Введем оператор скручивания $U$ на $\mathscr{H}$ так: возьмем такое $R$, чтобы $\Gamma \subset \{x \mid |x| < R\}$, и такую $C^\infty$-функцию $u$ на $\mathbb{R}^n$ со значениями во множестве унитарных $2\times2$-матриц, что

$$u(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{если} \quad |x| > 2R,$$
$$u(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{если} \quad |x| < R.$$

Определим $U$ соотношением $(U\psi)(x) = u(x)\psi(x)$. Тогда $U$ — унитарный оператор на $\mathscr{H}$ и на $X_{\pm a} \oplus X^{(\Gamma)}_{\pm a}$, так что нужное свойство продолжимости достаточно проверить для $UH_\alpha U^{-1}$. Но $\tilde{H} \equiv \equiv UH_\alpha U^{-1} = T_\alpha + V_\alpha$, где

$$T_\alpha \langle\varphi, \psi\rangle = \langle -\Delta\varphi, (H_{\Gamma;\,\mathrm{D}} + \alpha x^2)\psi\rangle,$$
$$V_\alpha = f_\alpha \cdot p + g_\alpha;$$

здесь $p = -i\nabla$, а $f_\alpha$ и $g_\alpha$ суть $2\times2$-матрицы $C_0^\infty$-функций. Пусть $S_\alpha = \sigma(H_{\Gamma;\,\mathrm{D}} + \alpha x^2)$. Это множество дискретно (см. § XIII.14). Согласно анализу, проведенному в дополнении к § XI.6 (см., в частности, теорему XI.45), $(\tilde{H}_\alpha - k^2)^{-1}$ имеет $\mathscr{L}(X_a, X_{-a})$-продолжение в $N_\alpha \setminus \mathscr{E}_\alpha$, причем возможные предельные точки $N_\alpha$ обязательно лежат в $S_\alpha \cup \{0\}$, поскольку $(T_\alpha - k^2)^{-1}$ имеет такое продолжение на $\{k \mid \operatorname{Im} k > -a,\ \arg k \neq -\pi/2\} \setminus S_\alpha$. Но $\inf S_\alpha \geqslant \geqslant \inf(-\Delta + \alpha x^2)$ стремится к бесконечности при $\alpha \to \infty$, поэтому $\alpha$ можно выбрать таким, чтобы $[\mathscr{E}_\alpha \cap (-a, a)] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ было конечным. ∎

## XI.12. Линейное уравнение Больцмана

В этом разделе описывается математическая модель рассеяния нейтронного пучка малой плотности куском такого вещества, как уран, в пустом пространстве. Эта модель имеет ограниченный физический интерес, поскольку она не охватывает случаи, выходящие за рамки простого рассеяния, например, когда число нейтронов экспоненциально растет с течением времени (взрыв урановой бомбы) или когда нейтронный пучок с помощью экранов вынуждают оставаться в ограниченной области пространства, заполненной ураном и графитовыми стержнями (ядерный реактор). Однако описываемая модель весьма интересна с математической точки зрения, поскольку в ней реализуется ситуация, когда теория рассеяния в гильбертовом пространстве должна быть обобщена в двух направлениях: во-первых, естественным пространством состояний становится не гильбертово пространство, а конус в (негильбертовом) векторном пространстве, во-вторых, описываемые уравнения задают необратимую динамику, поскольку квантовые аспекты проблемы на классическом уровне моделируются путем привлечения идей статистической физики. Кроме того, развиваемая теория иллюстрирует естественность применения полугрупп, действующих в банаховом пространстве.

Основной динамической величиной в модели служит положительная функция $n(x, v)$ на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, представляющая плотность нейтронов в точке $\langle x, v\rangle$ фазового пространства. При подходящем целом $N_0$ величина

$$N_0 \int\limits_{A\times B} n(x, v)\, d^3x\, d^3v$$

представляет число нейтронов в области $A$ со скоростями, лежащими во множестве $B$. Конечно, если $n(x, v)$ — обычная функция, то для любых $A$ и $B$ это число может и не быть целым; иначе говоря, $n(x, v)$ в действительности должна равняться $N_0^{-1}\sum\limits_{i=1}^{N_0}\delta(x-x_i)\,\delta(v-v_i)$. Но если $N_0$ велико (при реальных экспериментах эта величина обычно не меньше $10^{20}$), $n(x, v)$ с разумной точностью можно считать функцией из $L^1$. Поэтому в качестве множества состояний системы естественно взять $L^1_+$ — конус *положительных* функций на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$.

