,dx\leqslant 4r^2\int_{R^3}\frac{1}{4|x|^2}|u(x, t)-u_n(x, t)|^2\,dx\leqslant$$
$$\leqslant 4r^2\int_{R^3}|\nabla(u(x, t)-u_n(x, t))|^2\,dx, \tag{216b}$$

так что в каждом шаре радиуса r некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_n\}$ поточечно почти всюду сходится к u. В итоге u равно нулю вне $\Sigma_t^{(\varepsilon)}$, поскольку там равно нулю каждое u_n, но тогда из произвольности ε следует, что u сосредоточено в Σ_t. ∎.

Следствие. Предположим, что $\operatorname{supp}\langle f, g\rangle$ содержится в шаре радиуса r Тогда

$$u(x, t)=0 \quad \text{при} \quad |x|>r+t, \tag{217a}$$
$$u(x, t)=0 \quad \text{при} \quad |x|<|t|-r. \tag{217b}$$

Равенство (217a) выражает конечность скорости распространения возмущения и справедливо в пространстве любой размерности. Равенство (217b) есть переформулировка принципа Гюйгенса, справедливая только при нечетных размерностях начиная с 3.

Введем теперь два подпространства:

$$D_+=\{\varphi\in\mathcal{H}_0|\ u(x, t)=(W_0(t)\varphi)_1=0 \text{ при } |x|\leqslant t,\ t>0\},$$
$$D_-=\{\varphi\in\mathcal{H}_0|\ u(x, t)=(W_0(t)\varphi)_1=0 \text{ при } |x|\leqslant -t,\ t<0\}.$$

Проверку того, что D_+ есть уходящее пространство, проведем следующим образом. В силу унитарности $W_0(t)$ и неравенства (216b), подпространство D_+ замкнуто. Для проверки (i) заметим, что если $\varphi\in D_+$, то

$$(W_0(t)W_0(s)\varphi)_1=(W_0(t+s)\varphi)_1=u(x, t+s),$$

так что $(W_0(t)W_0(s)\varphi)_1=0$, когда $t>0$ и $|x|\leqslant t+s$. В итоге если $s\geqslant 0$, то $W_0(s)\varphi\in D_+$. Далее, предположим, что $\psi\in\in\bigcap_s W_0(s)[D_+]$. Поскольку для $\varphi\in D_+$ справедливо включение

$$\operatorname{supp}(W_0(s)\varphi)_1\subset\mathbb{R}^3\diagdown\{x\in\mathbb{R}^3\mid |x|\leqslant s\},$$

принадлежность ψ подпространству $W_0(s)[D_+]$ при всех $s>0$ означает, что $(\psi)_1\equiv 0$. Но для $\varphi\in D_+$, кроме того, $(d/dt)(W_0(t)\varphi)_1=$ $=(W_0(t)\varphi)_2$, так что и $(\psi)_2\equiv 0$. Таким образом, $\psi\equiv 0$, что дает (ii). Наконец, заметим, что при условии $\operatorname{supp}\varphi\subset\{x\mid |x|\leqslant R\}$, в силу (217b), $W_0(R)\varphi\in D_+$, так что $\bigcup_t W_0(t)D_+$ содержит все начальные данные класса C^∞ с компактным носителем, и потому выполнено (iii). Доказательство того, что D_- — приходящее подпространство, аналогично. В итоге, в силу теоремы XI.82, для $W_0(t)$ существуют приходящее и уходящее трансляционные представления.

На практике желательно иметь трансляционное представление для $W_0(t)$, которое *одновременно* и уходящее и приходящее, а также как можно больше конкретной информации о свойствах этого представления. По этой причине нужное представление строят непосредственно, не обращаясь к теореме XI.82. Прямое построение можно провести, если заметить, что для каждого $\sigma\in\mathbb{R}$ и $\omega\in\mathbb{R}^3$ с $|\omega|=1$ обобщенная собственная функция оператора

$$A_0=i\begin{pmatrix}0 & I\\ \Delta & 0\end{pmatrix},$$

отвечающая собственному значению $+\sigma$, имеет вид

$$\varphi_{\sigma,\omega}=e^{-i\sigma\omega\cdot x}\begin{pmatrix}1\\ -i\sigma\end{pmatrix}.$$

Подобно тому, как это сделано в § 6, введем

$$f^{\#}(\sigma,\omega)=(2\pi)^{-3/2}(f,\varphi_{\sigma,\omega})_{\mathscr{H}_0},$$

где $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)\times C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Отображение $f^{\#}$ можно рассматривать как функцию на $\mathbb{R}$ со значениями в $N=L^2(S^2)$, и легко показать, что соответствие $f\longmapsto f^{\#}$ задает изометрию $\mathscr{H}_0$ в $L^2(\mathbb{R};L^2(S^2))$. Более того, эта изометрия унитарна, а поскольку

$$(A_0f)^{\#}(\sigma,\omega)=(A_0f,\varphi_{\sigma,\omega})=(f,A_0\varphi_{\sigma,\omega})=\sigma(f,\varphi_{\sigma,\omega})=\sigma f^{\#}(\sigma,\omega),$$

она переводит оператор A_0 в оператор умножения на σ. Сделав обратное преобразование Фурье по переменной σ, можно представить $\mathscr{H}_0$ как $L^2(\mathbb{R};L^2(S^2))$, а $W_0(t)$ как правый сдвиг. Правда, при таком преобразовании на первый взгляд не видно, во что переходят D_+ и D_-. Но путем более внимательного анализа можно показать, что D_+ переходит в $L^2(0, \infty; L^2(S^2))$, а D_- — в $L^2(-\infty, 0; L^2(S^2))$. Это означает, что трансляционное представление является *одновременно* и приходящим, и уходящим, а $\mathscr{H}_0 = D_+ \oplus D_-$, что совершенно не очевидно в исходном представлении. Полученное ортогональное разложение служит средством доказательства ряда аналитических свойств оператора рассеяния, обсуждаемых дальше.

Наконец, отметим, что проведенное прямое построение трансляционного представления можно использовать для независимого доказательства принципа Гюйгенса.

Пример 2 (акустические волны в неоднородной среде). Рассмотрим первый пример, т. е. уравнения (187) предыдущего раздела, используя подход Лакса — Филлипса. Допустим, что выполнены все предположения о свойствах $c(x)$, $\rho(x)$, сделанные в § 10, и воспользуемся построенными там пространствами и операторами. Примем дополнительное предположение о свойствах $c(x)$ и $\rho(x)$: пусть для некоторого r

$$\rho(x) \equiv 1, \qquad c(x) \equiv 1, \qquad |x| \geqslant r.$$

Пусть далее $r_0 > r$, а D_+ и D_- — такие же, как в примере 1. Положим

$$D_+^{r_0} \equiv W_0(r_0) D_+, \qquad D_-^{r_0} \equiv W_0(-r_0) D_-.$$

Заметим, что $D_+^{r_0}$, $D_-^{r_0}$ — замкнутые подпространства в $\mathscr{H}_0$. Они суть замкнутые подпространства и в $\mathscr{H}_1$, поскольку функция $\varphi \in \mathscr{H}_0$ обращается в нуль внутри шара $B(r_0)$ радиуса r_0, если она принадлежит $D_+^{r_0}$. Отсюда

$$\|\varphi\|_{\mathscr{H}_1} = \|\varphi\|_{\mathscr{H}_0}, \qquad \varphi \in D_\pm^{r_0},$$

ибо нормы функций с носителями вне $B(r)$ одинаковы. В качестве J возьмем тождественное отображение.

