что позволяет с помощью метода Кука доказать существование предела (240). Отображение Ω^+ существует в силу теоремы XI.94, а поскольку семейство $\{W(t)\}$ равномерно ограничено и каждое отображение $W(t)$ сохраняет положительность, Ω^+, $\tilde{\Omega}^-$ суть ограниченные сохраняющие положительность операторы на $L^1_+(\mathbb{R}^6)$. Следовательно, то же самое справедливо и в отношении $S=\tilde{\Omega}^-\Omega^+$. В силу (244),

$$\|W(t)\,n\|_1 \geqslant C^{-1}\|n\|_1$$

для положительных n. Отсюда и из изометричности $W_0(t)$ легко выводится взаимная однозначность отображения S. ∎

XI.13. Нелинейные волновые уравнения

... с неразрешимыми уравнениями следует обращаться, угрожая наказанием.

ВУДИ АЛЛЕН

Этот раздел служит введением в теорию рассеяния для нелинейных классических волновых уравнений. В этой области знаний еще много нерешенных проблем, и теории рассеяния, которые построены к настоящему времени, как правило, справедливы лишь для нелинейных уравнений специального вида. Общее построение теории следует идеям, изложенным в § 1, хотя техника доказательства необходимых оценок значительно сложнее, чем в линейном случае. Начнем с уравнения

$$u_{tt}-\Delta u+m^2u=F(u). \tag{245}$$

В § X.13 были разобраны вопросы существования решений (245) при $F(u)=\pm\lambda|u|^{p-1}u$, где $p=3$. Те же методы применимы и при $p<5$. Чтобы построить теорию рассеяния для уравнения (245), можно было бы попытаться показать, что его решения при больших положительных и отрицательных временах все более и более походят на решения соответствующего свободного уравнения

$$u_{tt}-\Delta u+m^2u=0. \tag{246}$$

Равномерная норма решений такого свободного уравнения, отвечающих гладким начальным данным в n-мерном пространстве, убывает как $t^{-n/2}$ (см. теорему XI.17). Если такое же убывание имеет место и в случае уравнения (245), теория рассеяния может быть построена, поскольку член типа $-\lambda|u|^{p-1}u$ убывает быстрее, чем линейные члены, если $p>1$. Однако даже в случае линейного уравнения Шредингера нельзя ожидать убывания от всех его решений, поскольку среди них могут быть решения, описывающие связанные состояния. Точно так же связанные состояния могут быть и у уравнения (245), во всяком случае при подходящих F.

Предположим, что F имеет вид $F(y) = yH(|y|)$, где $H(|y|) \to 0$ при $|y| \to 0$. Тогда (245) имеет решение вида

$$u_0(x, t) = e^{i\omega t} \varphi(x) \tag{247}$$

в том и только том случае, когда

$$-\Delta\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = -(m^2 - \omega^2)\varphi(x), \tag{248a}$$

где

$$V(x) = -H(|\varphi(x)|). \tag{248b}$$

Уравнение Шредингера не имеет положительных собственных значений, если исключены слишком патологические потенциалы (см. § XIII.13). Поэтому мы ограничимся случаем $|\omega| < m$. Если V положителен, например если $F(u) = -\lambda u|u|^2$, то (248a), разумеется, не имеет обсуждаемых решений, поскольку $-\Delta + V \geqslant 0$. Если $V(x)$ не всегда положителен, то не удивительно, что такие решения существуют. И действительно, в работе, указанной в Замечаниях, построены обширные классы функций F, для которых (248) имеет решения. Явным примером таких F может служить

$$F(u) = -u(|u|^2 - \lambda|u|)$$

при достаточно больших λ.

Если решения вида (247) существуют, то должны существовать решения уравнения (245), которые асимптотически (при $t \to -\infty$) выглядят как $u_0(x, t)$ плюс решение уравнения (246). Поскольку нелинейность «смешивает» часть, отвечающую связанному состоянию, и асимптотически свободную часть, нет причин ожидать, что связанное состояние останется при $t \to +\infty$. Таким образом, если связанные состояния имеются, теория рассеяния для (245) есть по существу многоканальная задача. На самом деле число каналов бесконечно, ибо, в силу лоренц-инвариантности (245), существование одного u_0 влечет за собой существование решений (245) вида

$$\exp\{i(t - v^{-1}x)\omega(v)\}\psi(x - vt).$$

Таким образом, можно строить решения (245), состоящие из n сгустков, движущихся друг относительно друга. Кроме того, существуют примеры с бесконечным числом связанных состояний при фиксированной ω. Наконец, связанные состояния ожидаются при каждой достаточно малой ω.

Итак, задача не только нелинейна, но и включает в себя все трудности, присущие многоканальному рассеянию. Два общих случая, когда может быть доказана асимптотическая полнота, являются точными аналогами двух случаев, для которых уже много лет известна асимптотическая полнота многоканальной задачи рассеяния для уравнения Шредингера. Случай малых начальных данных, с которого мы начнем, аналогичен случаю слабой связи (теорема XIII.27). Результат, обсуждаемый в конце этого раздела, аналогичен случаю потенциала отталкивания (теорема XIII.32). В средней части раздела описано общее построение волновых операторов каналов, когда *и* асимптотически свободно.

Стоит еще с самого начала отметить две технические трудности, возникающие здесь и отсутствующие в линейном квантовомеханическом рассеянии. Во-первых, поскольку волновые операторы и оператор рассеяния нелинейны, при доказательстве факта существования недостаточно установить их существование на плотном множестве, а затем воспользоваться теоремой I.7 (об ограниченном линейном отображении). Во-вторых, в качестве состояний рассеяния естественно взять элементы множества начальных данных Σ_{scat}, для которых решения (246) убывают подходящим образом при $t \to \pm\infty$. К сожалению, известны только достаточные условия такого убывания, так что в норму на Σ_{scat} в типичных ситуациях явным образом входит временна́я асимптотика при больших t решения соответствующего линейного уравнения.

В § X.13 было показано, что (245) можно представить в виде

$$\varphi'(t) = -iA\varphi(t) + J(\varphi(t)), \tag{249a}$$

где $J(\langle u, v\rangle) = \langle 0, F(u)\rangle$,

$$A = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\varphi(t) = \langle u(\cdot, t), v(\cdot, t)\rangle$ считается функцией из $\mathbb{R}$ в $D((-\Delta + m^2)^{1/2}) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$. Это привело нас к изучению проблемы существования решений уравнения (249a) как абстрактной задачи, где $\varphi(t)$ принимает значения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, оператор A самосопряжен в $\mathcal{H}$, а J — нелинейное отображение $\mathcal{H}$ в себя. При условии, что J удовлетворяет условию Липшица равномерно на шарах в $\mathcal{H}$, мы доказали, что соответствующее интегральное уравнение

$$\varphi(t) = e^{-itA}\varphi_0 + \int_0^t e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\, ds \tag{249b}$$

имеет единственное непрерывное $\mathcal{H}$-значное решение φ при малых t. В случае если J удовлетворяет дополнительным неравенствам, а начальные данные φ_0 лежат в $D(A)$, мы показали, что φ сильно дифференцируемо и удовлетворяет (249a). В этом разделе мы всегда будем иметь дело с (249b); читателю следует просмотреть § X.13, для того чтобы вспомнить достаточные условия, при которых φ удовлетворяет (249a).

Начнем с изложения абстрактной теории рассеяния для малых начальных данных. Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. Пусть $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ — две вспомогательные «нормы» на $\mathscr{H}$: $\|\cdot\|_a$ обладает всеми свойствами нормы, кроме одного: равенство $\|\varphi\|_a=0$ не обязательно влечет за собой равенство $\varphi=0$; $\|\cdot\|_b$ обладает всеми свойствами нормы, кроме того, что она может принимать значение $+\infty$. Будем предполагать, что A, J, $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) существует постоянная $c>0$, такая, что

$$\|\varphi\|_a\leqslant c\|\varphi\| \quad \text{для всех } \varphi\in\mathscr{H}; \tag{250}$$

(ii) существуют постоянные $c_1>0$, $d>0$, такие, что для $\varphi\in\mathscr{H}$

$$\|e^{-itA}\varphi\|_a\leqslant c_1 t^{-d}\|\varphi\|_b, \quad \text{если } |t|\geqslant 1; \tag{251}$$

(iii) существуют $\beta>0$, $\delta>0$ и $q\geqslant 1$ с $dq>1$, такие, что

$$\|J(\varphi_1)-J(\varphi_2)\|\leqslant\beta(\|\varphi_1\|_a+\|\varphi_2\|_a)^q\|\varphi_1-\varphi_2\|, \tag{252}$$

$$\begin{aligned}\|J(\varphi_1)-J(\varphi_2)\|_b\leqslant\beta\{(\|\varphi_1\|_a+\|\varphi_2\|_a)^{q-1}\|\varphi_1-\varphi_2\|_a+\\ +(\|\varphi_1\|_a+\|\varphi_2\|_a)^q\|\varphi_1-\varphi_2\|\}\end{aligned} \tag{253}$$

для всех φ_1, $\varphi_2\in\mathscr{H}$, удовлетворяющих неравенству $\|\varphi_i\|\leqslant\delta$. В случае $q=1$ мы предполагаем, что β можно выбрать произвольно малым, если δ выбрано малым. Более того, мы предполагаем, что $J(0)=0$.