Постулируемое динамическое уравнение для $n(x, v)$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}n(x, v, t) = -v\cdot\nabla_x n(x, v, t) + \int k(x, v', v)\, n(x, v', t)\, dv' - \\ -\sigma_a(x, v)\, n(x, v, t) \qquad (230)$$

и называется **линейным уравнением Больцмана**. Чтобы понять его смысл, решим это уравнение при нулевых $k$ и $\sigma_a$. Пусть

$$[W_0(t)\, n](x, v) = n(x - vt, v). \qquad (231)$$

***Теорема XI.92.*** При каждом $p\in[1, \infty]$ и, в частности, при $p=1$, отображения $W_0(t)$ задают сильно непрерывную группу изометрий на $L^p(\mathbb{R}^6)$, переводящих положительные функции в положительные. Более того, в каждом $L^p$, $p<\infty$, множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ образует существенную область определения инфинитезимального генератора группы $W_0(t)$ и $W_0(t) = e^{-tT_0}$, где $T_0$ таков, что при $f\in C_0^\infty$

$$T_0 f = v\cdot\nabla_x f. \qquad (232)$$

*Доказательство.* Все сделанные утверждения, кроме утверждения о существенной области определения и равенства (232), немедленно вытекают из (231). Остальные два можно вывести из теоремы X.49, если заметить, что, в силу (231), класс $C_0^\infty$ левоинвариантен относительно действия $W_0(t)$, что $W_0(t)f\in C_0^\infty$ по $t$ для $f\in C_0^\infty$

и что

$$-\frac{d}{dt} W_0(t) f \Big|_{t=0} = v \cdot \nabla_x f. \ \blacksquare$$

Таким образом, первый член в правой части линейного уравнения Больцмана (230) описывает свободное классическое движение группы нейтронов без рассеяния, без поглощения и без рождения новых нейтронов. Интерпретация второго члена очень проста. Нейтрон, находящийся в точке $\langle x, v' \rangle$ фазового пространства, может благодаря рассеянию или какому-то процессу рождения, например, делению, превратиться в нейтрон с другой скоростью $v$ или породить такой нейтрон. Полная скорость рождения или рассеяния, вызываемых нейтроном в точке $\langle x, v' \rangle$, равна

$$\sigma_p(x, v') = \int k(x, v', v)\, dv. \tag{233}$$

Аналогично, последний член в правой части (230) представляет выбывание нейтронов из точки $\langle x, v \rangle$ фазового пространства в другие точки $\langle x, v' \rangle$ за счет процессов рассеяния или процессов поглощения (например, графитовыми стержнями).

Далее мы будем налагать на $k$, $\sigma_a$ и $\sigma_p$ следующие ограничения.

***Определение.*** Будем говорить, что пара $\langle k, \sigma_a \rangle$ **регулярна, тогда** и только тогда, когда

(i) $k$ — неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{R}^9$, а $\sigma_a$ — неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{R}^6$;

(ii) для любой точки $\langle x, v' \rangle$ функция $k(x, v', \cdot)$ лежит в $L^1$, а $\sigma_a$ и $\sigma_p$ — равномерно ограниченные функции на $\mathbb{R}^6$;

(iii) существует компактное множество $D \subset \mathbb{R}^3$, такое, что $k(x, v, v')$ и $\sigma_a(x, v)$ равны нулю при $x \notin D$.

Прежде чем приступить к изучению решений и теории рассеяния для уравнения (230), мы хотели бы сделать несколько замечаний о форме этого уравнения и о наших условиях «регулярности». Уравнение (230) имеет «вероятностный», или «статистический», характер, поскольку мы интерпретируем последние два члена этого уравнения с помощью таких понятий, как «доля частиц, рожденных, рассеянных или поглощенных» в точке $\langle x, v \rangle$. Появление такого статистического элемента обусловлено следующими причинами: во-первых, даже с точки зрения классической физики, положения атомов урана хаотически изменяются в результате теплового движения; во-вторых, в связи с тем что в своей основе рассеяние носит квантовомеханический характер, ему внутренне присущи вероятностные закономерности. Несмотря на то что вероятностный характер уравнения (230) легко понять, он вызывает ряд неожиданных следствий. Например, хотя мы считаем, что это уравнение описывает движение собрания частиц, каждая из которых подчиняется обратимым во времени динамическим законам (уравнениям Ньютона), уравнение (230) *как уравнение в* $L^1_+$ разрешимо только при положительном времени.