Предположим, что $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $\varphi \in D_+^{r_0}$. Поскольку $W_0(t)$: $D_+^{r_0} \to D_+^{r_0}$ для $t \geqslant 0$, получаем, что

$$(W_0(t)\varphi)' = -iA_0 W_0(t)\varphi = -iA_1 W_0(t)\varphi,$$

ибо A_0 и A_1 совпадают на гладких функциях с носителями вне $B(r)$. Отсюда, в силу единственности связи между полугруппами и порождающими их генераторами, $W_0(t)\varphi = W_1(t)\varphi$ при $t \geqslant 0$, а поскольку множество рассматриваемых φ плотно в $D_+^{r_0}$, получаем, что

$$W_1(t)\varphi = W_0(t)\varphi, \qquad \varphi \in D_+^{r_0}, \qquad t \geqslant 0, \tag{218}$$

и аналогично

$$W_1(t)\varphi = W_0(t)\varphi, \qquad \varphi \in D_-^{r_0}, \qquad t \leqslant 0.$$

Это показывает, что $W_0(t)$ и $W_1(t)$ удовлетворяют требованиям (0) и (2) теоремы XI.86. Тот факт, что выполняется требование (3), следует из уже проведенного обсуждения примера 1. Далее, мы знаем, что $D_-^{r_0}$ и $D_+^{r_0}$ суть приходящее и уходящее подпространства для $W_0(t)$. Осталось показать, что они являются приходящим и уходящим подпространствами и для $W_1(t)$. Тогда, в силу теоремы XI.82, будет существовать оператор рассеяния $\tilde{S}$ Лакса — Филлипса. А поскольку условия (0)—(3) теоремы XI.86 проверены, у нас будет новое доказательство существования и полноты волновых операторов, а отображение $(\Omega^-)^{-1}\Omega^+$ будет связано с $\tilde{S}$ равенством (215).

Для доказательства того, что $D_+^{r_0}$ есть уходящее подпространство для $W_1(t)$, необходимо проверить свойства (i)—(iii). Свойства (i) и (ii) немедленно вытекают из (218) и соответствующих утверждений для группы свободной динамики, доказанных в примере 1. Проверка свойства (iii) значительно сложнее и требует привлечения целого ряда различных технических приемов. Кроме принципа Гюйгенса нам потребуется теорема вложения типа теорем, обсуждаемых в § XIII.14, и детальный спектральный анализ оператора A_1. Наш план таков: продемонстрировать эквивалентнсcть свойства (iii) некоторой определенной форме убывания энергии в области, где среда неоднородна, а затем, используя свойства A_1, доказать, что такое убывание происходит на самом деле. Поскольку из свойства (iii) вытекает асимптотическая полнота, совсем не удивительно, что оно связано с условием убывания энергии: следует ожидать, что асимптотическая полнота будет иметь место, только если любое решение уравнения с членами, описывающими взаимодействие, в далеком прошлом и будущем будет походить на решение свободного уравнения, т. е. будет описывать волны, уходящие из области, где среда неоднородна.

Начнем с леммы, показывающей, что в случае свободного уравнения энергия распространяется с единичной скоростью. Для любого $R > 0$ и $\varphi = \langle u, v\rangle$ определим локальные энергетические нормы, полагая

$$\|\varphi\|_0^{(R)} = \int_{|x| \leqslant R} [|\nabla u|^2 + |v|^2]\, dx,$$

$$\|\varphi\|_1^{(R)} = \int_{|x| \leqslant R} [\rho(x)^{-1} |\nabla u|^2 + (c(x)^2 \rho(x))^{-1} |v|^2]\, dx.$$

Лемма 1. (a) Для любого $R > 0$

$$\|W_0(T)\varphi\|_0^{(R)} \leqslant \|\varphi\|_0^{(R+T)} \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{H}_0.$$

(b) Для любого $R \geqslant r_0$

$$\|W_1(T)\varphi\|_1^{(R)} \leqslant \|\varphi\|_1^{(R+T)} \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{H}_1.$$

Доказательство. Идея состоит в интегрировании «потока энергии» через поверхность области $\Omega(R, T)$, заданной неравенством $|x| \leqslant R+T-t$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (рис. XI.14). В силу закона сохранения энергии, дополнительный поток энергии не может порождаться внутри $\Omega(R, T)$, а в силу конечности скорости распространения, энергия может перетекать только через границы области,

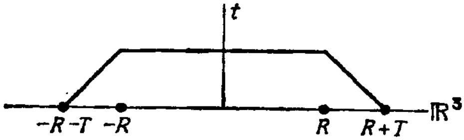

Рис. XI.14. Область $\Omega(R, T)$.

поэтому приток $\|\cdot\|_t^{(R+T)}$ на дне должен быть больше, чем отток $\|W_i(T)\cdot\|_t^{(R)}$ на вершине.

Точнее, введем

$$j_0(x, t) = \frac{1}{2}\left[(c^2(x)\rho(x))^{-1}|u_t(x, t)|^2 + \rho(x)^{-1}|\nabla u(x, t)|^2\right],$$
$$j_i(x, t) = -\rho(x)^{-1}\operatorname{Re}\{\overline{u_t(x, t)}\,\partial_i u(x, t)\}$$

и положим $j = \langle j_0, \mathbf{j}\rangle$. Как будет показано в дополнении к § 13, это четыре компоненты тензора энергии-импульса. Предположим сначала, что $\varphi = \langle f, g\rangle$ и $f, g \in C_0^\infty$. Пусть $u(x, t) = (W_1(t)\varphi)_1$. Обычные рассуждения типа тех, что использовались в § X.13, показывают, что u — бесконечно дифференцируемая функция по x и t, а прямое вычисление с использованием уравнения $u_{tt} = c^2\rho\nabla\cdot\rho^{-1}\nabla u$ дает равенство

$$\nabla_{\mathbb{R}^4}\cdot j = \frac{\partial j_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0.$$

Отсюда, в силу теоремы Гаусса,

$$\int_{\partial\Omega(R,\, T)} j\cdot\sigma\, dS = 0,$$

где $\sigma = \langle\sigma_0, \boldsymbol{\sigma}\rangle$ — внешняя нормаль, а dS — обычная поверхностная мера. В силу неравенства $2ab \leqslant a^2 + b^2$, имеем соотношение $|\mathbf{j}(x, t)| \leqslant j_0(x, t)$ в тех точках, где $c = 1$, например на гранях Ω. Более того, $|\boldsymbol{\sigma}(x, t)| = \sigma_0(x, t)$ на гранях Ω, и потому на них $j\cdot\sigma \geqslant 0$, так что

$$\int_{|x| \leqslant R} j_0(x, T)\, dx \leqslant \int_{|x| \leqslant R+T} j_0(x, 0)\, dx,$$

откуда следует (b) для гладких φ. С помощью предельного перехода утверждение (b) переносится на все $\varphi \in \mathscr{H}_1$. Аналогично доказывается (a). ∎

С помощью этой леммы можно показать, что (iii) эквивалентно слабой форме утверждения о локальном убывании энергии.

Лемма 2. В условиях примера 2 свойство (iii) выполняется тогда и только тогда, когда для всех $\varphi \in \mathscr{H}_1$ и всех $R < \infty$

$$\varliminf_{t \to \infty} \| W_1(t)\varphi \|_1^{(R)} = 0. \tag{219}$$

Доказательство. Сначала предположим, что (iii) выполнено. Тогда для любого $\varphi \in \mathscr{H}_1$ и $\varepsilon > 0$ существуют t_0 и $\psi \in D_+^{r_0}$, такие, что $\| W_1(t_0)\psi - \varphi \|_1 \leqslant \varepsilon$. Поскольку $\psi \in D_+^{r_0}$, $W_1(t+t_0)\psi$ обращается в нуль внутри $B(R)$, если $t > R - t_0$. Таким образом, для всех t

$$\| W_1(t)\varphi \|_1^{(R)} \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geqslant R - t_0,$$

поскольку

$$\| W_1(t)\varphi - W_1(t+t_0)\psi \|_1 = \| \varphi - W_1(t_0)\psi \|_1 \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{t \to \infty} \| W_1(t)\varphi \|_1^{(R)} = 0$, что a priori сильнее (219).

Для доказательства обратного утверждения предположим, что (219) выполнено и ψ ортогонально $\overline{\bigcup W_1(t)\, D_+^{r_0}}$; последнее эквивалентно тому, что $W_1(t)\psi \perp D_+^{r_0}$ для всех t. Свободное трансляционное представление $D_+^{r_0}$ совпадает со всем $L^2(r_0, \infty; N)$, поэтому $W_0(-2r_0)\, W_1(t)\psi \in D_-^{r_0}$ для всех t. Поскольку $W_1(-s)$ и $W_0(-s)$ совпадают на $D_-^{r_0}$ для всех $s \geqslant 0$, получаем, что

$$W_0(-(s+2r_0))\, W_1(t)\psi = W_1(-s)\, W_0(-2r_0)\, W_1(t)\psi, \tag{220}$$

а также что $W_0(-s)\, W_1(t)\psi$ равно нулю при $|x| < s - r_0$.

Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. В силу (219), можно найти такое $t > (k+1)\, r_0$, что $\| W_1(t)\psi \|_1^{(5r_0)} < \varepsilon$, и потому, в силу леммы 1,

$$\| W_0(-2r_0)\, W_1(t)\psi \|_1^{(3r_0)} \leqslant d \| W_0(-2r_0)\, W_1(t)\psi \|_0^{(3r_0)} \leqslant d_0 \varepsilon,$$
$$\| W_1(t-2r_0)\psi \|_1^{(3r_0)} \leqslant \varepsilon,$$

где d_0 — универсальная постоянная, связывающая две эквивалентные нормы $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_0$. Заметим, что $W_0(-s)\, W_1(t)\psi = W_1(-s)\, W_1(t)\psi$ при $s = 0$, и, следовательно, эти два решения совпадают при $|x| > |s| + r_0$, поскольку решения в таких точках не зависят от неоднородностей внутри $B(r_0)$. В частности,

$$(W_0(-2r_0)\, W_1(t)\psi)(x) = (W_1(-2r_0)\, W_1(t)\psi)(x)$$

для $|x| > 3r_0$. Этот факт и приведенные выше оценки дают неравенство

$$\| W_0(-2r_0)\, W_1(t)\psi - W_1(t-2r_0)\psi \|_1 \leqslant (1 + d_0)\,\varepsilon.$$

Пусть теперь $s=t-2r_0$ Поскольку оператор $W_1(2r_0-t)$ унитарен, получаем (с помощью (220))

$$\|W_0(-t)W_1(t)\psi-\psi\|_1\leqslant(1+d_0)\varepsilon.$$

Вспомним, что $W_0(-t)W_1(t)\psi$ обращается в нуль при $|x|<<t-r_0$, и выберем $t>(k+1)r_0$; тогда

$$\|\psi\|_1^{(kr_0)}\leqslant(1+d_0)\varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε и k, заключаем, что $\psi=0$. Итак, (iii) выполняется. ∎

Для доказательства (219) нам нужен один результат о локальной компактности.

Лемма 3. Пусть фиксирована постоянная c_1. Множество $\mathcal{K}$ всех $\varphi\in D(A_1)$, таких, что $\|A_1\varphi\|_1+\|\varphi\|_1\leqslant c_1$, компактно в $\|\cdot\|_1^{(R)}$-норме при любом R, т. е. для любой заданной последовательности в $\mathcal{K}$ существует подпоследовательность, сходящаяся по $\|\cdot\|_1^{(R)}$-норме.

Доказательство. Пусть $\varphi=\langle u, v\rangle$. Условие леммы говорит о том, что

$$\|B_1^2u\|_{\rho c}^2+\|B_1u\|_{\rho c}^2+\|B_1v\|_{\rho c}^2+\|v\|_{\rho c}^2\leqslant c_1$$

с некоторой c_1. Отсюда с помощью условий (190) легко получить, что

$$\|\Delta u\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla v\|_2^2+\|v\|_2^2\leqslant c_2$$

для всех φ из исходного множества $\mathcal{K}$. В силу следствия 1 теоремы XIII.74, множество всех $v\in L^2$, удовлетворяющих условию $\|\nabla v\|_2^2+\|v\|_2^2\leqslant c_2$, компактно в локальной норме $\|v\|_2^{(R)}$; аналогично, множество всех u, удовлетворяющих неравенству $\|\Delta u\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2\leqslant c_2$, компактно в локальной норме $\|\nabla u\|_2^{(R)}$. Таким образом, $\mathcal{K}$ компактно в локальной норме $\|\cdot\|_0^{(R)}$, а следовательно, и в $\|\cdot\|_1^{(R)}$, поскольку эти нормы эквивалентны. ∎

Наконец, нам нужны сведения о спектре A_1.

Лемма 4. Спектр A_1 абсолютно непрерывен.

Доказательство. Это утверждение будет правильным, если спектр $B_1^2=-c(x)^2\rho(x)\nabla\cdot\rho(x)^{-1}\nabla$ в $L^2_{\rho c}(\mathbb{R}^3)$ абсолютно непрерывен. B_1^2 унитарно эквивалентен оператору

$$\tilde{B}_1^2=-(c(x)^2\rho(x))^{1/2}\circ\nabla\cdot\rho(x)^{-1}\nabla\circ(c(x)^2\rho(x))^{1/2}$$

в $L^2(\mathbb{R}^3)$. В теореме XIII.62 будет доказано отсутствие собственных значений у такого оператора. В теореме XI.45 уже была доказана ограниченность матричных элементов резольвенты на плотном множестве векторов при приближении к вещественной оси. Этот факт означает отсутствие сингулярного спектра (теорема XIII.19). ∎

Теперь мы готовы завершить доказательство выводом свойства (iii). Пусть $\varphi \in D(A_1)$. Рассмотрим множество $\mathcal{K}_\varphi = \{U_1(t)\varphi \mid t \in \mathbb{R}\}$. Поскольку

$$\|A_1 U_1(t)\varphi\|_1 + \|U_1(t)\varphi\|_1 = \|A_1\varphi\|_1 + \|\varphi\|_1,$$

$\mathcal{K}_\varphi$ компактно в $\|\cdot\|_1^{(R)}$-норме (лемма 3). Более того, спектр A_1 абсолютно непрерывен, и потому $(U_1(t)\varphi, \psi)_1 \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех φ, ψ в силу леммы Римана—Лебега. Отсюда следует, что любая предельная точка в $\|\cdot\|_1^{(R)}$-топологии должна совпадать с нулем, так что, в силу компактности,

$$\lim_{t \to +\infty} \|U_1(t)\varphi\|_1^{(R)} = 0.$$

Поскольку область $D(A_1)$ плотна в $\mathcal{H}_1$, а операторы $U_1(t)$ унитарны, это же равенство справедливо для всех $\varphi \in \mathcal{H}_1$ и всех $R > 0$, что в силу леммы 2 доказывает (iii). Подведем итоги.

Теорема XI.88. Пусть $c(x)$ и $\rho(x)$ — гладкие функции, выходящие на константу вне некоторого компактного множества и удовлетворяющие (190). Тогда $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ суть уходящее и приходящее подпространства для $W_1(t) = e^{-itA_1}$ на $\mathcal{H}_1$, так что, в силу теоремы XI.82, существует оператор рассеяния Лакса—Филлипса. Далее, для любого оператора отождествления $J: \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$, равного тождественному преобразованию на $D_\pm^{r_0}$, волновые операторы $\Omega^\pm(A_0, A_1; J)$ существуют, полны и связаны с оператором рассеяния Лакса—Филлипса формулой (215).

Здесь следует отметить важные различия между подходом Лакса—Филлипса и теорией § 10. Для того чтобы построить оператор рассеяния Лакса—Филлипса, нужна абсолютная непрерывность всего спектра оператора A_1; после проведения дополнительной работы (теорема XI.115) можно ограничиться требованием непрерывности спектра. Для большинства дифференциальных операторов (кроме случая постоянных коэффициентов, когда можно применять преобразование Фурье) исключение точечного спектра представляет собой трудную задачу (см. теорему XIII.62). Таким образом, подход Лакса—Филлипса требует весьма детального знания свойств генератора группы, описывающей динамику со взаимодействием. В теории Като—Бирмана из § 10 такого детального знания не нужно. Конечно, при этом мы получаем и более слабый результат: $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \mathcal{H}_{ac}(A_1) = \operatorname{Ran}\Omega^-$, а не равенство $\mathcal{H}_{ac}(A_1) = \mathcal{H}_1$. Но для построения оператора рассеяния достаточно только равенства $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \operatorname{Ran}\Omega^-$.

Вернемся теперь к абстрактной теории и изучим свойства операторов рассеяния $\tilde{S}$ и $\hat{S}=\mathcal{F}\tilde{S}\mathcal{F}^{-1}$ в $L^2(\mathbb{R}; N)$.