Теперь мы определим состояния рассеяния и норму рассеяния. Сначала для $\mathscr{H}$-значной функции $\psi(t)$ на $\mathbb{R}$ введем

$$|||\psi(\cdot)|||_{[N_1,N_2]}=\sup_{N_1\leqslant t\leqslant N_2}\|\psi(t)\|+\sup_{N_1\leqslant t\leqslant N_2}(1+|t|)^d\|\psi(t)\|_a.$$

В случае когда $N_1=-\infty$, $N_2=+\infty$, будем обозначать норму просто через $|||\cdot|||$. Теперь определим

$$\Sigma_{\text{scat}}=\{\varphi\in\mathscr{H}\mid |||e^{-itA}\varphi|||<\infty\}$$

и

$$\|\varphi\|_{\text{scat}}=|||e^{-itA}\varphi|||.$$

Таким образом, состояния рассеяния суть те векторы в $\mathscr{H}$, которые хорошо убывают по норме $\|\cdot\|_a$ при свободном распространении. Заметим, что если $\|\varphi\|_b<\infty$, то

$$\|e^{-itA}\varphi\|_a\leqslant c_2(1+|t|)^{-d}(\|\varphi\|+\|\varphi\|_b) \quad \text{для всех } t, \tag{254}$$

так что $\varphi\in\Sigma_{\text{scat}}$ и $\|\varphi\|_{\text{scat}}\leqslant(1+c_2)\|\varphi\|+c_2\|\varphi\|_b$.

Теорема XI.97 (глобальное существование для малых начальных данных). Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и J — нелинейное отображение $\mathcal{H}$ в себя. Предположим, что существуют такие $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$, что выполняются условия (i)—(iii). Тогда существует такое $\eta_0 > 0$, что для всех $\varphi_- \in \Sigma_{\text{scat}}$ с $\|\varphi_-\|_{\text{scat}} \leqslant \eta_0$ уравнение

$$\varphi(t) = e^{-itA}\varphi_- + \int_{-\infty}^{t} e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\, ds \tag{255}$$

имеет единственное глобальное непрерывное $\mathcal{H}$-значное решение φ с $|||\varphi(\cdot)||| \leqslant 2\eta_0$. Более того,

(a) $\varphi(t) \in \Sigma_{\text{scat}}$ для каждого t;
(b) $\|\varphi(t) - e^{-itA}\varphi_-\| \to 0$ при $t \to -\infty$.

Доказательство. Основная идея доказательства состоит в использовании метода сжимающих отображений, примененного в § X 13, но с начальными условиями при $t = -\infty$. Таким образом, эта теорема похожа на результаты § 2. Пусть X_{η, φ_-} — множество непрерывных $\mathcal{H}$-значных функций $\psi(t)$, таких, что $|||\psi(t) - e^{-itA}\varphi_-||| \leqslant \eta$. Предположим, что $\|\varphi_-\|_{\text{scat}} \leqslant \eta \leqslant \delta/2$, где δ выбрано так, чтобы выполнялось условие (iii). Для $\psi(\cdot) \in X_{\eta, \varphi_-}$ введем

$$(\mathcal{Y}\psi)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-i(t-s)A} J(\psi(s))\, ds.$$

Как и при доказательстве теоремы X.72, легко проверить, что $e^{-i(t-s)A} J(\psi(s))$ — непрерывная функция s при каждом t. Далее, поскольку $\|\psi(s)\| \leqslant |||\psi(\cdot)||| \leqslant |||e^{-itA}\varphi_-||| + \eta \leqslant 2\eta$, в силу (252) имеем неравенства

$$\begin{aligned}\|J(\psi(s))\| &\leqslant \beta \|\psi(s)\|_a^q \|\psi(s)\| \leqslant \beta |||\psi(\cdot)|||^{q+1} (1+|s|)^{-dq} \leqslant \\ &\leqslant \beta (2\eta)^{q+1} (1+|s|)^{-dq},\end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{Y}\psi)(t)\| &\leqslant \int_{-\infty}^{t} \|e^{-i(t-s)A} J(\psi(s))\|\, ds \leqslant \\ &\leqslant \beta (2\eta)^{q+1} \int_{-\infty}^{t} (1+|s|)^{-dq}\, ds < \infty,\end{aligned} \tag{256}$$

поскольку $dq > 1$. Таким же образом,

$$\|(\mathscr{J}\psi)(t)\|_a \leqslant \int_{-\infty}^{t} \|e^{-i(t-s)A} J(\psi(s))\|_a\, ds \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \int_{-\infty}^{t} (1+|t-s|)^{-d} (\|J(\psi(s))\|_b + \|J(\psi(s))\|)\, ds \leqslant$$

(по (254))

$$\leqslant c_2 \beta \int_{-\infty}^{t} (1+|t-s|)^{-d} \{\|\psi(s)\|_a^q (1+2\|\psi(s)\|)\}\, ds \leqslant$$

(по (252) и (253))

$$\leqslant c_2 \beta (2\eta)^q (1+4\eta) \int_{-\infty}^{t} (1+|t-s|)^{-d} (1+|s|)^{-dq}\, ds \leqslant \tag{257}$$

$$\leqslant c_2 \beta (2\eta)^q (1+4\eta)\, c_3 (1+|t|)^{-d}.$$

Последний шаг справедлив благодаря лемме, которую мы докажем после окончания этого доказательства. В итоге $|||(\mathscr{J}\psi)(t)||| < \infty$. Теперь введем

$$(\mathscr{M}\psi)(t) = e^{-itA}\varphi_- + (\mathscr{J}\psi)(t)$$

и выберем η_0 (и δ в случае $q=1$) достаточно малым, так чтобы

$$\beta (2\eta_0)^{q+1} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|s|)^{-dq}\, ds \leqslant \frac{1}{2}\eta_0,$$

$$c_2 \beta (2\eta_0)^q (1+4\eta_0)\, c_3 \leqslant \frac{1}{2}\eta_0. \tag{258}$$

Легко проверить, что функция $(\mathscr{M}\psi)(t)$ непрерывна. Таким образом, $\mathscr{M}$ при $\eta \leqslant \eta_0$ отображает $X_{\eta,\,\varphi_-}$ в себя. Далее, легко проверить, используя (253), что путем выбора еще меньшего η_0 (и δ в случае $q=1$) всегда можно добиться того, чтобы $\mathscr{M}$ было сжатием. Тогда $\mathscr{M}$ имеет единственную неподвижную точку $\varphi(\cdot)$ в $X_{\eta,\,\varphi_-}$, поскольку $X_{\eta,\,\varphi_-}$ — полное метрическое пространство. По определению $\mathscr{M}$, такое $\varphi(\cdot)$ есть глобальное решение (255). Отметим еще, что $|||\varphi(\cdot)||| \leqslant 2\eta_0$.

Для доказательства единственности предположим, что φ_1 — другое решение (255) с $|||\varphi_1(\cdot)||| < \infty$. Тогда

$$\|\varphi(t)-\varphi_1(t)\| \leqslant \int_{-\infty}^{t} \|J(\varphi(s)) - J(\varphi_1(s))\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{t} \beta (\|\varphi(s)\|_a + \|\varphi_1(s)\|_a)^q \|\varphi(s)-\varphi_1(s)\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \beta(|||\varphi(\cdot)||| + |||\varphi_1(\cdot)|||)^q \Big(\sup_{-\infty<s\leqslant t} \|\varphi(s)-\varphi_1(s)\|\Big) \int_{-\infty}^{t} (1+|s|)^{-dq} ds,$$

так что

$$\sup_{-\infty<s\leqslant t}\|\varphi(s)-\varphi_1(s)\|\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\beta\left(|||\varphi(\cdot)|||+|||\varphi_1(\cdot)|||\right)^q\int_{-\infty}^{t}(1+|s|)^{-dq}\,ds\right\}\sup_{-\infty<s\leqslant t}\|\varphi(s)-\varphi_1(s)\|.$$

Но это ведет к противоречию при t, достаточно близких к $-\infty$, если только не выполняется равенство $\varphi(s)=\varphi_1(s)$ для всех $s\leqslant t$. В силу локальной единственности (доказываемой, как и выше, с помощью метода сжимающих отображений, но при начальных данных, заданных при некотором конечном t), $\varphi(s)=\varphi_1(s)$ для всех s.