Причина добавления слова «линейный» в название уравнения в том, что первоначальное уравнение, предложенное Больцманом (для описания не нейтронов, а газов), содержало квадратичный по $n$ член, обусловленный рассеянием описываемых частиц друг на друге. В пределе при малых $n$ этот член не важен. Физически «малость» $n$ означает, что плотность нейтронов мала по сравнению с плотностью рассеивателей и настолько мала, что позволяет пренебречь взаимодействием двух сблизившихся нейтронов. Эти предположения не бессодержательны.

Предположение об ограниченности носителей $\sigma_a$ и $\sigma_p$ по переменной $x$ не обязательно для развития математической теории, хотя весьма естественно с физической точки зрения. В Замечаниях можно найти ссылки на литературу, где описывается теория рассеяния при $\sigma_a$ и $\sigma_p$, лишь достаточно быстро убывающих по $x$. Отметим, что сейчас $\sigma$ обозначает не сечение, а скорость.

Существуют три различных режима с ясной физической интерпретацией. Первый отвечает равенству $\sigma_a(x, v) = \sigma_p(x, v)$ при всех $\langle x, v\rangle \in \mathbb{R}^6$. Здесь число нейтронов, покидающих $\langle x, v\rangle$, в точности равно числу нейтронов, попадающих в другие области фазового пространства благодаря присутствию нейтронов в $\langle x, v\rangle$. По естественным соображениям этот режим называют **чистым рассеянием**. Случай $\sigma_a \leqslant \sigma_p$ называют **режимом генерации**, а случай $\sigma_a \geqslant \sigma_p$ — **режимом поглощения**.

Наконец, отметим видимое нарушение закона сохранения энергии в (230). Действительно, мы не требуем, чтобы функция $k$ была сосредоточена в области, где $|v| = |v'|$; в противном случае функция $k$, не будучи ни обобщенной функцией, ни мерой, равнялась бы нулю почти всюду. Всю теорию можно развить, заменив

$$\int k(x, v', v)\, n(x, v', t)\, dv' \text{ на}$$

$$\int k(x, |v|\Omega', v)\, n(x, |v|\Omega', t)\, d\Omega',$$

и это приемлемо в некоторых случаях при режимах чистого рассеяния. Однако существует физическая причина, все-таки заставляющая проводить усреднение по конечным скоростям. Действительно, ядра урана подвижны, так что конечная скорость нейтрона зависит от начальной скорости ядер урана даже при упругом рассеянии. Поскольку мы «усредняем» в упомянутом выше статистическом смысле по положениям ядер урана, довольно естественно «усреднять» еще и по скоростям.

Решение уравнения (230) представляет собой упражнение в теории полугрупп на банаховых пространствах.

*Теорема XI.93.* Пусть $\langle k, \sigma_a\rangle$ — регулярная пара. Тогда существует однопараметрическая сильно непрерывная полугруппа $W(t)$, $t\geqslant 0$, в $L^1(\mathbb{R}^6)$, переводящая $L^1_+(\mathbb{R}^6)$ в себя и такая, что $W(t)=e^{-tT}$, причем $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ есть существенная область определения $T$ и

$$(Tf)(x, v)=(T_0f)(x, v)-\int k(x, v', v)f(x, v')\,dv'+\sigma_a(x, v)f(x, v).$$

Более того,

(a) $D(T)=D(T_0)$;

(b) $\|W(t)\|\leqslant e^{Ct}$, $C=\|\sigma_p\|_\infty$;

(c) при режиме чистого рассеяния (соответственно поглощения) $\|W(t)n\|_1=\|n\|_1$ (соответственно $\|W(t)n\|_1\leqslant\|n\|_1$), $n\in L^1_+$;

(d) для любого $n\in L^1_+$, всех $\langle x, v\rangle$ и $t>0$

$$[W(t)n](x, v)\geqslant n(x-tv, v)\exp\left\{-\int_0^t\sigma_a(x-sv, v)\,ds\right\}. \qquad (234)$$

