венные функции, $-\Delta+V$ неотрицателен. Применяя уже описанную технику, можно убедиться, что, как и следовало ожидать, функция $e^{-i2r_0E}s(\sqrt{E})$ имеет дополнительные полюсы на физическом листе точно в отрицательных собственных значениях. Третье ограничение — компактность носителя V — самое серьезное, поскольку считается, что в природе такие потенциалы не встречаются. И наконец, для всего, что мы делали в этом разделе, было важно, чтобы системы со взаимодействием и без *совпадали* вне ограниченных областей.

Дополнение к § XI.11. Прием скручивания

В этом дополнении мы хотим показать, что сингулярный спектр лапласиана Дирихле $H_{\Gamma;\,D}$ в области, внешней к ограниченной, пуст Мы воспользуемся методом (прием скручивания), применимым и во многих других случаях; см. ссылки в Замечаниях.

Теорема XI.91 $^1/_2$. Пусть Γ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, такое, что $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$ связно. Пусть $H_{\Gamma;\,D}$ — лапласиан Дирихле, определяемый в § XIII.15. Фиксируем $a>0$. Пусть $X_a^{(\Gamma)}$ — гильбертово пространство функций $f\in L^2(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma)$, для которых $e^{a|x|}f\in L^2$. Тогда существуют дискретное в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ множество $\mathscr{E}$ и окрестность N вещественной оси $\mathbb{R}$, такие, что $(H_{\Gamma;\,D}-k^2)^{-1}$ можно продолжить как аналитическую $\mathscr{L}(X_a^{(\Gamma)},\ X_{-a}^{(\Gamma)})$-значную функцию из области $\{k\,|\,\operatorname{Im}k>0\}$ в $N\setminus\mathscr{E}$. В частности, спектр $H_{\Gamma;\,D}$ абсолютно непрерывен

Доказательство. Поскольку $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$ связно, $H_{\Gamma;\,D}$ в силу теоремы XIII.56 не имеет положительных собственных значений (см. обсуждение, предшествующее теореме XIII.57). В силу теоремы XIII.20, утверждение о $\mathscr{L}(X_a^{(\Gamma)},\ X_{-a}^{(\Gamma)})$-аналитичности в $N\setminus\mathscr{E}$ доказывает пустоту $\sigma_{\rm sing}(H_{\Gamma;\,D})$, ибо в качестве X_a можно взять плотное множество D, а в качестве $[a,\ b]$ — любой замкнутый интервал, не пересекающийся с $\mathscr{E}$ Поскольку $H_{\Gamma;\,D}\geqslant 0$, а его ядро содержит лишь нуль, у $H_{\Gamma;\,D}$ нет неположительных собственных значений. Таким образом, если доказать утверждение о $\mathscr{L}(X_a^{(\Gamma)},\ X_{-a}^{(\Gamma)})$-аналитичности, из него будет вытекать абсолютная непрерывность спектра.

Определим в $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^n)\oplus L^2(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma)$ оператор H_α, полагая

$$H_\alpha\langle\varphi,\ \psi\rangle=\langle(-\Delta+\alpha x^2)\varphi,\ H_{\Gamma;\,D}\psi\rangle.$$

Предположим, что $(H_\alpha-k^2)^{-1}$ имеет $\mathscr{L}(X_a\oplus X_a^{(\Gamma)},\ X_{-a}\oplus X_{-a}^{(\Gamma)})$-продолжение на $N_\alpha\setminus\mathscr{E}_\alpha$, где каждое множество $\mathscr{E}_\alpha$ может иметь конечные точки накопления, но при этом для любых $\varepsilon>0$ и $a>0$ найдется такое α, что множество $[\mathscr{E}_\alpha\cap(-a,\ a)]\setminus(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ конечно. Тогда нужный результат получить очень просто.

Введем оператор скручивания U на $\mathscr{H}$ так: возьмем такое R, чтобы $\Gamma\subset\{x\mid |x|<R\}$, и такую C^∞-функцию u на $\mathbb{R}^n$ со значениями во множестве унитарных 2×2-матриц, что

$$u(x)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \text{если}\quad |x|>2R,$$
$$u(x)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \text{если}\quad |x|<R.$$

Определим U соотношением $(U\psi)(x)=u(x)\psi(x)$. Тогда U — унитарный оператор на $\mathscr{H}$ и на $X_{\pm a}\bigoplus X^{(\Gamma)}_{\pm a}$, так что нужное свойство продолжимости достаточно проверить для $UH_\alpha U^{-1}$. Но $\tilde{H}\equiv UH_\alpha U^{-1}=T_\alpha+V_\alpha$, где

$$T_\alpha\langle\varphi,\ \psi\rangle=\langle-\Delta\varphi,\ (H_{\Gamma;\,D}+\alpha x^2)\psi\rangle,$$
$$V_\alpha=f_\alpha\cdot p+g_\alpha;$$

здесь $p=-i\nabla$, а f_α и g_α суть 2×2-матрицы C_0^∞-функций. Пусть $S_\alpha=\sigma(H_{\Gamma;\,D}+\alpha x^2)$. Это множество дискретно (см. § XIII.14). Согласно анализу, проведенному в дополнении к § XI.6 (см., в частности, теорему XI.45), $(\tilde{H}_\alpha-k^2)^{-1}$ имеет $\mathscr{L}(X_a,\ X_{-a})$-продолжение в $N_\alpha\setminus\mathscr{E}_\alpha$, причем возможные предельные точки N_α обязательно лежат в $S_\alpha\cup\{0\}$, поскольку $(T_\alpha-k^2)^{-1}$ имеет такое продолжение на $\{k\mid \operatorname{Im}k>-a,\ \arg k\neq-\pi/2\}\setminus S_\alpha$. Но $\inf S_\alpha\geqslant\geqslant\inf(-\Delta+\alpha x^2)$ стремится к бесконечности при $\alpha\to\infty$, поэтому α можно выбрать таким, чтобы $[\mathscr{E}_\alpha\cap(-a,\ a)]\setminus(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ было конечным. ∎

XI.12. Линейное уравнение Больцмана

В этом разделе описывается математическая модель рассеяния нейтронного пучка малой плотности куском такого вещества, как уран, в пустом пространстве. Эта модель имеет ограниченный физический интерес, поскольку она не охватывает случаи, выходящие за рамки простого рассеяния, например, когда число нейтронов экспоненциально растет с течением времени (взрыв урановой бомбы) или когда нейтронный пучок с помощью экранов вынуждают оставаться в ограниченной области пространства, заполненной ураном и графитовыми стержнями (ядерный реактор). Однако описываемая модель весьма интересна с математической точки зрения, поскольку в ней реализуется ситуация, когда теория рассеяния в гильбертовом пространстве должна быть обобщена в двух направлениях: во-первых, естественным пространством состояний становится не гильбертово пространство, а конус в (негильбертовом) векторном пространстве, во-вторых, описываемые уравнения задают необратимую динамику, поскольку