Для того чтобы показать, что $\varphi(t)\in\Sigma_{\text{scat}}$ при каждом t, фиксируем t и проведем следующее вычисление:

$$\sup_r\|e^{-irA}\varphi(t)\|\leqslant\sup_r\|e^{-irA}e^{-itA}\varphi_-\|+\int_{-\infty}^{t}\|e^{-i(t+r-s)A}J(\varphi(s))\|\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\sup_r\|e^{-irA}\varphi_-\|+\beta\int_{-\infty}^{t}\|\varphi(s)\|_a^q\|\varphi(s)\|\,ds\leqslant\|\varphi_-\|_{\text{scat}}+\eta_0/2;$$
$$\sup_r\{(1+|r|)^d\|e^{-irA}\varphi(t)\|_a\}\leqslant\sup_r\{(1+|r|)^d\|e^{-i(t+r)A}\varphi_-\|_a\}+$$
$$+\sup_r\left\{(1+|r|)^d\int_{-\infty}^{t}\|e^{-i(t+r-s)A}J(\varphi(s))\|_a\,ds\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\sup_r\{(1+|r|)^d(1+|t+r|)^{-d}\|\varphi_-\|_{\text{scat}}\}+$$
$$+\sup_r\left\{(1+|r|)^d\int_{-\infty}^{t}(1+|t+r-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}ds\right\}\beta c_2(1+4\eta_0)(2\eta_0)^q\leqslant$$
$$\leqslant\sup_r\{(1+|r|)^d(1+|t+r|)^{-d}\}(\|\varphi_-\|_{\text{scat}}+\eta_0/2).$$

Таким образом, $\varphi(t)\in\Sigma_{\text{scat}}$.

Для доказательства (b) проведем такую оценку:

$$\|\varphi(t)-e^{-itA}\varphi_-\|=\|e^{itA}\varphi(t)-\varphi_-\|\leqslant\int_{-\infty}^{t}\|e^{isA}J(\varphi(s))\|\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\beta\int_{-\infty}^{t}\|\varphi(s)\|_a^q\|\varphi(s)\|\,ds\leqslant\beta(2\eta_0)^{q+1}\int_{-\infty}^{t}(1+|s|)^{-dq}\,ds\to 0$$

при $t\to-\infty$. ∎

Решение (255), построенное выше, удовлетворяет (249b) с

$$\varphi_0=\varphi_-+\int_{-\infty}^{0}e^{isA}J(\varphi(s))\,ds.$$

Часть (a) следующей леммы была нужна при доказательстве теоремы XI.97, а часть (b) будет использована в доказательстве теоремы XI.100.

Лемма 1. (a) Предположим, что $q \geqslant 1$, $d > 0$ и $dq > 1$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|t-s|)^{-d} (1+|s|)^{-dq}\, ds \leqslant c_3 (1+|t|)^{-d}.$$

(b) Предположим, что $q > 1$, $d > 0$ и $dq > 1$. Тогда

$$\sup_r \left\{ (1+|r|)^d \int_{t_1}^{t_2} (1+|r-s|)^{-d} (1+|s|)^{-dq}\, ds \right\} \to 0$$

при $t_1, t_2 \to +\infty$ или $t_1, t_2 \to -\infty$.

Доказательство. (a) Достаточно рассмотреть случай положительного t. Разобьем интеграл на две части и оценим их:

$$\int_{|s-t| \geqslant t/2} (1+|t-s|)^{-d} (1+|s|)^{-dq}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-d} \int_{|s-t| \geqslant t/2} (1+|s|)^{-dq}\, ds \leqslant c(1+t)^{-d} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|s|)^{-dq} ds$$

и при $d \neq 1$

$$\int_{t/2}^{3t/2} (1+|t-s|)^{-d} (1+|s|)^{-dq}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-dq} \left\{ \int_{t/2}^{t} (1+(t-s))^{-d}\, ds + \int_{t}^{3t/2} (1+s-t)^{-d}\, ds \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-dq} \left\{ |1-d|^{-1} \left(\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-d+1} + 1 \right) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant c(1+t)^{-dq-d+1} + c(1+t)^{-dq} \leqslant c(1+t)^{-d},$$

поскольку $dq > 1$ и $q \geqslant 1$.

Если $d = 1$, второй интеграл можно оценить следующим образом:

$$2(1+t/2)^{-q} \ln(1+t/2) \leqslant c(1+t)^{-1},$$

поскольку $q > 1$, если $d = 1$.

(b) Рассмотрим случай $t_2 > t_1 \to \infty$. Выберем $q_0 \geqslant 1$ так, чтобы $dq_0 > 1$ и $q > q_0$ Тогда

$$(1+|r|^d)\int_{t_1}^{t_2}(1+|r-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant [(1+|t_1|)^{-d(q-q_0)}](1+|r|)^d\int_{-\infty}^{\infty}(1+|r-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq_0}\,ds,$$

так что (b) следует из (a). ∎

Теорема XI.98 (оператор рассеяния для малых начальных данных). Допустим, что выполнены все предположения теоремы XI.97. Пусть $\varphi(t)$ — решение (255), отвечающее $\varphi_- \in \Sigma_{\rm scat}$ с $\|\varphi_-\|_{\rm scat} \leqslant \eta_0$. Тогда для достаточно малого η_0

(a) существует $\varphi_+ \in \Sigma_{\rm scat}$ с $\|\varphi_+\|_{\rm scat} \leqslant 2\eta_0$, такое, что

$$\|\varphi(t) - e^{-itA}\varphi_+\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty;$$

(b) отображение S: $\varphi_- \mapsto \varphi_+$, определенное на $\{\varphi_- \mid \|\varphi_-\|_{\rm scat} < \eta_0\}$, взаимно однозначно и непрерывно в $\|\cdot\|_{\rm scat}$-норме.

Доказательство. Из теоремы XI.97 мы знаем, что $|||\varphi(\cdot)||| \leqslant 2\eta_0$. Поэтому, в силу (252),

$$\|e^{it_1A}\varphi(t_1) - e^{it_2A}\varphi(t_2)\| \leqslant \left\|\int_{t_1}^{t_2} e^{isA}J(\varphi(s))\,ds\right\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2}\beta\|\varphi(s)\|_d^q\|\varphi(s)\|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \beta(2\eta_0)^{q+1}\int_{t_1}^{t_2}(1+|s|)^{-dq}\,ds.$$

Таким образом, $\{e^{itA}\varphi(t)\}$ есть направленность Коши в $\mathcal{H}$ при $t \to +\infty$, поскольку $dq > 1$. Полагая

$$\varphi_+ = \lim_{t\to+\infty} e^{itA}\varphi(t),$$

получим, в силу унитарности e^{-itA},

$$\|\varphi(t) - e^{-itA}\varphi_+\| \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to +\infty.$$

Чтобы убедиться в том, что $\varphi_+ \in \Sigma_{\rm scat}$, заметим, что

$$e^{itA}\varphi(t) = \varphi_- + \int_{-\infty}^{t} e^{isA}J(\varphi(s))\,ds.$$

Устремляя t к $+\infty$, заключаем, что

$$\varphi_+ = \varphi_- + \int_{-\infty}^{\infty} e^{isA}J(\varphi(s))\,ds.$$

Теперь, в силу (254) и (252),

$$\|e^{-i(t-s)A}J(\varphi(s))\|_a \leqslant c_2(1+|t-s|)^{-d}\{\|J(\varphi(s))\|+\|J(\varphi(s))\|_b\} \leqslant$$
$$\leqslant c_2\beta(1+|t-s|)^{-d}\{\|\varphi(s)\|_a^q(1+2\|\varphi(s)\|)\} \leqslant$$
$$\leqslant c_2\beta(2\eta_0)^q(1+4\eta_0)(1+|t-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}$$

для каждого s и t. Поскольку

$$e^{-itA}\varphi_+ = e^{-itA}\varphi_- + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-s)A}J(\varphi(s))\,ds,$$

заключаем, что $\|e^{-itA}\varphi_+\|_a < \infty$ и

$$\sup_t\{(1+|t|)^d\|e^{-itA}\varphi_+\|_a\} \leqslant \sup_t\{(1+|t|)^d\|e^{-itA}\varphi_-\|_a\}+$$
$$+c_2\beta(2\eta_0)^q(1+4\eta_0)\sup_t\left\{(1+|t|)^d\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}\,ds\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_t(1+|t|)^d\|e^{-itA}\varphi_-\|_a+\eta_0/2$$

в силу леммы (часть (а)) и выбора η_0 в теореме XI.97. В итоге

$$\|\varphi_+\|_{\text{scat}} \leqslant \|\varphi_-\|_{\text{scat}}+\eta_0/2+\eta_0/2 \leqslant 2\eta_0.$$

Это доказывает (а).