*Доказательство.* Введем операторы $A_1$, $A_2$ на $L^1(\mathbb{R}^6)$ соотношениями

$$(A_1n)(x, v)=-\int k(x, v', v)\,n(x, v')\,dv',$$
$$(A_2n)(x, v)=\sigma_a(x, v)\,n(x, v).$$

Они ограничены, и их нормы равны $\|\sigma_p\|_\infty$ и $\|\sigma_a\|_\infty$ соответственно. Более того, если $\tilde T=T_0+A_2$, то $\tilde W(t)=e^{-t\tilde T}$ задается явной формулой

$$(\tilde W(t)n)(x, v)=n(x-tv, v)\exp\left\{-\int_0^t\sigma_a(x-sv, v)\,ds\right\}. \qquad (235)$$

Поскольку $T=T_0+A_1+A_2$, из теоремы X.50 следует, что $T$ порождает экспоненциально ограниченную полугруппу, что любая существенная область определения $T_0$ служит существенной областью определения для $T$ и что $D(T)=D(T_0)$. Далее, из неравенств $\|e^{-tA_1}\|\leqslant e^{t\|A_1\|}$ и $\|\tilde W(t)\|\leqslant 1$ с помощью формулы Троттера (теорема X.51) выводится оценка

$$\|W(t)\|\leqslant\|e^{-tA_1}\|\leqslant e^{t\|\sigma_p\|_\infty},$$

доказывающая (b).

Действуя, как в § X.9 (шаг 4 в доказательстве теоремы X.58), можно проверить формулы Дюамеля:

$$W(t)=W_0(t)-\int_0^t W_0(t-s)(A_1+A_2)W(s)\,ds, \tag{236}$$

$$W(t)=\tilde{W}(t)-\int_0^t W(t-s)A_1\tilde{W}(s)\,ds. \tag{237}$$

Далее, $e^{-tA_1}$ сохраняет положительность, так как подобным свойством обладает $-A_1$, а экспоненту можно разложить в ряд. В итоге с помощью формулы Троттера и очевидного свойства $\tilde{W}$ сохранять положительность заключаем, что $W(t)$ переводит $L^1_+$ в себя. Более того, в силу (237), $W(t)n \geqslant \tilde{W}(t)n$ поточечно, что доказывает (234).

Осталось только доказать (с). Заметим, что

$$\int (W_0(t)n)(x, v)\,dx\,dv=\int n(x, v)\,dx\,dv,$$
$$\int (A_1 n)(x, v)\,dx\,dv=-\int \sigma_p(x, v')\,n(x, v')\,dx\,dv',$$

и потому, в силу (236) и свойств $W_0(t)$,

$$\int (W(t)n)(x, v)\,dx\,dv=\int n(x, v)\,dx\,dv+$$
$$+\int_0^t ds\int [\sigma_p(x, v)-\sigma_a(x, v)](W(s)n)(x, v)\,dx\,dv, \tag{238}$$

откуда немедленно вытекает (с). ∎

Теперь мы готовы объяснить, в каком смысле динамика, описываемая операторами $W(t)$, необратима. Как отображение из $L^1$ в $L^1$ оператор $W(t)$ обратим, поскольку $-T_v-A_1-A_2$ порождает полугруппу, но его обратный оператор в общем случае не переводит основное множество состояний $L^1_+$ в себя; соответствующий пример можно найти в литературе, цитируемой в Замечаниях. При заданных необратимой (односторонней) динамике $W(t)$ и обратимой (двусторонней) динамике системы без взаимодействия $W_0(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ естественными объектами теории рассеяния становятся отображения

$$\Omega^+=\underset{t\to-\infty}{s\text{-}\lim}\,W(-t)\,W_0(t), \tag{239}$$

$$\tilde{\Omega}^-=\underset{t\to\infty}{s\text{-}\lim}\,W_0(-t)\,W(t). \tag{240}$$

При этом $\Omega^+n_0$ есть значение при $t=0$ решения задачи со взаимодействием, которое в далеком прошлом выглядит как $W_0(t)\,n_0$.

Величина $\tilde{\Omega}^{-} n_1$ есть значение при $t=0$ решения свободного уравнения, которое все более и более походит на $W(t) n_1$ при $t \to +\infty$. Итак, если $\Omega^{+}$, $\tilde{\Omega}^{-}$ существуют, оператор рассеяния можно задать соотношением

$$S = \tilde{\Omega}^{-} \Omega^{+}.$$

Подчеркнем, что $W(t)$ входит в (239) и (240) только при положительных $t$. На основе обсуждавшихся выше примеров можно ожидать, что легче доказать существование предела (239), чем (240).