Предложение. Пусть D_+ и D_- — уходящее и приходящее подпространства для унитарной группы $U(t)$ на $\mathcal{H}$. Тогда:

(a) оператор рассеяния $\tilde{S}$ в $L^2(\mathbb{R}; N)$ коммутирует со сдвигами;
(b) если D_+ и D_- взаимно ортогональны, то

$$\tilde{S}\colon L^2(-\infty, 0; N)\to L^2(-\infty, 0; N).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}_\pm$ — отображения $\mathcal{H}$, $U(t)$, $D_\pm$ на их уходящее и приходящее трансляционные представления. Тогда

$$\tilde{S}T_0(s)=\mathcal{R}_+\mathcal{R}_-^{-1}T_0(s)=\mathcal{R}_+U(s)\mathcal{R}_-^{-1}=T_0(s)\mathcal{R}_+\mathcal{R}_-^{-1}=T_0(s)\tilde{S},$$

где $T_0(s)$ — сдвиг на s единиц. Это доказывает (a). Доказательство (b) тоже просто. Действительно, если $f\in L^2(-\infty, 0; N)$, то $\mathcal{R}_-^{-1}f\in D_-$, и, поскольку D_- ортогонально D_+, получаем, что $\tilde{S}f=\mathcal{R}_+\mathcal{R}_-^{-1}f$ ортогонально $\mathcal{R}_+D_+$. Но $\mathcal{R}_+D_+\equiv L^2(0, \infty; N)$, так что $\tilde{S}f\in L^2(-\infty, 0; N)$. ∎

Как мы уже отмечали, если выполняются условия (0)—(3), то $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ — *ортогональные* уходящее и приходящее подпространства для $U(t)$. Некоторые свойства аналитичности $\hat{S}$ вытекают из следующей общей теоремы.

Теорема XI.89. Пусть N — сепарабельное гильбертово пространство и T — ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R}; N)$, коммутирующий со сдвигами и переводящий $L^2(-\infty, 0; N)$ в себя. Тогда $\hat{T}\equiv\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ действует в $L^2(\mathbb{R}; N)$ как оператор умножения на $\mathcal{L}(N)$-значную функцию $t(\sigma)$:

$$(\hat{T}f)(\sigma)=t(\sigma)f(\sigma). \tag{221}$$

Далее, существует $\mathcal{L}(N)$-значная функция $t(\sigma+iy)$, аналитическая по норме в открытой верхней полуплоскости и такая, что

(a) $\|t(\sigma+iy)\|_{\mathcal{L}(N)}\leqslant\|T\|$, $\sigma\in\mathbb{R}$, $y>0$;

(b) $t(\sigma+iy)$ слабо сходится к $t(\sigma)$ для почти всех $\sigma\in\mathbb{R}$ при $y\downarrow 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $N=\mathbb{C}$. Предположим, что T — оператор в $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, коммутирующий со сдвигами. Прежде всего мы утверждаем, что выполняется (221). Если это так, то $t\in L^\infty$ и $\|t\|_\infty=\|\hat{T}\|=\|T\|$.

Существуют два различных способа доказательства (221). Во-первых, заметим, что T — линейное отображение $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $L^2(\mathbb{R})$. Поскольку T коммутирует со сдвигами, легко проверить, что T

на самом деле есть непрерывное отображение $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ в $C^\infty(\mathbb{R})$. Таким образом, в силу задачи 9 к гл. IX, существует обобщенная функция $\tau \in \mathscr{S}'$, такая, что

$$T(f) = \tau * f$$

для всех $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Следовательно, существует обобщенная функция $t \in \mathscr{S}'$, такая, что (221) выполняется для всех $f \in \mathscr{S}$. Поскольку

$$\left| \int \overline{g(\sigma)}\, t(\sigma) f(\sigma)\, d\sigma \right| = |(g, \hat{T}f)| \leqslant \|\hat{T}\| \|g\|_2 \|f\|_2,$$

мы заключаем, что t — ограниченная функция и (221) справедливо для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$. При втором способе доказательства выводится перестановочность $\hat{T}$ с операцией умножения на $e^{i\sigma a}$ при всех a исходя из перестановочности T с операцией сдвига. С помощью предельного перехода это утверждение переносится на операцию умножения иа любую ограниченную измеримую функцию Равенство (221) в таком случае сразу же следует из теоремы XIII.84.

Первый шаг в доказательстве аналитичности — показать, что носитель τ лежит в $(-\infty, 0]$. Пусть j — положительная функция из $C_0^\infty(-\infty, 0)$, такая, что $\int j(x)\, dx = 1$. Определим $j_\delta(x) = \delta^{-1} j(x/\delta)$, $\tau_\delta = \tau * j_\delta$. Тогда

$$f \mapsto \tau_\delta * f = T(j_\delta * f)$$

переводит $L^2(-\infty, 0)$ в себя. Если показать, что носитель каждой функции τ_δ лежит в $(-\infty, 0]$, то же будет справедливо и для носителя τ, ибо $\tau_\delta \to \tau$. Таким образом, достаточно доказать нужное свойство носителя для бесконечно дифференцируемой функции τ. Предположим, что $\tau(a) \neq 0$ для некоторого $a > 0$ Тогда можно найти такие δ и θ, что $\operatorname{Re}(e^{i\theta}\tau(x)) > 0$ для всех $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Пусть χ - характеристическая функция интервала $(-\delta, 0)$; тогда $\operatorname{Re}\{e^{i\theta}(\tau * \chi)(x)\} > 0$ для $x \in (a, a+\delta)$, что противоречит предположению об инвариантности $L^2(-\infty, 0)$ относительно T. Таким образом, носитель τ лежит в $(-\infty, 0]$.

Поскольку носитель τ лежит на полупрямой, из теоремы IX.16 следует, что t есть граничное значение (в смысле обобщенных функций) аналитической функции $t(\sigma + iy)$ в верхней полуплоскости, удовлетворяющей неравенству

$$|t(\sigma + iy)| \leqslant C(1 + \sigma^2 + y^2)^{N_1} (1 + y^{-N_2})$$

с некоторыми C, N_1 и N_2. Мы хотим показать, что t ограничена в верхней полуплоскости, причем $\|t\|_\infty \leqslant \|T\|$. Пусть $\tau_\varepsilon(x) =$

$= \sqrt{2\pi}\, e^{-\varepsilon x^2}\tau(x)$. Введем

$$t_\varepsilon(\sigma+iy) \equiv (2\pi)^{-1/2}\int \tau_\varepsilon(x)\, e^{-i(\sigma+iy)x}\,dx = \int t(\sigma+iy-\mu)\,\frac{e^{-\mu^2/4\varepsilon}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\,d\mu.$$

Тогда $t_\varepsilon(\cdot+iy) \to t(\cdot+iy)$ поточечно при фиксированном $y>0$, так что достаточно получить неравенство $\|t_\varepsilon(\cdot+iy)\|_\infty \leqslant \|T\|$ для любых ε и y. Но поскольку τ есть обобщенная функция умеренного роста, она равна N-й производной некоторой полиномиально ограниченной непрерывной функции h. Следовательно, t_ε — целая функция и

$$|t_\varepsilon(\sigma+iy)| = \int |\lfloor D^N h\rfloor (e^{-\varepsilon x^2} e^{-i(\sigma+iy)x})|\,dx \leqslant C(1+|\sigma+iy|)^N.$$

Пусть $\delta>0$ — малое заданное число. Определим

$$t_{\varepsilon,\delta}(\sigma+iy) = (1-i\delta(\sigma+iy))^{-N}\, t_\varepsilon(\sigma+iy).$$

Если $Y \geqslant 2\delta^{-1}+1$, то при всех δ

$$\frac{1+|\sigma+iY|}{|1-i\delta(\sigma+iY)|} \leqslant \frac{2}{\delta}$$

для всех σ, так что

$$\|t_{\varepsilon,\delta}(\cdot+iY)\|_\infty \leqslant C(2/\delta)^N,$$
$$\|t_{\varepsilon,\delta}(\cdot+i0)\|_\infty \leqslant \|t_\varepsilon(\cdot+i0)\|_\infty \leqslant \|T\|.$$

Поскольку $t_{\varepsilon,\delta}$ ограничена, по теореме Адамара о трех прямых получаем неравенство

$$\|t_{\varepsilon,\delta}(\cdot+iy)\|_\infty \leqslant \|T\|^{1-y/Y}\,[C(2/\delta)^N]^{y/Y}$$

для каждого y, для которого $0<y<Y$. Фиксируя y и устремляя Y к бесконечности, получаем

$$\|t_{\varepsilon,\delta}(\cdot+iy)\|_\infty \leqslant \|T\|.$$

Наконец, полагая $\delta\to 0$, а затем $\varepsilon\to 0$, получаем, что $\|t(\cdot+iy)\|_\infty \leqslant$ $\leqslant \|T\|$ для любого $y>0$.