Для доказательства непрерывности S предположим, что φ_- и ψ_- лежат в Σ_{scat} и $\|\varphi_-\|_{\text{scat}} \leqslant \eta_0$ и $\|\psi_-\|_{\text{scat}} \leqslant \eta_0$. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — соответствующие решения, даваемые теоремой XI.97. Покажем сначала, что $|||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)|||$ можно оценить с помощью $\|\varphi_- - \psi_-\|_{\text{scat}}$, а затем покажем, что $\|\varphi_+ - \psi_+\|_{\text{scat}}$ можно оценить с помощью $|||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)|||$. Поскольку

$$\varphi(t)-\psi(t) = e^{-itA}(\varphi_- - \psi_-) + \int_{-\infty}^{t} e^{-i(t-s)A}(J(\varphi(s))-J(\psi(s)))\,ds,$$

получаем

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\| \leqslant \|\varphi_- - \psi_-\| + \int_{-\infty}^{t}\|J(\varphi(s))-J(\psi(s))\|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi_- - \psi_-\| + \beta(2\eta_0)^q\int_{-\infty}^{t}(1+|s|)^{-dq}\|\varphi(s)-\psi(s)\|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi_- - \psi_-\| + \beta(2\eta_0)^q\left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+|s|)^{-dq}\,ds\right)|||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)|||.$$

Аналогично,

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\|_a \leqslant \|e^{-itA}(\varphi_- - \psi_-)\|_a + \int_{-\infty}^{t}\|e^{-i(t-s)A}(J(\varphi(s)) -$$

$$-J(\psi(s)))\|_a ds \leqslant \|e^{-itA}(\varphi_- - \psi_-)\|_a + c_2 \int_{-\infty}^{t} (1+|t-s|)^{-d} \{\|J(\varphi(s)) - J(\psi(s))\|_b + \|J(\varphi(s)) - J(\psi(s))\|\} ds \leqslant$$
$$\leqslant \|e^{-itA}(\varphi_- - \psi_-)\|_a + 3c_2\beta(2\eta_0)^q \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+|t-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq} ds\right) |||\varphi(\cdot) - \psi(\cdot)|||.$$

Объединяя две приведенные оценки, получаем

$$|||\varphi(\cdot) - \psi(\cdot)||| \leqslant \|\varphi_- - \psi_-\|_{\text{scat}} + c(\beta, \eta_0)\, |||\varphi(\cdot) - \psi(\cdot)|||,$$

где

$$c(\beta, \eta_0) = \beta(2\eta_0)^q \int_{-\infty}^{\infty} (1+|s|)^{-dq} ds + 3c_2\beta(2\eta_0)^q \sup_t \left\{1+|t|)^d \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq} ds\right\}.$$

Выбирая η_0 достаточно малым, можно добиться того, чтобы оценка

$$|||\varphi(\cdot) - \psi(\cdot)||| \leqslant 2\|\varphi_- - \psi_-\|_{\text{scat}} \tag{259}$$

вытекала из неравенства $c(\beta, \eta_0) \leqslant 1/2$. Далее,

$$\|\varphi_+ - \psi_+\|_{\text{scat}} \leqslant \|\varphi_- - \psi_-\|_{\text{scat}} + \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{isA}(J(\varphi(s)) - J(\psi(s)))ds \right\|_{\text{scat}},$$

и с помощью обычных оценок находим, что

$$\sup_t \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-s)A}(J(\varphi(s)) - J(\psi(s)))ds \right\| \leqslant c(\beta, \eta_0)\, |||\varphi(\cdot) - \psi(\cdot)|||$$

и

$$\sup_t \left\{(1+|t|)^d \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-s)A}(J(\varphi(s)) - J(\psi(s)))ds \right\|_a \right\} \leqslant$$
$$\leqslant c(\beta, \eta_0)\, |||\varphi(\cdot) - \psi(\cdot)|||,$$

так что, в силу (259),

$$\|\psi_+ - \psi_+\|_{\text{scat}} \leqslant \|\varphi_- - \psi_-\|_{\text{scat}} + c(\beta, \eta_0)\, |||\varphi(\cdot) - \psi(\cdot)||| \leqslant 2\|\varphi_- - \psi_-\|_{\text{scat}}.$$

Это доказывает равномерную $\|\cdot\|_{\text{scat}}$-непрерывность S при достаточно малых η_0. Доказательство взаимной однозначности отображения S оставим читателю (задача 126). ∎

Прежде чем переходить к примерам, отметим несколько важных аспектов этих теорем. Во-первых, условия теорем не требуют априорных оценок решения нелинейного уравнения, а в доказательствах не использовались энергетические неравенства. Единственное требование заключалось в достаточно быстром убывании решений *линейного* уравнения и в достаточно высокой степени нелинейности в нуле. В частности, выполнение условий (i)—(iii) не зависит от знака нелинейного члена. Во-вторых, предположим, что нелинейное уравнение имеет вид

$$\varphi'(t) = -iA\varphi(t) + \lambda J(\varphi(t)) \tag{260}$$

и выполняются условия (i)—(iii). Тогда для любого $\varphi_- \in \Sigma_{\text{scat}}$ утверждения теорем XI.97 и XI.98 справедливы при достаточно малых λ (выбор λ зависит от $\|\varphi_-\|_{\text{scat}}$). Наконец, путем небольшого изменения доказательства предыдущих теорем можно вывести глобальное существование для начальных данных при $t=0$, если они достаточно малы.

Теорема XI.99. Пусть A, $\mathcal{H}$ и J удовлетворяют условиям теоремы XI.97. Тогда для достаточно малых η_0 и любого $\varphi_0 \in \Sigma_{\text{scat}}$ с $\|\varphi_0\|_{\text{scat}} \leqslant \eta_0$ уравнение (249b) имеет сильно непрерывное глобальное Σ_{scat}-значное решение $\varphi(t)$, такое, что $\varphi(0)=\varphi_0$. Далее, существуют такие φ_+, $\varphi_- \in \Sigma_{\text{scat}}$, что

$$\|\varphi(t) - e^{-itA}\varphi_+\| \to 0, \qquad t \to +\infty,$$
$$\|\varphi(t) - e^{-itA}\varphi_-\| \to 0, \qquad t \to -\infty.$$

При любой $\varphi_0 \in \Sigma_{\text{scat}}$ аналогичное утверждение справедливо для интегрального уравнения, соответствующего (260), если λ достаточно мало (в зависимости от $\|\varphi_0\|_{\text{scat}}$).

Пример 1 (нелинейное уравнение Шредингера). Начнем с простого примера нелинейного уравнения Шредингера в одномерном пространстве:

$$iu_t = -u_{xx} + \lambda |u|^{p-1}u, \qquad u(x, 0) = f(x), \tag{261}$$

поскольку оно прекрасно иллюстрирует метод выбора описанных выше норм. Соответствующее свободное уравнение имеет вид

$$u_t - iu_{xx} = 0, \qquad u(x, 0) = f(x),$$

и $A = -d^2/dx^2$. Решение этого уравнения можно представить в явном виде

$$u(x, t) = (4\pi i t)^{-1/2} \int e^{i(x-y)^2/4t} f(y)\, dy,$$

и потому

$$\|u(x, t)\|_\infty \leqslant |t|^{-1/2} \|f\|_1.$$

Следовательно, можно сделать такой выбор:

$$\|u\|_a = \|u\|_\infty, \qquad \|u\|_b = \|u\|_1$$

Таким образом, выполнено условие (ii) с $d = 1/2$. Отметим, что в качестве нужного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ нельзя выбрать $L^2(\mathbb{R})$, поскольку неравенство $\|u\|_\infty \leqslant c\|u\|_2$ не выполняется. Однако, как видно из доказательства леммы Соболева (теорема IX.24),

$$\|u\|_\infty \leqslant c\|Bu\|_2, \tag{262}$$

где, как обычно, $B = \sqrt{-\Delta + m^2}$ Таким образом, мы возьмем

$$\|u\| = \|Bu\|_2,$$

так что будет выполнено условие (i). Остается проверить, для каких p выполняется (iii). Ниже мы заменим $|u|^{p-1}u$ на u^p, будем считать p целым и применять B так, как будто он равен d/dx. Техника лемм 3—5 § X.13 позволяет легко разобрать этот случай. Считая P подходящим полиномом, получаем

$$\begin{aligned}
\|J(u_1) - J(u_2)\| &= |\lambda|\,\|B(u_1^p - u_2^p)\|_2 = |\lambda|\,p\,\|(Bu_1)u_1^{p-1} - (Bu_2)u_2^{p-1}\|_2 \leqslant \\
&\leqslant |\lambda|\,p\,\|(Bu_1)(u_1 - u_2)P(u_1, u_2)\|_2 + |\lambda|\,p\,\|(Bu_1 - Bu_2)u_2^{p-1}\|_2 \leqslant \\
&\leqslant C\|Bu_1\|_2\|u_1 - u_2\|_\infty\|P(u_1, u_2)\|_\infty + C\|B(u_1 - u_2)\|_2\|u_2^{p-1}\|_\infty \leqslant \\
&\leqslant C\|Bu_1\|_2\|B(u_1 - u_2)\|_2(\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)^{p-2} + \\
&\qquad + C\|B(u_1 - u_2)\|_2\|u_2\|_\infty^{p-1} \leqslant \\
&\leqslant \beta(\|u_1\|_a + \|u_2\|_a)^{p-2}\|u_1 - u_2\|
\end{aligned}$$

для малых $\|u_1\|$ и $\|u_2\|$. Таким образом, первая часть условия (iii) выполняется с $q = p - 2$. Аналогично,

$$\begin{aligned}
\|J(u_1) - J(u_2)\|_b &= \|u_1^p - u_2^p\|_1 = \|(u_1 - u_2)Q(u_1, u_2)\|_1 \leqslant \\
&\leqslant C\|B(u_1 - u_2)\|_2(\|u_1\|_2 + \|u_2\|_2)(\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)^{p-2} \leqslant \\
&\leqslant \beta\|u_1 - u_2\|(\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)^{p-2}
\end{aligned}$$

для малых $\|u_1\|$ и $\|u_2\|$, так что вторая часть (iii) тоже выполняется при $q = p - 2$. Теперь, поскольку $d = 1/2$ и нужно, чтобы $dq > 1$, нужно потребовать, чтобы $q > 2$. В итоге при $p > 4$ теоремы XI.97—XI.99 гарантируют существование глобального решения уравнения (261) при малых начальных данных и приводят к теории рассеяния для этого уравнения.