Далее, возможны случаи, когда нельзя ожидать существования ни одного из этих пределов. В самом деле, если происходит слишком большая генерация нейтронов, их число может бесконечно нарастать с течением времени, что физически приводит к взрыву куска урана, а математически мы оказываемся в ситуации, не описываемой теорией рассеяния По этой причине мы выделим специальный класс взаимодействий.

***Определение.*** Будем называть регулярную пару $\langle k, \sigma_a \rangle$ **подкритической** тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{t \geqslant 0} \| W(t) \| < \infty$.

В силу (238), пара $\langle k, \sigma_a \rangle$ подкритична в режиме чистого рассеяния или поглощения. Ниже будет видно (теорема XI.95), что она остается подкритической и в режиме генерации, но только если кусок вещества достаточно мал.

Следующая простая геометрическая лемма очень важна и при изучении предела (239), и при доказательстве подкритичности в режиме генерации в малых областях. Говоря нестрого, эта лемма утверждает, что число нейтронов в ограниченной области пространства быстро убывает, если вначале число нейтронов с очень малыми скоростями не слишком велико.

***Лемма.*** Пусть $\| n \|_D = \int\limits_{x \in D} \int\limits_{\mathbb{R}^3} n(x, v)\, dx\, dv$ для любого борелева множества $D \subset \mathbb{R}^3$. Тогда для $n \in L^1_+(\mathbb{R}^6)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| W_0(t) n \|_D \, dt \leqslant (\operatorname{diam} D) \| v^{-1} n \|_{L^1(\mathbb{R}^6)},$$

где $\operatorname{diam} D = \sup\limits_{x,\, y \in D} | x - y |$.

*Доказательство.* Достаточно доказать, что для каждой фиксированной скорости $v \neq 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{x \in D} | W_0(t) n(x, v) | \, dx\, dt \leqslant [\operatorname{diam} D] \int | v |^{-1} | n(x, v) | \, dx. \qquad (241)$$

Пусть $\chi$ — характеристическая функция $D$. Тогда левая часть (241) равна $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int \chi(x)\,|n(x-vt,\ v)|\,dx\right)dt$. Пусть $y$ — компонента $x$, параллельная $v$, а $x_\perp$ — две ортогональные к $v$ координаты. Тогда последний интеграл можно переписать и оценить следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int dx_\perp \int dy\,\chi(y,\ x_\perp)\,|n(y-|v|t,\ x_\perp,\ v)| =$$
$$= |v|^{-1}\int dz \int dx_\perp \int dy\,\chi(y,\ x_\perp)\,|n(z,\ x_\perp,\ v)| \leqslant$$
$$\leqslant |v|^{-1}(\operatorname{diam} D)\iint dx_\perp\,dz\,|n(z,\ x_\perp,\ v)|,$$

что доказывает (241). Выше мы сначала сделали замену переменных, перейдя от $t$ к $z=y-|v|t$, а затем использовали очевидное геометрическое неравенство $\left|\int \chi(y,\ x_\perp)\,dy\right| \leqslant \operatorname{diam} D$. ∎

***Теорема XI.94.*** Если $\langle k,\ \sigma_a\rangle$ — регулярная подкритическая пара, то $\Omega^+$ существует и сохраняет положительность. В режиме поглощения (соответственно чистого рассеяния) оператор $\Omega^+$ является сжатием (соответственно изометрией).

*Доказательство.* Поскольку пара $\langle k,\ \sigma_a\rangle$ подкритична, семейство $W(-t)\,W_0(t)$ равномерно ограничено. Таким образом, достаточно доказать, что предел (239) существует на плотном в $L^1$ множестве $\mathscr{D}$. Остальные свойства $\Omega^+$ вытекают из свойств $W(-t)$ и $W_0(t)$. Возьмем

$$\mathscr{D} = \{n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^6)\ |\ |v|^{-1}n \in L^1\}.$$