Непрерывность на вещественной оси вытекает из общего результата комплексного анализа, который мы сформулируем после окончания доказательства теоремы.

Пусть теперь N — произвольное гильбертово пространство. При $\varphi,\ \eta\in N$

$$T_{\varphi,\eta}\colon f \longmapsto (\varphi,\ T(f\eta))_N$$

отображает $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2(-\infty, 0)$ в себя. Поэтому, в силу результатов, относящихся к рассмотренному только что скалярному случаю,

$$(T_{\varphi,\eta}(\check{f}))\hat{\ } = t_{\varphi,\eta}(\sigma) f(\sigma),$$

где $t_{\varphi,\eta}(\sigma+iy)$ аналитична в верхней полуплоскости, имеет $t_{\varphi,\eta}(\sigma)$ в качестве граничного значения и удовлетворяет неравенству

$$|t_{\varphi,\eta}(\sigma+iy)| \leqslant \|T_{\varphi,\eta}\| \leqslant \|T\| \|\varphi\|_N \|\eta\|_N$$

в замкнутой верхней полуплоскости. Поскольку отображение $\langle\varphi, \eta\rangle \longmapsto T_{\varphi,\eta}$ полуторалинейно, таково же отображение $\langle\varphi, \eta\rangle \longmapsto t_{\varphi,\eta}(\sigma+iy)$ для каждого σ и $y \geqslant 0$. Таким образом, в силу леммы Рисса, для каждой точки $\sigma+iy$ существует ограниченный оператор $t(\sigma+iy)$ на N, такой, что

$$t_{\varphi,\eta}(\sigma+iy) = (\varphi, t(\sigma+iy)\eta)_N.$$

При этом операторная функция $t(\sigma+iy)$ слабо аналитична и $\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ есть оператор умножения на $t(\sigma)$ в $L^2(\mathbb{R}; N)$. Аналитичность по норме выводится из равномерной ограниченности $\|t(\sigma+iy)\|$ с помощью методов, основанных на теореме VI.4 (задача 123). Поскольку поточечным пределом $t_{\varphi,\eta}(\sigma+iy)$ при $y \downarrow 0$ для почти всех σ служит $t_{\varphi,\eta}(\sigma)$, пределом $t(\sigma+iy)$ в слабой операторной топологии на N для почти всех σ служит $t(\sigma)$. ∎

Непрерывность $t(\sigma+iy)$ вплоть до вещественной оси, упомянутая в приведенном выше доказательстве, вытекает из следующего утверждения (см. ссылки в Замечаниях).

Лемма (теорема Фату). Если $F(z)$ — аналитическая в верхней полуплоскости функция и

$$\sup_{y>0} \int |F(x+iy)|^p\, dx < \infty$$

для некоторого $p > 1$ (допускается $p = \infty$), то для почти всех $x \in \mathbb{R}$ существует

$$\lim_{y\downarrow 0} F(x+iy) \equiv f(x),$$

причем $f \in L^p$ и $F(\cdot + iy) \to f(\cdot)$ в смысле обобщенных функций.

Применяя теорему XI.89 к интересующему нас случаю, получаем

Следствие. Предположим, что существуют ортогональные уходящее и приходящее подпространства для унитарной группы $U(t)$ на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда существует $\mathcal{L}(N)$-значная функция $s(\sigma+iy)$ на замкнутой верхней полуплоскости, такая, что

(1) значения $s(\sigma+i0)$ почти всюду унитарны;

(2) $s(\sigma+iy)$ аналитична по норме в открытой верхней полуплоскости, и

$$\|s(\sigma+iy)\|_{\mathscr{L}(N)} \leqslant 1;$$

(3) $s(\sigma+iy)$ сильно сходится к $s(\sigma)$ почти всюду при $y \downarrow 0$, и для всех $f \in L^2(\mathbb{R};\ N)$

$$(\hat{S}f)(\sigma) = s(\sigma) f(\sigma),$$

причем $\hat{S}$ переводит $\mathscr{H}_+^2(\mathbb{R};\ N)$ в себя.

Доказательство. Все перечисленные утверждения, кроме *сильной* непрерывности вплоть до вещественной оси, немедленно вытекают из теоремы XI.89 и предыдущего предложения. Сильная непрерывность обусловлена слабой непрерывностью, поскольку

$$\begin{aligned} \|s(\sigma+iy)\varphi - s(\sigma)\varphi\|_N^2 = \\ = \|s(\sigma+iy)\varphi\|_N^2 - (s(\sigma+iy)\varphi,\ s(\sigma)\varphi)_N - \\ -(s(\sigma)\varphi,\ s(\sigma+iy)\varphi)_N + \|s(\sigma)\varphi\|_N^2 \to 0, \end{aligned}$$

ибо $\|s(\sigma+iy)\| \leqslant 1 = \|s(\sigma)\|$. ∎

Так же как и в квантовомеханическом случае, обсуждавшемся в § 7, для приложений весьма важны свойства аналитического продолжения оператора рассеяния. Поэтому нужны общие методы изучения $s(z)$. Поскольку на вещественной оси значения $s(z)$ суть унитарные операторы, естественно попытаться продолжить функцию $s(z)$ в нижнюю полуплоскость с помощью формулы

$$s(z) = [s(\bar{z})^*]^{-1}, \qquad \operatorname{Im} z < 0.$$

Но для того чтобы эта формула приводила к цели, нужно чтобы нуль лежал в резольвентном множестве $s(\bar{z})$, т. е. чтобы $s(\bar{z})$ была *регулярной*. Для проверки этого свойства Лакс и Филлипс ввели специальную полугруппу.

Пусть $\mathscr{K} = (D_+ \oplus D_-)^\perp$ и $P_{\mathscr{K}}$ — ортогональный проектор на $\mathscr{K}$. Введем

$$Z(t) = P_{\mathscr{K}} U(t) P_{\mathscr{K}}, \qquad t \geqslant 0. \tag{222}$$

Ясно, что $Z(t)$ есть сужение динамической группы на состояния, которые не являются ни приходящими в прошлом, ни уходящими в будущем, поэтому не удивительно, что $Z(t)$ содержит сведения о резонансах. Также ясно, что $Z(t)$ есть сильно непрерывное семейство сжимающих операторов. Более того, если $\varphi, \psi \in \mathscr{K}$ и $t, s \geqslant 0$, то $U(t)\varphi \in D_+^\perp$ и $U(-s)\psi \in D_-^\perp$ (поскольку $U(t)$ оставляет $D_\pm$ инвариантными при $\pm t \geqslant 0$). Итак,

$$(U(-s)\varphi,\ P_{\mathscr{K}} U(t)\psi) = (U(-s)\varphi,\ U(t)\psi), \qquad t,\ s \geqslant 0,$$

поскольку $P_{\mathcal{K}} = P_- P_+$, где P_+ (соответственно P_-) — проектор на ортогональное *дополнение* к D_+ (соответственно к D_-). Эквивалентно, $P_{\mathcal{K}} U(s) P_{\mathcal{K}} U(t) P_{\mathcal{K}} = P_{\mathcal{K}} U(s+t) P_{\mathcal{K}}$, или $Z(t)Z(s) = Z(t+s)$. Таким образом, $Z(t)$ — сильно непрерывная полугруппа сжатий на $\mathcal{K}$, и потому в $\mathcal{K}$ существует m-аккретивный оператор B со спектром $\sigma(B) \subset \{z \subset \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, такой, что $Z(t) = e^{-Bt}$. Поскольку спектр $U(t)$ абсолютно непрерывен,

$$(Z(t)\varphi, \psi) \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to \infty. \tag{223}$$

Более того,

$$Z(t) = P_+ U(t) P_-, \qquad t \geqslant 0. \tag{224}$$

В самом деле, из инвариантности D_+ относительно $U(t)$ вытекает равенство $P_+ U(t) P_+ = P_+ U(t)$, а поскольку $U(-t)$ оставляет инвариантным D_-, то $P_- U(t) P_- = U(t) P_-$, и потому

$$P_{\mathcal{K}} U(t) P_{\mathcal{K}} = P_- P_+ U(t) P_+ P_- = P_+ P_- U(t) P_- = P_+ U(t) P_-.$$

Полугруппа $Z(t)$ важна из-за того, что резольвентное множество оператора B просто связано со свойством обратимости $s(z)$.