Пример 2 (нелинейное уравнение Клейна—Гордона, $n = 1$). Прежде чем обсуждать уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + m^2u = -\lambda u^p, \tag{263}$$

нам нужно оценить убывание решений линейного уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + m^2u = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \tag{264}$$

в терминах подходящих норм, заданных на множестве начальных данных. Метода стационарной фазы для этого недостаточно, и нам придется использовать явные формулы решений линейного уравнения, содержащие специальные функции.

Лемма 2. Предположим, что $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Пусть $u(x, t)$ — решение уравнения (264) с начальными данными $\langle f, g\rangle$. Тогда

$$\|u(x, t)\|_\infty \leqslant C|t|^{-1/2}\{\|f\|_1+\|f'\|_1+\|f''\|_1+\|g'\|_1+\|g\|_1\}. \tag{265}$$

Доказательство Пусть $u(t)$ есть $L^2(\mathbb{R})$-значная функция, ставящая в соответствие каждому t функцию $u(\cdot, t)$. Явно функция $u(t)$ определяется формулой

$$u(t)=\cos(Bt)f+\frac{\sin(Bt)}{B}g,$$

или

$$[u(t)]^\frown(k)=\cos\left(t\sqrt{k^2+m^2}\right)\hat{f}(k)+\frac{\sin\left(t\sqrt{k^2+m^2}\right)}{\sqrt{k^2+m^2}}\hat{g}(k).$$

Иначе говоря, $u(t)$ при каждом t можно записать в виде

$$u(t)=\frac{\partial R}{\partial t}*f+R*g,$$

где R — обратное преобразование Фурье

$$R(x, t)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\frac{\sin t\sqrt{k^2+m^2}}{\sqrt{k^2+m^2}}\,dk,$$

понимаемое в смысле обобщенных функций. Свертка $R*g$ имеет смысл, поскольку $R\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, а $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Существует много способов представлять себе функцию $R(x, t)$. Вот один из них. Прежде всего заметим, что $R(x, t)$ равна нулю, если $x^2>t^2$. Это следует из теоремы Пэли — Винера для обобщенных функций с учетом аналитичности и характера роста $(k^2+m^2)^{-1/2}\times\sin t\sqrt{k^2+m^2}$ в комплексной k-плоскости Далее, легко проверить, что $R(x, t)$ инвариантна относительно преобразований Лоренца двумерной плоскости. Таким образом, $R(x, t)$ есть функция t^2-x^2 для всех $t>0$. Имея это в виду, для всех $x^2\leqslant t^2$ и $t>0$ можно написать

$$H\left(\sqrt{t^2-x^2}\right)\equiv R(x, t)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\frac{\sin t\sqrt{k^2+m^2}}{\sqrt{k^2+m^2}}\,dk.$$

Дифференцируя H дважды по t и дважды по x и вычитая результаты, легко обнаружить, что

$$H''(y)+\frac{1}{y}H'(y)+m^2H(y)=0,$$

так что

$$H(y) = cJ_0(my) + dY_0(my),$$

где J_0 и Y_0 — функции Бесселя. Константа d должна равняться нулю, поскольку $R(\cdot,\ t) \in L^2(\mathbb{R})$, а Y_0 имеет особенность вида $1/y$ при $y=0$. Полагая $x=0$, находим, что $c=1/2$, значит, для $t>0$

$$R(x,\ t) = {}^1/_2\chi_{\{x \mid x^2 \leqslant t^2\}}(x)\, J_0\left(m\sqrt{t^2-x^2}\right).$$

В итоге получаем следующее представление:

$$(R * g)(x,\ t) = \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} J_0\left(m\sqrt{t^2-y^2}\right) g(x-y)\, dy. \tag{266}$$

Для оценки убывания $R*g$ воспользуемся следующими соотношениями:

$$J_0(\mu) = \left(\frac{2}{\mu\pi}\right)^{1/2} \cos\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) + O(\mu^{-3/2}),$$
$$J_1(\mu) = O(\mu^{-1/2}),$$

справедливыми при $\mu \to \infty$. Запишем (266) в виде суммы интегралов по $\{y \mid |y| \leqslant t/2\}$ и по $\{y \mid t/2 \leqslant |y| \leqslant t\}$. Первый из них легко оценить с помощью соотношения $|J_0(\mu)| \leqslant c\mu^{-1/2}$:

$$ct^{-1/2}\int_{-t/2}^{t/2} |g(x-y)|\, dy \leqslant ct^{-1/2}\|g\|_1. \tag{267}$$

Остаются два интеграла, один из которых представим в виде

$$\frac{1}{2}\int_{t/2}^{t} J_0\left(m\sqrt{t^2-y^2}\right) g(x-y)\, dy =$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi m}\right)^{1/2} \int_{t/2}^{t} \frac{\cos\left(m\sqrt{t^2-y^2}-\pi/4\right)}{(t^2-y^2)^{1/4}} g(x-y)\, dy +$$
$$+ \int_{t/2}^{t} O\left((t^2-y^2)^{-3/4}\right) g(x-y)\, dy.$$

Второй член оценивается неравенством

$$\int_{t/2}^{t} O\left((t^2-y^2)^{-3/4}\right) g(x-y)\, dy \leqslant$$
$$\leqslant ct^{-3/4}\|g\|_\infty \int_{t/2}^{t} (t-y)^{-3/4}\, dy \leqslant ct^{-1/2}\|g\|_\infty.$$

Для первого члена путем интегрирования по частям получаем

$$-g(x-y)\frac{(t^2-y^2)^{1/4}}{my\sqrt{2\pi m}}\sin\left(m\sqrt{t^2-y^2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{y=t/2}^{y=t}+$$

$$+\frac{1}{m\sqrt{2\pi m}}\int_{t/2}^{t}\sin\left(m\sqrt{t^2-y^2}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{d}{dy}\left\{\frac{(t^2-y^2)^{1/4}}{y}g(x-y)\right\}dy.$$

Оба полученных члена легко оцениваются величиной $ct^{-1/2}(\|g\|_1+\|g'\|_1)$. Комбинируя эти факты с (267), находим, что

$$\|R*g\|_\infty\leqslant ct^{-1/2}(\|g\|_1+\|g'\|_1).$$

Для анализа $\left(\frac{\partial R}{\partial t}*f\right)$ воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{1}{2}[\delta(x+t)+\delta(x-t)]+\frac{m}{2}\frac{t}{\sqrt{t^2-x^2}}J_1(m\sqrt{t^2-x^2}),$$

которое дает равенство

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}*f\right)(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]+$$

$$+\frac{m}{2}\int_{-t}^{t}\frac{t}{\sqrt{t^2-y^2}}J_1(m\sqrt{t^2-y^2})f(x-y)\,dy. \qquad (268)$$

Как и прежде, сначала оценим интеграл по $\{y\mid |y|\leqslant t/2\}$. Затем с помощью интегрирования по частям оставшегося выражения легко убедиться, что граничные члены при $y=\pm t$ сокращаются с первым членом в (268). Оценка остальных граничных членов и оставшегося интеграла с помощью второго интегрирования по частям таким же способом, как и выше, приводит к окончательному неравенству

$$\left\|\frac{\partial R}{\partial t}*f\right\|_\infty\leqslant ct^{-1/2}(\|f\|_1+\|f'\|_1+\|f''\|_1).$$

Еще одна производная f появилась из-за дополнительного интегрирования по частям. Итак, лемма доказана. ∎

Для достаточно хороших f и g лемма позволяет получить нужную оценку решения и приводит к определению двух «норм»:

$$\|\langle u,v\rangle\|_a=\|u\|_\infty,$$
$$\|\langle u,v\rangle\|_b=\|u\|_1+\|u'\|_1+\|u''\|_1+\|v\|_1+\|v'\|_1.$$

В качестве гильбертова пространства естественно взять

$$\mathcal{H}=\{\varphi=\langle u,v\rangle\mid\ \|\varphi\|^2=\|Bu\|_2^2+\|v\|_2^2<\infty\}.$$