Пусть $A = A_1 + A_2$, как в теореме XI.93, и пусть $D$ — ограниченное множество, содержащее $\operatorname{supp}\sigma_a$ и $\operatorname{supp}\sigma_p$. Тогда для $n \in \mathscr{D}$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \|AW_0(t)\,n\|\,dt \leqslant \|A\| \int\limits_{-\infty}^{0} \|W_0(t)\,n\|_D dt \leqslant \|A\|(\operatorname{diam} D)\,\|v^{-1}n\|_1 < \infty$$

в силу леммы. В таком случае существование предела (239) доказывается методом Кука. ∎

Нам нужны некоторые дополнительные ограничения на $\langle k,\ \sigma_a\rangle$, для того чтобы сделать взаимодействие подкритичным в случае, когда объем вещества мал. Будем говорить, что паре $\langle k,\ \sigma_a\rangle$ отвечает **конечная средняя длина свободного пробега**, если

$$M(\sigma_p) \equiv \|v^{-1}\sigma_p\|_\infty < \infty.$$

Причина такого названия в том, что величина $(v^{-1}\sigma_p)^{-1}$ представляет собой расстояние между последовательными столкновениями или рождениями частиц.

***Теорема XI.95.*** Регулярная пара $\langle k, \sigma_a \rangle$ с конечной средней длиной свободного пробега, удовлетворяющей неравенству $M(\sigma_p) \times \times (\operatorname{diam} D) < 1$, является подкритической, так что, в частности, существует $\Omega^+$.

*Доказательство.* Используя (237) и тот факт, что $\tilde{W}(t)$ — сжимающие отображения, легко получаем оценку

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| W(t) \| \leqslant 1 + \alpha \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| W(t) \|,$$

где $\alpha = \int_0^\infty \| A_1 \tilde{W}(s) \| ds$. Таким образом, если $\alpha < 1$, то $\sup_{0 \leqslant t < \infty} \| W(t) \| \leqslant (1-\alpha)^{-1}$ и система подкритична. Следовательно, нужно доказать только, что

$$\alpha \leqslant (\operatorname{diam} D)\, M(\sigma_p). \tag{242}$$

Но поскольку $\| A_1 v^{-1} \|_{\mathrm{op}} = M(\sigma_p)$, неравенство (242) будет справедливо, если доказать, что

$$\int_0^\infty \| v \tilde{W}(s)\, n \|_D\, ds \leqslant (\operatorname{diam} D) \| n \|_1.$$

Но $v$ коммутирует с $\tilde{W}(s)$ и $\| \tilde{W}(s)\, n \|_D \leqslant \| W_0(s)\, n \|_D$, так что в силу леммы

$$\int_0^\infty \| v \tilde{W}(s)\, n \|_D\, ds \leqslant (\operatorname{diam} D) \| v v^{-1} n \|_1.$$

Это доказывает (242), а потому и теорему. ∎

По существу, из условия $\alpha < 1$ в этом доказательстве следует, что ряд итераций уравнения (237) равномерно сходится по $t$. Физическая причина этого в том, что, как утверждает неравенство $(\operatorname{diam} D)\, M(\sigma_p) < 1$, с точностью до второго порядка частица, проходя область $D$, подвергается в среднем менее чем одному столкновению, и потому геометрический ряд, получаемый с помощью итераций, сходится при условии $\alpha < 1$. Отметим, что теорема XI.95 обеспечивает нас большим количеством примеров ограниченных по времени полугрупп, не являющихся сжимающими полугруппами. Наложив еще одно условие на $\langle k, \sigma_a \rangle$, можно доказать существование предела (240).

***Теорема XI.96.*** Предположим, что регулярная подкритическая пара $\langle k, \sigma_a \rangle$ с конечной средней длиной свободного пробега такова, что

$$M(\sigma_a) \equiv \| v^{-1}\sigma_a \|_\infty < \infty.$$

Тогда $\tilde{\Omega}^-$ существует, а оператор рассеяния $S = \tilde{\Omega}^- \Omega^+$ — ограниченное взаимно однозначное отображение $L^1_+(\mathbb{R}^6)$ в себя.