Теорема XI.90. Пусть D_+ и D_- — ортогональные уходящее и приходящее подпространства для унитарной группы $U(t)$ на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть полугруппа $Z(t) = e^{-tB}$ определена с помощью (222). Тогда если $\operatorname{Re} z > 0$, то $z \in \rho(B)$ в том и только том случае, когда $s(i\bar{z})$ — регулярный оператор.

Дадим набросок доказательства того, что $s(i\bar{z}_0)^*$ обладает нулевым собственным значением тогда и только тогда, когда z_0 есть собственное значение B. По определению,

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \{\chi \mid \mathcal{R}_+\chi \in L^2(-\infty, 0; N);\ \mathcal{R}_-\chi \in L^2(0, \infty; N)\} = \\ &= \{\chi \mid \mathcal{R}_+\chi \in L^2(-\infty, 0; N);\ \tilde{S}(\mathcal{R}_-\chi) = \mathcal{R}_+\chi \in \tilde{S}L^2(0, \infty; N)\}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{R}_+[\mathcal{K}] \equiv \mathcal{K}_+ = \{f \mid f \in L^2(-\infty, 0; N),\ \tilde{S}^* f \in L^2(0, \infty; N)\}.$$

Пусть далее $Z_+(t) = \mathcal{R}_+ Z(t) \mathcal{R}_+^{-1}$. Заметим, что для $f \in \mathcal{K}_+$

$$Z_+(t) f = (\mathcal{R}_+ P_+ \mathcal{R}_+^{-1})(T_0(t) f) = \chi_{(-\infty, 0)} T_0(t) f,$$

т. е. если $f \in \mathcal{K}_+$, то

$$(Z_+(t) f)(s) = \begin{cases} f(s-t) & \text{при} \quad s \leqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad s > 0. \end{cases}$$

Далее, $Bx = z_0 x$ тогда и только тогда, когда $Z(t)x = e^{-z_0 t}x$. Более того, $f(s-t) = e^{-z_0 t} f(s)$ $(s \leqslant 0)$ тогда и только тогда, когда $f(s) = e^{z_0 s}\chi_{(-\infty, 0)}(s)\, n$ при некотором $n \in N$. Итак, z_0 есть собственное значение B тогда и только тогда, когда $e^{z_0 s}\chi_{(-\infty,0)}(s)\,n \equiv f_0$ лежат в $\mathcal{K}^{\bullet}_{+}$ при некотором $n \in N$. Поскольку f_0 очевидным образом лежит в $L^2(-\infty, 0; N)$, то $f_0 \in \mathcal{K}^{\bullet}_{+}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{S}^{*}f_0 \in L^2(0, \infty; N)$. А это справедливо тогда и только тогда, когда $s(\bar{z})^{*}\hat{f}_0(z)$ аналитична в нижней полуплоскости. Но $\hat{f}_0(z) = (2\pi)^{-1/2}(z_0 - iz)^{-1}n$ имеет полюс в точке $z = -iz_0$, так что $s(\bar{z})^{*}\hat{f}_0(z)$ аналитична в нижней полуплоскости тогда и только тогда, когда $s(i\bar{z}_0)^{*}n = 0$. Этим завершается доказательство одной части теоремы XI.90 и выясняются причины того, почему она верна в целом.

Пример 3. Для иллюстрации теоремы XI.90 рассмотрим простейший пример. Пусть $U(t)$ — сдвиг на $L^2(-\infty, \infty)$. Фиксируем $r_0 > 0$, и пусть $D_+ = L^2(r_0, \infty)$, $D_- = L^2(-\infty, -r_0)$. Тогда D_+ — уходящее, а D_- — приходящее подпространства. Простая выкладка показывает, что $\tilde{S} = U(-2r_0)$ и $s(k) = e^{2ikr_0}$. Функция s — целая, D_+ и D_- ортогональны, и $\mathcal{K}^{\bullet} = L^2(-r_0, r_0)$. Ясно, что $Z(t) = 0$, если $t > 2r_0$. В частности,

$$(B+\lambda)^{-1} = \int_0^\infty Z(t)\,e^{-\lambda t}\,dt$$

продолжается с $\operatorname{Re}\lambda > 0$ до целой функции. Таким образом, $\sigma(B) = \varnothing$, как и требуется теоремой XI.90.

Теорема XI.90 сводит вопрос об аналитичности к изучению B.

Теорема XI.91. Предположим, что для некоторых положительных T и k оператор $Z(T)(k+B)^{-1}$ компактен. Тогда спектр B чисто точечный, а функция $s(z)$ голоморфна на вещественной оси и имеет мероморфное продолжение в нижнюю полуплоскость с полюсами в каждой точке z, для которой $iz \in \sigma(B)$.

Идея доказательства этой теоремы основана на применении теоремы об отображении спектра (теорема VII.1), из которой выводится, что спектр B чисто точечный. В силу теоремы XI.90, оператор $s(z)$ обратим в любой точке верхней полуплоскости, исключая те z, для которых $i\bar{z}$ есть собственное значение B. Таким образом, функция

$$s(z) = [s(\bar{z})^{*}]^{-1}$$

аналитична в нижней полуплоскости, за исключением точек z, для которых iz есть собственное значение B. В силу приведенного выше выражения, $s(z)$ может иметь только полюсы, поскольку $s(\bar{z})^*$ может иметь только нули конечного порядка. Наконец, в силу (223), у B не может быть собственных значений с $\operatorname{Re}\mu = 0$. Отсюда следует, что $(s(\bar{z})^*)^{-1}$ аналитична в открытом множестве под вещественной осью. Поскольку $s(z)$ и $(s(\bar{z})^*)^{-1}$ имеют одинаковые ограниченные граничные значения при подходе к вещественной оси сверху и снизу, они служат, согласно принципу симметрии Шварца, аналитическим продолжением друг друга. Таким образом, $s(z)$ аналитична в окрестности вещественной оси и мероморфна в нижней полуплоскости.

Полные доказательства теорем XI.90 и XI.91 можно найти в ссылках, указанных в Замечаниях.

Пример 4. Цель этого примера — показать, каким образом можно на практике проверять предположения теоремы XI.91. Мы рассмотрим рассеяние на препятствии Ω с гладкой границей и условиями Дирихле на ней, обсуждавшимися в примере 3 § 10, и будем пользоваться введенными там обозначениями. Роль оператора A_1 в этом случае играет лапласиан $H_{\Gamma,\,D}$ из § XIII.15. Отсутствие у него сингулярного спектра будет доказано в дополнении к этому разделу. Зная этот результат, анализ примера 2 можно распространить на интересующий нас сейчас случай. Лакс и Филлипс при решении этой задачи не требовали заранее отсутствия сингулярного спектра. Вместо этого они более сложным методом проверяют (3), а затем выводят отсутствие этой части спектра из теоремы XI.82. Описываемый здесь подход можно использовать также при проверке предположений теоремы XI.91 в случае рассеяния в неоднородной среде (пример 2), но все доказательства при этом становятся более сложными ввиду того, что естественный оператор отождествления не изометричен (задача 124).