В таком случае условие (i) выполнено в силу (262). В силу леммы неравенство

$$\|e^{-itA}\varphi\|_a\leqslant c\,|t|^{-1/2}\|\varphi\|_b$$

выполняется для достаточно гладких φ, а по линейности оно распространяется на все $\varphi \in \mathscr{H}$. В итоге мы получаем (ii). Остается найти p, для которых справедливо (iii). Поскольку $J(\varphi) = \langle 0, -\lambda u^p \rangle$, то

$$\begin{aligned} \| J(\varphi_1) - J(\varphi_2) \| &\leqslant |\lambda| \, \| u_1^p - u_2^p \|_2 \leqslant \\ &\leqslant c |\lambda| \, \| u_1 - u_2 \|_2 (\| u_1 \|_\infty + \| u_2 \|_\infty)^{p-1} \leqslant \\ &\leqslant c |\lambda| (\| \varphi_1 \|_a + \| \varphi_2 \|_a)^{p-1} \| \varphi_1 - \varphi_2 \|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| J(\varphi_1) - J(\varphi_2) \|_b &= |\lambda| \{ \| u_1^p - u_2^p \|_1 + \| (u_1^p - u_2^p)' \|_1 \} \leqslant \\ &\leqslant c |\lambda| \{ \| u_1 - u_2 \|_2 + \| u_1' - u_2' \|_2 \} (\| u_1 \|_2 + \| u_2 \|_2) (\| u_1 \|_\infty + \| u_2 \|_\infty)^{p-2} \leqslant \\ &\leqslant |\lambda| (\| \varphi_1 \|_a + \| \varphi_2 \|_a)^{p-2} \| \varphi_1 - \varphi_2 \|. \end{aligned}$$

В итоге условие (iii) справедливо при $q = p - 2$. Поскольку $d = 1/2$, а нам нужно, чтобы $dq > 1$, необходимо выбрать $q > 2$, так что $p > 4$. Таким образом, с помощью теорем XI.97—XI.99 доказано существование глобального решения для малых начальных данных и существование для них оператора рассеяния при $p > 4$. Отметим, что этот результат не зависит от знака λ и от p (допустимы четные, нечетные и даже дробные значения p).

Пример 3 (нелинейное уравнение Клейна—Гордона, $n = 3$). Для изучения нелинейного уравнения Клейна—Гордона (245) с $F(u) = -\lambda |u|^{p-1} u$ в трехмерном пространстве прежде всего необходима лемма, аналогичная лемме 2.

Лемма 3. Пусть $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ и $u(x, t)$ — решение задачи Коши

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

Тогда существует универсальная постоянная c, такая, что

$$\| u(x, t) \|_\infty \leqslant c |t|^{-3/2} \| \langle f, g \rangle \|_b, \tag{269}$$

где норма $\| \langle f, g \rangle \|_b$ определена как сумма L_1-норм всех производных f порядка $\leqslant 3$ и всех производных g порядка $\leqslant 2$.

Доказательство этой леммы в принципе похоже на доказательство леммы 2, однако явный вид $R(x, t)$ чуть сложнее. Возникают дополнительные производные от начальных данных, поскольку сама функция $R(x, t)$ содержит J_1. Таким образом, необходимо интегрировать по частям дважды члены, содержащие g, и трижды члены с f. Мы оставляем детали этого доказательства читателю.

Итак, выберем $\| \varphi \|_b$, как сказано в лемме, и положим $\| \varphi \|_a = \| u \|_\infty$. Тогда условие (ii) выполняется при $d = 3/2$. Однако теперь в качестве гильбертова пространства взять пространство $\mathscr{H}$ нельзя, ибо при $n = 3$ неравенство $\| u \|_\infty \leqslant c \| Bu \|_2$ не имеет места. Однако *справедливо* неравенство $\| u \|_\infty \leqslant c \| B^2 u \|_2$, так что мы можем взять

$$\|\langle u, v\rangle\|^2 = \|B^2 u\|_2^2 + \|Bv\|_2^2, \qquad \mathscr{H}_1 = \{\langle u, v\rangle \mid \|\langle u, v\rangle\| < \infty\}.$$

Тогда свободная динамика унитарна на $\mathscr{H}_1$ и выполнено условие (i). Далее, вычисления, аналогичные проделанным в одномерном случае, показывают, что

$$\|J(\varphi_1) - J(\varphi_2)\| = |\lambda|\, \|B(u_1^p - u_2^p)\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)(\|\varphi_1\|_a + \|\varphi_2\|_a)^{p-2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Выражение нормы $\|J(\varphi_1) - J(\varphi_2)\|_b$ содержит много членов. Рассмотрим член с производной D наивысшего порядка (D_i — частная производная по произвольной координате):

$$\|D_i^2(u_1^p - u_2^p)\|_1 \leqslant \|(D_i^2(u_1 - u_2))\, P(u_1, u_2)\|_1 +$$
$$+ 2\|(D_i(u_1 - u_2))\, D_i P(u_1, u_2)\|_1 + \|(u_1 - u_2)\, D_i^2 P(u_1, u_2)\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant C(\|Bu_1\|_2 + \|Bu_2\|_2)(\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)^{p-2} \|B^2(u_1 - u_2)\|_2 +$$
$$+ C(\|Bu_1\|_2 + \|Bu_2\|_2)^2 (\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)^{p-3} \|u_1 - u_2\|_\infty \leqslant$$
$$\leqslant \beta\{(\|\varphi_1\|_a + \|\varphi_2\|_a)^{p-3} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_a +$$
$$+ (\|\varphi_1\|_a + \|\varphi_2\|_a)^{p-2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|\}.$$

В итоге (iii) выполняется при $q = p - 2$, но по несколько иным причинам, чем в одномерном случае (не нужно предполагать, что равенство $q = p - 2$ справедливо во всех размерностях). Заметим, что в случае $q = 1$ постоянная β в (iii) мала, если мала сумма $\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$. Поскольку $d = 3/2$, нужно взять $q \geqslant 1$, и тогда $p \geqslant 3$. Для всех таких p мы будем иметь теорию рассеяния и существование глобального решения для уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^{p-1} u, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{270}$$

с малыми начальными данными независимо от четности p и знака λ.

Для обсуждения теории рассеяния в случае решений нелинейных уравнений, когда ни начальные данные, ни константа связи не малы, нужны результаты о существовании глобальных решений Таким образом, в отличие от малых начальных данных нелинейные члены в общем случае должны иметь правильный знак, так чтобы сохранялась и была ограничена снизу энергия поля. Используя этот закон сохранения, можно показать, что норма любого локального решения не может обращаться в бесконечность за конечное время, и тем самым доказать существование глобального решения (см. § X.13) Если глобальное решение существует, то методы, аналогичные использованным в случае малых начальных данных, позволяют построить волновые операторы. Обозначим через M_t группу *нелинейных* операторов

$$M_t\colon \varphi_0 \longmapsto \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ есть решение интегрального уравнения (249b):

$$\varphi(t) = e^{-itA}\varphi_0 + \int_0^t e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\,ds.$$

Теорема XI.100 (существование волновых операторов). *Пусть* A — *самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *и* J — *нелинейное отображение* $\mathcal{H}$ *в себя. Предположим, что существуют «нормы»* $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$, *удовлетворяющие условиям* (i) — (iii) *при* $q > 1$. *Предположим, что для каждого* η *и* T *решения* $M_t\varphi_0$ *уравнения* (249b) *равномерно ограничены (по* $\|\cdot\|$-*норме) для всех* $\|\varphi_0\| \leqslant \eta$ *и всех* $0 < |t| \leqslant T$. *Тогда:*

(a) *для каждого* $\varphi_- \in \Sigma_{\text{scat}}$ *существует единственное глобальное решение* $\varphi(\cdot)$ *уравнения* (249b), *такое, что* $\varphi(t) \in \Sigma_{\text{scat}}$ *при любом* t *и*
$$\|\varphi(t) - e^{-itA}\varphi_-\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty;$$

(b) Ω^+: $\varphi_- \mapsto \varphi(0)$ — *взаимно однозначное отображение из* Σ_{scat} *в* Σ_{scat}, *равномерно непрерывное на шарах в* Σ_{scat};

(c) *для* $\varphi_+ \in \Sigma_{\text{scat}}$, $t \to +\infty$ *и отображения* Ω^-: $\varphi_+ \mapsto \varphi(0)$ *справедливы утверждения, аналогичные* (a) *и* (b).

Доказательство. Мы только наметим идею доказательства, поскольку детали очень похожи на случай малых начальных данных. Пусть задано $\varphi_- \in \Sigma_{\text{scat}}$ и $\|\varphi_-\|_{\text{scat}} \leqslant \eta$ (отметим, что η не предполагается малым). Пусть $X_{\eta,\varphi_-,T}$ обозначает множество $\mathcal{H}$-значных непрерывных функций $\psi(\cdot)$ на $(-\infty, T]$, таких, что

$$|||\psi(t) - e^{-itA}\varphi_-|||_{(-\infty,T]} \equiv \sup_{-\infty < t \leqslant T} \|\psi(t) - e^{-itA}\varphi_-\| + \sup_{-\infty < t \leqslant T} (1+|t|)^d \|\psi(t) - e^{-itA}\varphi_-\|_a \leqslant \eta.$$

Для каждого T множество $X_{\eta,\varphi_-,T}$ есть полное метрическое пространство. Введем $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{M}$, как и раньше. Тогда

$$(\mathcal{M}\psi)(t) = e^{-itA}\varphi_- + (\mathcal{Y}\psi)(t).$$

Оценки (256) и (257) теоремы XI.97 показывают, что $|||(\mathcal{Y}\psi)(t)|||_{(-\infty,T]}$ мала и что $\mathcal{M}$ — сжатие, если T достаточно близко к $-\infty$. (Поскольку начальные данные не малы, нужное условие малости вытекает из пункта (b) леммы 1, из-за чего мы и требуем, чтобы $q > 1$). Таким образом, $\mathcal{M}$ имеет неподвижную точку в X_{η,φ_-,T_0} при некотором определенном T_0. Следовательно, как и в теореме XI.97, можно доказать, что $\varphi(t) \in \Sigma_{\text{scat}}$ для каждого $t \in (-\infty, T_0]$ и что предел в (a) существует.