*Доказательство.* Пусть $\sigma_1 = \sigma_p$ и $\sigma_2 = \sigma_a$. Прежде всего мы утверждаем, что для всех $\langle x, v \rangle \in \mathbb{R}^6$

$$\int_0^\infty \sigma_i(x - sv, v)\, ds \leqslant (\operatorname{diam} D)\, M(\sigma_i). \tag{243}$$

Неравенство (243) доказывается точно так же, как лемма. В силу пункта (d) теоремы XI.93 и (243),

$$(W(t)n)(x, v) \geqslant \exp\{-(\operatorname{diam} D)\, M(\sigma_2)\}\, n(x - vt, v)$$

для положительных $n$. Полагая $C = \exp\{(\operatorname{diam} D)\, M(\sigma_2)\}$, получим

$$n(x, v) \leqslant C\,(W(t)n)(x + vt, v). \tag{244}$$

В итоге, заменяя $n$ на $W(s)n$ и $t$ на $t - s$, получаем

$$(W(s)n)(x, v) \leqslant C\,(W(t)n)(x + v(t - s), v).$$

Следовательно, для положительных $n$

$$\begin{aligned}\int_0^t \| A_i W(s)n \|_1\, ds &= \int_0^t ds \int \sigma_i(x, v)\,(W(s)n)(x, v)\, dx\, dv \leqslant \\ &\leqslant C \int_0^t ds \int \sigma_i(x, v)\,(W(t)n)(x + v(t - s), v)\, dx\, dv = \\ &= C\left(\int_0^t \sigma_i(y - vr, v)\, dr\right) \int (W(t)n)(y, v)\, dy\, dv \leqslant \\ &\leqslant C\,(\operatorname{diam} D)\, M(\sigma_i)\, \| W(t)n \|_1.\end{aligned}$$

На предпоследнем шаге сделана замена переменных в двух местах, а на последнем использовано (243). Далее,

$$\int_0^\infty \| A_i W(s)n \|_1\, ds \leqslant C\,(\operatorname{diam} D)\, M(\sigma_i) \sup_{t \geqslant 0} \| W(t)n \|_1,$$

и, в силу подкритичности,

$$\int_0^\infty \| A_i W(s)n \|_1\, ds < \infty,$$

что позволяет с помощью метода Кука доказать существование предела (240). Отображение $\Omega^+$ существует в силу теоремы XI.94, а поскольку семейство $\{W(t)\}$ равномерно ограничено и каждое отображение $W(t)$ сохраняет положительность, $\Omega^+$, $\tilde{\Omega}^-$ суть ограниченные сохраняющие положительность операторы на $L^1_+(\mathbb{R}^6)$. Следовательно, то же самое справедливо и в отношении $S=\tilde{\Omega}^-\Omega^+$. В силу (244),

$$\| W(t)\, n\|_1 \geqslant C^{-1}\| n\|_1$$

для положительных $n$. Отсюда и из изометричности $W_0(t)$ легко выводится взаимная однозначность отображения $S$. ∎

## XI.13. Нелинейные волновые уравнения

*... с неразрешимыми уравнениями следует обращаться, угрожая наказанием.*

ВУДИ АЛЛЕН

Этот раздел служит введением в теорию рассеяния для нелинейных классических волновых уравнений. В этой области знаний еще много нерешенных проблем, и теории рассеяния, которые построены к настоящему времени, как правило, справедливы лишь для нелинейных уравнений специального вида. Общее построение теории следует идеям, изложенным в § 1, хотя техника доказательства необходимых оценок значительно сложнее, чем в линейном случае. Начнем с уравнения

$$u_{tt}-\Delta u+m^2u=F(u). \qquad (245)$$

В § X.13 были разобраны вопросы существования решений (245) при $F(u)=\pm\lambda|u|^{p-1}u$, где $p=3$. Те же методы применимы и при $p<5$. Чтобы построить теорию рассеяния для уравнения (245), можно было бы попытаться показать, что его решения при больших положительных и отрицательных временах все более и более походят на решения соответствующего свободного уравнения

$$u_{tt}-\Delta u+m^2u=0. \qquad (246)$$

Равномерная норма решений такого свободного уравнения, отвечающих гладким начальным данным в $n$-мерном пространстве, убывает как $t^{-n/2}$ (см. теорему XI.17). Если такое же убывание имеет место и в случае уравнения (245), теория рассеяния может быть построена, поскольку член типа $-\lambda|u|^{p-1}u$ убывает быстрее, чем линейные члены, если $p>1$. Однако даже в случае линейного уравнения Шредингера нельзя ожидать убывания от всех его решений, поскольку среди них могут быть решения, описывающие связанные состояния. Точно так же связанные