Как и в примере 1, D_- и D_+ суть приходящее и уходящее подпространства для группы $W_0(t)$ свободного движения. Возьмем r_0 таким, чтобы шар $B(r_0)$ содержал внутри себя Ω, и определим

$$D_+^{r_0} = W_0(r_0)D_+, \qquad D_-^{r_0} = W_0(-r_0)D_-.$$

Поскольку функции из $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ обращаются в нуль в $B(r_0)$, $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ суть подпространства $\mathcal{H}_0$, изометрически вложенные в $\mathcal{H}_1$. Можно показать, что $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ суть уходящее и приходящее подпространства для $W_1(t)$ на $\mathcal{H}_1$ и что выполнены условия теоремы XI.86. В частности, $D_\pm^{r_0}$ ортогональны. Пусть $P_\pm^{r_0}$ — проекторы на $(D_\pm^{r_0})^\perp$ в $\mathcal{H}_1$. Введем $Z(t) = P_+^{r_0}W_1(t)P_-^{r_0}$. Предположим, что $\varphi \in \mathscr{H}_1$ и $\mu > 0$. Тогда, в силу (X.98),

$$Z(2r_0)(\mu+B)^{-1}\varphi = \int_0^\infty e^{-\mu t} Z(t+2r_0)\varphi dt =$$

$$= P_+^{r_0} W_1(2r_0) \int_0^\infty e^{-\mu t} W_1(t) P_-^{r_0}\varphi dt = iP_+^{r_0} W_1(2r_0)(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi =$$

$$= iP_+^{r_0} W_1(2r_0) P_-^{r_0} (i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi = \tag{225}$$

$$= iP_+^{r_0} [W_1(2r_0) - W_0(2r_0)] P_-^{r_0} (i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi = \tag{226}$$

$$= iP_+^{r_0} [W_1(2r_0) - W_0(2r_0)] (i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi. \tag{227}$$

Равенства (225) и (227) справедливы благодаря тому, что $P_-^{r_0} W_1(t) P_-^{r_0} = W_1(t) P_-^{r_0}$ при $t \geqslant 0$, откуда вытекает равенство

$$P_-^{r_0} (i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0} = (i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0},$$

а (226) выполняется в силу того, что $P_+^{r_0} W_0(2r_0) P_-^{r_0} = 0$. Чтобы в этом у'едиться, заметим, что вектор $P_-^{r_0} f \in \mathscr{H}_0$ ортогонален $D_-^{r_0}$ в $\mathscr{H}_0$ для любого $f \in \mathscr{H}_1$ в силу изометричности вложения $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_0$. Таким образом, носитель $P_-^{r_0} f$ в трансляционном представлении лежит в $(-r_0, \infty)$. Следовательно, носитель представителя $W_0(2r_0) P_-^{r_0} f$ лежит в (r_0, ∞), откуда вытекает, что $W_0(2r_0) P_-^{r_0} f \in D_+^{r_0}$.

Теперь для любого $g \in \mathscr{H}_1$

$$W_0(2r_0) g - W_1(2r_0) g = 0 \qquad \text{для} \qquad |x| \geqslant 3r_0,$$

поскольку скорость распространения возмущений равна единице. В итоге, используя равенство $\|\psi\|_0 = \|\psi\|_1$, можно провести следующую оценку:

$$\|Z(2r_0)(\mu+B)^{-1}\varphi\|_1 \leqslant \|[W_1(2r_0) - W_0(2r_0)](i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_0 =$$

$$= \|[W_1(2r_0) - W_0(2r_0)](i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_0^{(3r_0)} \leqslant$$

$$\leqslant \|W_1(2r_0)(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_1^{(3r_0)} + \|W_0(2r_0)(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_0^{(3r_0)} \leqslant$$

$$\leqslant \|(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_0^{(5r_0)} + \|(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_0^{(5r_0)} =$$

$$= 2\|(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_1^{(5r_0)},$$

где через $\|\cdot\|^{(R)}$ обозначена часть нормы внутри шара радиуса R и использованы часть (а) леммы 1 в примере 2 и аналогичный результат для $W_1(t)$ (его доказательство аналогично проведенному выше). Для $\psi = (i\mu - A_1)^{-1}\varphi$, где $\|\varphi\| \leqslant 1$, справедлива оценка

$$\|A_1\psi\|_1 + \|\psi\|_1 \leqslant \|A_1(i\mu - A_1)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}_1)} + \|(i\mu - A_1)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}_1)}.$$

Таким образом, используя следствие 2 теоремы XIII.74, мы видим, что множество таких ψ компактно в $\|\cdot\|_1^{(5r_0)}$-норме. Значит, $Z(2r_0)(\mu+B)^{-1}$ — компактный оператор, и потому условия теоремы XI.91 выполнены.

Этот пример детально изучен, и относительно него известна масса подробностей. Например, $\mu\in\sigma(B)$ тогда и только тогда, когда приведенное волновое уравнение

$$\Delta v-\mu^2 v=0,\qquad v=0 \text{ на } \partial D, \tag{228}$$

имеет решение v, такое, что пара $\langle v, -\mu v\rangle$ является в конечном счете уходящей, т. е. $W_0(\rho)\langle v, -\mu v\rangle\in D_+$ для достаточно больших ρ. Детальному изучению соотношений между такими собственными значениями и геометрией препятствия посвящено большое число работ. Наконец, оператор рассеяния $\hat{S}$ имеет следующий вид (напомним, что $N=L^2(S^2)$):

$$(\hat{S}f)(\sigma, \omega)=s(\sigma)f(\sigma, \omega)=f(\sigma, \omega)-\frac{i\sigma}{2\pi}\int\limits_{|\theta|=1}\overline{k(\theta, \omega; \sigma)}\,f(\sigma, \theta)\,d\theta,$$

где $k(\theta, \omega; \sigma)$ — аналитическая функция своих переменных, связанная с асимптотическим поведением решений (228). Эта связь аналогична связи между квантовомеханической T-матрицей и асимптотикой решений уравнения Липпмана — Швингера.

Примеры 1, 2 и 4 ясно показывают, что метод Лакса — Филлипса наиболее естественно применим в случае классических волновых уравнений, для которых справедлив принцип Гюйгенса, т. е. в пространствах нечетной размерности, большей единицы. Однако эту же теорию можно с успехом применять и в ряде других случаев (см. ссылки в Замечаниях).

Пример 5 (приложение к уравнению Шредингера). В качестве последнего примера мы обсудим, каким образом теорию Лакса — Филлипса можно применить к изучению рассеяния, описываемого уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t}=(-\Delta+V)u.$$

Основная идея состоит в применении принципа инвариантности для волновых операторов к волновым операторам классической системы, описываемой уравнением

$$\begin{gathered} u_{tt}-\Delta u+V(x)u=0,\\ u(x, 0)=f(x),\quad u_t(x, 0)=g(x). \end{gathered} \tag{229}$$

Мы не получим здесь ни одного результата, касающегося квантовомеханического оператора рассеяния, который не был бы уже найден с большей общностью в § 4, 6 и 7, но весьма интересно прийти к этим результатам новым способом. При этом подчеркнем, что для применения теории Лакса—Филлипса нам потребуется подробная информация о спектре оператора $-\Delta+V$.

Пусть $V(x)$ — потенциал с компактным носителем в $\mathbb{R}^3$ и $V\in L^2(\mathbb{R}^3)$, $V(x)\geqslant 0$. Прежде всего нам нужно решить (229). Это можно сделать по аналогии со случаем неоднородной среды. Поскольку $V\in L^2$, этот потенциал $-\Delta$-ограничен (см. теорему X.15), так что $-\Delta+V(x)$ самосопряжен в существенном. Далее,

$$((-\Delta+V)h,\ h)\geqslant(-\Delta h,\ h)\geqslant 0,$$

так что если $B_1=\sqrt{-\Delta+V}$, то $\|B_1h\|_2\geqslant\|B_0h\|_2$. Более того, $\mathscr{H}_1=[D(B_1)]\oplus L^2(\mathbb{R}^3)=\mathscr{H}_0$, поскольку области определения $-\Delta$ и $-\Delta+V$ как форм совпадают. Как и раньше, если определить $W_1(t)=e^{-itA_1}$, где

$$A_1=i\begin{pmatrix}0 & I\\ -B_1^2 & 0\end{pmatrix},$$

то первая компонента $W_1(t)\langle f,\ g\rangle$ будет слабым решением (229) и классическим решением, если f, g и V достаточно гладки.