В силу оценок (256) и (257), для всех φ_- с $\|\varphi_-\| \leqslant \eta$ можно пользоваться одним и тем же T_0. Поэтому можно определить отображение

$$\Omega^+_{T_0}\colon\ \varphi_- \mapsto \varphi(T_0)$$

на $\mathcal{B}_\eta = \{\psi \in \Sigma_{scat} \mid \|\psi\|_{scat} \leqslant \eta\}$ и, как в теоремах XI.97 и XI.98, доказать его взаимную однозначность и равномерную непрерывность как отображения из $\mathcal{B}_\eta$ в Σ_{scat}. До сих пор существование глобального решения не использовалось.

Легко проверить, что для $t \leqslant T_0$ наше решение $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(t) = e^{-i(t-T_0)A}\varphi(T_0) + \int_{T_0}^{t} e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\, ds.$$

Поскольку J удовлетворяет условию Липшица, функция $\varphi(t) = M_{t-T_0}\varphi(T_0)$ есть локальное решение этого уравнения в окрестности T_0, но, в силу предположений об ограниченности M_t, это глобальное по t решение. В силу локальной единственности, определенное таким образом $\varphi(t)$ совпадает с ранее построенным $\varphi(t)$ при $t \leqslant T_0$. Легко установить, что $\varphi(t)$ удовлетворяет (249b) и что, в силу (254) и (253), решение $\varphi(t)$ лежит в Σ_{scat} при всех t. В самом деле, из равномерной ограниченности M_t вместе с (253) и (254) следует, что M_t для каждого t и каждого η_0 есть равномерно непрерывное взаимно однозначное отображение $\mathcal{B}_{\eta_0}$ в Σ_{scat} (задача 128). Таким образом, для каждого η можно определить

$$\Omega^+ = M_{-T_0}\Omega^+_T, \quad \text{т. е. } \Omega^+\colon\ \varphi_- \mapsto \varphi(0).$$

Заметим, что T_0 зависит от η. В силу свойств M_{-T_0} и $\Omega^+_{T_0(\eta)}$, получаем, что Ω^+ — взаимно однозначное равномерно непрерывное отображение $\mathcal{B}_\eta$ в Σ_{scat}. Поскольку η произвольно, Ω^+ переводит Σ_{scat} в Σ_{scat} и равномерно непрерывно на шарах. Довольно просто проверить, что Ω^+ взаимно однозначно на всем Σ_{scat}. Это доказывает (a) и (b); доказательство (c) аналогично. ∎

Примеры 1 и 2 (заново). Для доказательства существования волновых операторов нужно установить существование глобального решения и равномерную непрерывность. Для нелинейного уравнения Клейна — Гордона это сделано при $\lambda > 0$ и $p \geqslant 1$ в задаче 75 к гл. X. Аналогичные методы (задача 130) применимы и в случае нелинейных уравнений Шредингера, если воспользоваться гильбертовым пространством из примера 1 и сохраняющимися величинами

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2\, dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \left\{\frac{1}{2}|u_x(x, t)|^2 + \frac{1}{p+1}|u(x, t)|^{p+1}\right\} dx.$$

В итоге, в силу теоремы XI.100 и уже проведенного анализа примеров 1 и 2, будет доказано существование волновых операторов при $p>4$ и $\lambda>0$.

Пример 3 (заново). В случае $n=3$ мы установили, что условия (i)—(iii) выполняются при $d=3/2$ и $q=p-2$. Поскольку в теореме XI.100 q должно быть больше 1, нужно брать $p>3$. При $p\geqslant 5$ вопрос о существовании глобальных сильных решений уравнения (270) открыт; при $p=3$ методами § X.13 можно доказать существование глобальных решений и равномерную непрерывность на шарах. В пограничном случае $p=3$, когда $q=1$ и теорема XI.100 может не выполняться, требуемые результаты можно получить при помощи специальной оценки

$$\|e^{-i(t-s)A}J(\varphi(s))\|_a=\|B^{-1}\sin[(t-s)B]u^3(s)\|_\infty\leqslant$$
$$\leqslant C\|Bu^3(s)\|_2\leqslant C\|\varphi(s)\|\,\|\varphi(s)\|_a^2.$$

Она позволяет провести доказательство теоремы XI.100 и в случае $p=3$. В задаче 129 от читателя требуется провести такое доказательство.

Все это служит иллюстрацией очень важного факта. Поскольку условия теорем XI.97—XI.101 и способы доказательства носят весьма общий характер, в конкретных приложениях часто можно получить более сильные результаты, используя специфические свойства конкретных операторов.

Теперь, как и в квантовомеханическом случае, мы подошли к действительно трудной задаче: к вопросу об асимптотической полноте. Для того чтобы понять, в чем здесь дело, предположим, что φ_0 лежит в области значений Ω^+, построенного в теореме XI.100. Нам надо доказать существование такого состояния φ_+, что решение $\varphi(t)$ уравнения

$$\varphi(t)=e^{-itA}\varphi_0+\int_0^t e^{-i(t-s)A}J(\varphi(s))\,ds$$

удовлетворяет условию

$$\|\varphi(t)-e^{-itA}\varphi_+\|\to 0 \qquad \text{при} \qquad t\to+\infty.$$

Попробуем методом Кука построить φ_+, показав, что $\{e^{itA}\varphi(t)\}$ есть направленность Коши при $t\to\infty$. С помощью (249b) получаем

$$\|e^{it_1A}\varphi(t_1)-e^{it_2A}\varphi(t_2)\|\leqslant\int_{t_2}^{t_1}\|J(\varphi(s))\|\,ds.$$

Таким образом, все, что нужно,—это оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|J(\varphi(s))\|\,ds<\infty. \tag{270a}$$

В типичных случаях для этого надо получить априорные оценки, которые гарантируют достаточно быстрое убывание по t подходящих норм всех решений уравнений (249) с гладкими начальными данными. Более того, для доказательства непрерывности оператора рассеяния скорость такого убывания нужно уметь оценивать в терминах скорости убывания соответствующих решений свободного уравнения. Как мы объяснили в начале этого раздела, нужное убывание может не иметь места для общего нелинейного уравнения из-за наличия связанных состояний. Но даже без связанных состояний доказательство априорных оценок — очень трудное дело. На самом деле пока изучены лишь очень специальные случаи. Мы проиллюстрируем используемые при этом методы, доказав следующую теорему.

Теорема XI.101. Пусть f и g — вещественнозначные функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, и пусть u — решение задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt}-\Delta u=-u^3, \qquad x\in\mathbb{R}^3, \quad t\in\mathbb{R}, \\ &u(x,\ 0)=f(x), \qquad u_t(x,\ 0)=g(x). \end{aligned} \tag{270b}$$

Пусть $\varphi(t)=\langle u(x,\ t),\ u_t(x,\ t)\rangle$ и $\|\varphi\|$ обозначает энергетическую норму без взаимодействия: $\|\varphi\|^2=\|\nabla u\|_2^2+\|u_t\|_2^2$. Пусть e^{-itA}, где $A=i\begin{bmatrix}0 & I\\ \Delta & 0\end{bmatrix}$, — группа, соответствующая решению свободного волнового уравнения $v_{tt}-\Delta v=0$. Тогда существуют такие $\psi_\pm$, что $\|\psi_\pm\|<\infty$ и $\|\varphi(t)-e^{-itA}\psi_\pm\|\to 0$ при $t\to\pm\infty$.

Существование гладких решений (270b) обсуждается в задаче 76 к гл. X. С помощью методов § X.13 можно доказать, что при начальных данных класса $C_0^\infty\times C_0^\infty$ решение $u(x,\ t)$ лежит в $C_0^\infty\times C_0^\infty$ при всех t. Результат, аналогичный теореме XI.101, справедлив для комплекснозначных решений, если $-u^3$ заменить на $-u|u|^2$. Теорема XI.101 не вполне удовлетворительна. Хотя она и утверждает асимптотическую свободу решений (270b) с гладкими начальными данными, она ничего не говорит о том, какие $\psi_\pm$ реализуются. Таким образом, у нас нет явного описания области определения оператора рассеяния. Тем не менее доказательство теоремы XI.101 иллюстрирует трудности, которые надо преодолевать при доказательстве асимптотической полноты.

Наше доказательство теоремы XI.101 будет основано на существовании специальной сохраняющейся величины — **конформного заряда**

$$Q_C=\int k_0(\mathrm{x},\ t)\,d^3x, \tag{270c}$$

где

$$k_0(\mathrm{x},\ t)=(t^2+|\mathrm{x}|^2)\left[{}^1/{}_2u_t^2+{}^1/{}_2(\nabla u)^2+{}^1/{}_4u^4\right]+2tu_t\mathrm{x}\cdot\nabla u+2tu_tu-u^2. \tag{270d}$$

Используя тот факт, что u удовлетворяет (270b) и имеет компактный носитель при каждом t, легко проверить, что Q_C не зависит от t. Ответ на более тонкий вопрос: как находить такие сохраняющиеся величины — дан в дополнении, где также объясняется, какие члены нужно интегрировать по частям, чтобы установить независимость от времени.

Доказательство теоремы XI.101. Поскольку $J(\langle u, v\rangle) = \langle 0, -u^3\rangle$, имеем $\|J(\varphi(s))\| = \|u^3\|_2$. Учитывая сохранение энергии

$$E(t) = \int {}^1/_2[(\nabla u)^2 + u_t^2 + {}^1/_2 u^4]\, d^3x$$

и оценку Соболева $\|u\|_6 \leqslant C\|\sqrt{-\Delta+1}\, u\|_2$, легко убедиться (задача 76 к гл. X), что $\|u(s)^3\|_2$ ограничена при изменении s внутри любого компактного множества. Таким образом, для проверки (270a) нужно показать, что $\|u(s)^3\|_2$ достаточно быстро убывает на ∞. Записав $\|u(s)^3\|_2 \leqslant \|u(s)\|_\infty \|u(s)^2\|_2$, мы сначала используем сохранение Q_C для доказательства неравенства $\|u(s)^2\|_2 \leqslant C|s|^{-1}$, а затем применим оценку Соболева и итерационную процедуру для того, чтобы установить неравенство $\|u(s)\|_\infty \leqslant C|s|^{-1/3}$.

Начнем с равенства $r^{-1}\nabla(ru) = \nabla u + r^{-2}\mathbf{r}u$, в силу которого

$$(r^2+t^2)(\nabla u)^2 = (r^2+t^2)[r^{-1}\nabla(ru)]^2 + r^{-2}(r^2+t^2)u^2 + A,$$

где

$$A = -2u\frac{\partial(ru)}{\partial r} - 2r^{-2}t^2u\frac{\partial(ru)}{\partial r}.$$

После некоторых преобразований получим, что

$$r^2A = r^2u^2 - t^2u^2 - \frac{\partial}{\partial r}(r^3u^2 + t^2ru^2),$$

и потому

$$\int_{\mathbf{R}^3} A\, d^3x = \int_{\mathbf{R}^3} u^2r^{-2}(r^2 - t^2)\, d^3x,$$

ибо $\int r^{-2}(\partial f/\partial r)\, d^3x = -4\pi f(0)$, если носитель f компактен, а сама функция f гладкая вне нуля и класса C^1 вплоть до нуля. В итоге

$$\int (r^2+t^2)(\nabla u)^2\, d^3x = \int [(r^2+t^2)(r^{-1}\nabla(ru))^2 + 2u^2]\, d^3x,$$

так что

$$Q_C = \int (t^2 + |\mathbf{x}|^2)({}^1/_4 u^4)\, d^3x + \int B\, d^3x,$$

где

$$B = {}^1/_2(r^2+t^2)[(r^{-1}\nabla(ru))^2 + u_t^2] + 2tu_t\mathbf{x}\cdot(r^{-1}\nabla(ru)).$$

Применяя неравенство $abcd \leqslant [{}^1/_2(a^2+c^2)][{}^1/_2(b^2+d^2)]$, мы видим, что B положительно. Поэтому $\int u^4\, d^3x \leqslant 4Q_0 t^2$, откуда

$$\|u(t)^2\|_2 \leqslant C\,|t|^{-1} \qquad (270e)$$

Пусть $\varphi_0 = \langle f, g\rangle$. Первая компонента $e^{-itA}\langle f, g\rangle$ удовлетворяет свободному уравнению, и в силу (216a) ее можно заменить величиной

$$[e^{-itA}\langle f, g\rangle]_1 = (4\pi t)^{-1}\int g(x+y)\, dS_{|t|} + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{4\pi t}\int f(x+y)\, dS_{|t|}\right],$$

где $dS_{|t|}$ — обычная мера на сфере радиуса $|t|$ (с центром в нуле), нормированная условием $\int dS_{|t|} = 4\pi t^2$. Из этого явного представления немедленно вытекает, что для $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\|[e^{-itA}\varphi_0]_1\|_\infty \leqslant C(1+|t|)^{-1}. \qquad (270f)$$

Более того,

$$\|[e^{-itA}\langle 0, g\rangle]_1\|_\infty \leqslant C\,|t|^{-1/2}\,\|\nabla g\|_{6/5}. \qquad (270g)$$

Для доказательства этого неравенства положим $|y|=1$, $t>0$ и учтем, что

$$|g(y)| \leqslant \int_1^\infty |(\nabla g)(ry)|\, dr,$$

так что, в силу неравенства Гёльдера,

$$\left|\int g(y)\, dS_1\right| \leqslant \int_{S_1}\int_1^\infty (|\nabla g|\, r^{5/3})\, r^{-5/3}\, dr\, dS_1 \leqslant C\left\{\int_{S_1}\int_1^\infty |\nabla g|^{6/5} r^2\, dr\, dS_1\right\}^{5/6},$$

где $C = \left(4\pi\int_1^\infty r^{-10}\, dr\right)^{1/6} < \infty$. Эта оценка и масштабное преобразование (для $t>0$) дают

$$\left|\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t} g(x+y)\, dS_t\right| \leqslant C t^{-1/2}\left\{\int_{S_1}\int_t^\infty |\nabla g|^{6/5} r^2\, dr\, dS_1\right\}^{5/6},$$

откуда следует (270g).

Теперь предположим, что u есть решение (270b). Тогда (270f) и (270g) дают (для $t>0$):

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leqslant \|[e^{-itA}\varphi_0]_1\|_\infty + \int_0^t \|[e^{-i(t-s)A}\langle 0, -u(s)^3\rangle]_1\|_\infty\, ds \leqslant$$

$$\leqslant C(1+t)^{-1} + C\int_0^t (t-s)^{-1/2}\,\|\nabla(u(s)^3)\|_{6/5}\, ds.$$

Используя (270e) и априорную ограниченность $\|\nabla u\|_2$, вытекающую из сохранения энергии, получаем

$$\|\nabla u^3\|_{6/5} \leqslant 3\|(\nabla u)\, u^2\|_{6/5} \leqslant 3\|\nabla u\|_2 \|u^2\|_3 \leqslant$$
$$\leqslant C\|u\|_4^{4/3}\|u\|_\infty^{2/3} \leqslant C(1+s)^{-2/3}\|u\|_\infty^{2/3}.$$

Таким образом, если положить $M(t) = \sup\limits_{0 \leqslant s < t} \|u(\cdot, s)\|_\infty$, то

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leqslant C(1+t)^{-1} + DM(t)^{2/3} t^{-1/6},$$

где $D = C\int\limits_0^1 (1-\sigma)^{-1/2}\sigma^{-2/3}\, d\sigma < \infty$. Отсюда мы прежде всего заключаем, что $\sup\limits_{0 \leqslant t < \infty} M(t) < \infty$, а затем, что

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leqslant C|t|^{-1/6} \tag{270h}$$

для $t > 0$. Доказательство для $t < 0$ аналогично. Неравенства (270h) и (270e) влекут за собой неравенство (270a), которое, как уже отмечалось, доказывает утверждение теоремы.

Дополнение к § XI.13. Сохраняющиеся токи

Один из способов убедиться в сохранении Q_C, заданного формулой (270c), состоит в том, чтобы ввести величину

$$\mathbf{k} = -(\nabla u)\{(|\mathbf{x}|^2 + t^2)\, u_t + 2t\mathbf{x}\cdot\nabla u + 2tu\} -$$
$$-2t\mathbf{x}\,(^1/_2 u_t^2 - {}^1/_2(\nabla u)^2 - {}^1/_4 u^4) \tag{270i}$$

и, воспользовавшись дифференциальным уравнением (270b), получить равенство

$$\frac{\partial k_0}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{k} = 0.$$

Тогда

$$\frac{dQ_C}{dt} = \int \frac{\partial k_0}{\partial t}\, d^3x = -\int \nabla\cdot\mathbf{k}\, d^3x = 0,$$

если учесть, что u, а следовательно, и $\mathbf{k}$ принадлежат классу C^∞ и имеют компактный носитель по x для любого t (это вытекает из принадлежности начальных данных классу $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$).

Темой настоящего дополнения служит круг идей, в целом называемых **теоремой Нётер**, объясняющий способы отыскания величин, подобных k_0 и $\mathbf{k}$. Лучше всего изложить их в рамках лагранжева формализма, который мы прежде всего и опишем. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, а u — вещественнозначная функция $\mathbf{x}$ (по поводу распространения теории на многокомпонентные u см. задачу 152). Пусть $\mathscr{L}$ — функция $n+2$ вещественных переменных: $\mathscr{L}(a, \mathbf{b}, c)$, где $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. По заданной на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ вещественнозначной функции $u(\mathbf{x}, t)$ мы строим функцию $F_u(\mathbf{x}, t) = \mathscr{L}(u_t, \nabla u, u)$,