Проверка условий (i)—(iii) проводится так же, как и в примерах 2 и 4. Выберем r_0 таким, чтобы шар $B(r_0)$ содержал внутри себя носитель $V(x)$. Введем $J\colon \mathscr{H}_0\to\mathscr{H}_1$ как тождественное преобразование на тех $\varphi\in\mathscr{H}_0$, носители которых лежат вне $B(r_0)$, и как произвольную ограниченную инъекцию на ортогональном дополнении к множеству таких φ. Наконец, пусть $D_+^{r_0}=W_0(r_0)D_+$ и $D_-^{r_0}=W_0(-r_0)D_-$. Как и в предшествующих примерах, свойства (i) и (ii) группы $U_1(t)$ и ортогональность $D_+^{r_0}$, $D_-^{r_0}$ вытекают из соответствующих свойств $W_0(t)$. Таким образом, если доказать (iii), то будут проверены все условия теоремы XI.86. Для доказательства (iii) заметим, что решения (229) описывают распространение волн с единичной скоростью, так что по-прежнему справедливы леммы 1 и 2 примера 2, так же как и утверждение о локальной компактности из леммы 3. Таким образом, остается только показать, что спектр $-\Delta+V$ абсолютно непрерывен, а это делается при помощи тех же теорем, что и в примере 2. В итоге, в силу теоремы XI.82, у нас есть операторы рассеяния Лакса—Филлипса S, $\tilde{S}$, $\hat{S}$, а, в силу XI.86, $\Omega^{\pm}$ существуют, полны и выполнено соотношение (215).

Рассуждения, подобные тем, что использовались в примере 4, доказывают компактность $Z(2r_0)(\mu+B)^{-1}$ при $\operatorname{Re}\mu>0$, где $Z(t)=P_+W_1(t)P_-$, а B — генератор этой полугруппы. Таким образом, $(\hat{S}f)(\sigma)=s(\sigma)f(\sigma)$ для всех $f\in L^2(\mathbb{R};\ S^2)$, где $s(\sigma)$ мероморфна во всей комплексной плоскости (с полюсами в качестве особенностей) и аналитична на вещественной оси и в верхней полуплоскости.

Заметим, что для всех начальных данных $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и достаточно больших $|t|$

$$W_1(-t)\, J W_0(t)\, \varphi = W_1(-t)\, W_0(t)\, \varphi,$$

причем зависимость от t отсутствует. Так же как в примерах 2 и 4, это вытекает из выполнения принципа Гюйгенса для $W_0(t)$. С помощью теоремы XI.23 можно установить, что существуют сильные пределы

$$\Omega^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{itA_1^2} e^{-itA_0^2},$$

равные уже введенным волновым операторам при действии на функции $\varphi \in E_{[0,\infty)}(A_0)$. Но

$$A_0^2 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_1^2 = \begin{pmatrix} -\Delta + V & 0 \\ 0 & -\Delta + V \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\Omega^\pm = \begin{pmatrix} \Omega_S^\pm(-\Delta + V, -\Delta) & 0 \\ 0 & \Omega_S^\pm(-\Delta + V, -\Delta) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, волновые операторы Шредингера существуют и полны.

Дальнейший анализ показывает, что слои S-оператора Шредингера имеют вид

$$e^{-i2r_0E} s(\sqrt{E}),$$

где $s(\cdot)$ суть $\mathscr{L}(L^2(S^2))$-слои оператора $\tilde{S}$ Лакса—Филлипса. Из обсуждавшихся выше свойств $s(\cdot)$ вытекает, что $e^{i2r_0E} s(\sqrt{E})$ — мероморфная функция на двулистной римановой поверхности, аналитическая на «физическом» листе с полюсами на «нефизическом» листе.

Прежде чем закончить обсуждение этого примера, полезно сделать несколько замечаний. Во-первых, для того чтобы применить метод Лакса—Филлипса, нам потребовалось довольно много непростых сведений о системе со взаимодействием, а именно сведения о спектре оператора $-\Delta + V$. Во-вторых, мы изучили только случай потенциалов $V \in L^2$, неотрицательных и имеющих компактный носитель. Ограничение $V \in L^2$ не слишком серьезно. Второе ограничение можно снять, обобщая изложенное выше. Условие $V \geqslant 0$ понадобилось для того, чтобы был определен квадратный корень из оператора $-\Delta + V$ Но если $V \in L^2$ имеет компактный носитель, то $-\Delta + V$ имеет не более конечного числа отрицательных собственных значений (теорема XIII 6), и на дополнении к подпространству, натянутому на соответствующие собственные функции, $-\Delta+V$ неотрицателен. Применяя уже описанную технику, можно убедиться, что, как и следовало ожидать, функция $e^{-i2r_0E}s(\sqrt{E})$ имеет дополнительные полюсы на физическом листе точно в отрицательных собственных значениях. Третье ограничение — компактность носителя V — самое серьезное, поскольку считается, что в природе такие потенциалы не встречаются. И наконец, для всего, что мы делали в этом разделе, было важно, чтобы системы со взаимодействием и без *совпадали* вне ограниченных областей.

Дополнение к § XI.11. Прием скручивания

В этом дополнении мы хотим показать, что сингулярный спектр лапласиана Дирихле $H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$ в области, внешней к ограниченной, пуст Мы воспользуемся методом (прием скручивания), применимым и во многих других случаях; см. ссылки в Замечаниях.

Теорема XI.91 $^1/_2$. Пусть Γ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, такое, что $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$ связно. Пусть $H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$ — лапласиан Дирихле, определяемый в § XIII.15. Фиксируем $a>0$. Пусть $X_a^{(\Gamma)}$ — гильбертово пространство функций $f\in L^2(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma)$, для которых $e^{a|x|}f\in L^2$. Тогда существуют дискретное в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ множество $\mathscr{E}$ и окрестность N вещественной оси $\mathbb{R}$, такие, что $(H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}-k^2)^{-1}$ можно продолжить как аналитическую $\mathscr{L}(X_a^{(\Gamma)},\ X_{-a}^{(\Gamma)})$-значную функцию из области $\{k\,|\,\mathrm{Im}\,k>0\}$ в $N\setminus\mathscr{E}$. В частности, спектр $H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$ абсолютно непрерывен

Доказательство. Поскольку $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$ связно, $H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$ в силу теоремы XIII.56 не имеет положительных собственных значений (см. обсуждение, предшествующее теореме XIII.57). В силу теоремы XIII.20, утверждение о $\mathscr{L}(X_a^{(\Gamma)},\ X_{-a}^{(\Gamma)})$-аналитичности в $N\setminus\mathscr{E}$ доказывает пустоту $\sigma_{\mathrm{sing}}(H_{\Gamma;\,\mathrm{D}})$, ибо в качестве X_a можно взять плотное множество D, а в качестве $[a,\ b]$ — любой замкнутый интервал, не пересекающийся с $\mathscr{E}$ Поскольку $H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}\geqslant 0$, а его ядро содержит лишь нуль, у $H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$ нет неположительных собственных значений. Таким образом, если доказать утверждение о $\mathscr{L}(X_a^{(\Gamma)},\ X_{-a}^{(\Gamma)})$-аналитичности, из него будет вытекать абсолютная непрерывность спектра.

Определим в $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^n)\oplus L^2(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma)$ оператор H_α, полагая

$$H_\alpha\langle\varphi,\ \psi\rangle=\langle(-\Delta+\alpha x^2)\,\varphi,\ H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}\psi\rangle.$$

Предположим, что $(H_\alpha-k^2)^{-1}$ имеет $\mathscr{L}(X_a\oplus X_a^{(\Gamma)},\ X_{-a}\oplus X_{-a}^{(\Gamma)})$-продолжение на $N_\alpha\setminus\mathscr{E}_\alpha$, где каждое множество $\mathscr{E}_\alpha$ может иметь конечные точки накопления, но при этом для любых $\varepsilon>0$ и $a>0$ найдется такое α, что множество $[\mathscr{E}_\alpha\cap(-a,\ a)]\setminus(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ конечно. Тогда нужный результат получить очень просто.