Используя (270e) и априорную ограниченность $\|\nabla u\|_2$, вытекающую из сохранения энергии, получаем

$$\|\nabla u^3\|_{6/5} \leqslant 3\|(\nabla u)\, u^2\|_{6/5} \leqslant 3\|\nabla u\|_2\|u^2\|_3 \leqslant \leqslant C\|u\|_4^{4/3}\|u\|_\infty^{2/3} \leqslant C(1+s)^{-2/3}\|u\|_\infty^{2/3}.$$

Таким образом, если положить $M(t) = \sup\limits_{0 \leqslant s < t} \|u(\cdot, s)\|_\infty$, то

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leqslant C(1+t)^{-1} + DM(t)^{2/3} t^{-1/6},$$

где $D = C\int\limits_0^t (1-\sigma)^{-1/2}\sigma^{-2/3}\, d\sigma < \infty$. Отсюда мы прежде всего заключаем, что $\sup\limits_{0 \leqslant t < \infty} M(t) < \infty$, а затем, что

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leqslant C|t|^{-1/6} \qquad (270h)$$

для $t > 0$. Доказательство для $t < 0$ аналогично. Неравенства (270h) и (270e) влекут за собой неравенство (270a), которое, как уже отмечалось, доказывает утверждение теоремы.

Дополнение к § XI.13. Сохраняющиеся токи

Один из способов убедиться в сохранении Q_C, заданного формулой (270c), состоит в том, чтобы ввести величину

$$\mathbf{k} = -(\nabla u)\{(|\mathbf{x}|^2 + t^2)\, u_t + 2t\mathbf{x}\cdot\nabla u + 2tu\} - -2t\mathbf{x}\left(\tfrac{1}{2}u_t^2 - \tfrac{1}{2}(\nabla u)^2 - \tfrac{1}{4}u^4\right) \qquad (270i)$$

и, воспользовавшись дифференциальным уравнением (270b), получить равенство

$$\frac{\partial k_0}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{k} = 0.$$

Тогда

$$\frac{dQ_C}{dt} = \int \frac{\partial k_0}{\partial t}\, d^3x = -\int \nabla\cdot\mathbf{k}\, d^3x = 0,$$

если учесть, что u, а следовательно, и $\mathbf{k}$ принадлежат классу C^∞ и имеют компактный носитель по x для любого t (это вытекает из принадлежности начальных данных классу $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$).

Темой настоящего дополнения служит круг идей, в целом называемых **теоремой Нётер**, объясняющий способы отыскания величин, подобных k_0 и $\mathbf{k}$. Лучше всего изложить их в рамках лагранжева формализма, который мы прежде всего и опишем. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, а u — вещественнозначная функция $\mathbf{x}$ (по поводу распространения теории на многокомпонентные u см. задачу 152). Пусть $\mathscr{L}$ — функция $n+2$ вещественных переменных: $\mathscr{L}(a, \mathbf{b}, c)$, где $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. По заданной на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ вещественнозначной функции $u(\mathbf{x}, t)$ мы строим функцию $F_u(\mathbf{x}, t) = \mathscr{L}(u_t, \nabla u, u)$, зависящую от x и t. Дальше мы будем использовать общепринятые, хотя и не совсем корректные обозначения. Во-первых, мы не будем обозначать переменные a, $\mathfrak{b}$, c, а будем писать u_t, ∇u, u, так что $\partial\mathscr{L}/\partial u_t$ будет обозначать производную $\mathscr{L}$ на $\mathbb{R}^{n+2}$ по первой переменной. Во-вторых, при неявно заданной u мы будем писать $\mathscr{L}(\mathrm{x}, t)$ или $\mathscr{L}$, имея в виду введенную выше функцию $F_u(\mathrm{x}, t)$ Таким образом, символ типа $(\partial/\partial t)(\partial\mathscr{L}/\partial u_t)$ указывает, что мы вычисляем функцию $\partial\mathscr{L}/\partial a$ при $a=u_t$ и т. д., а затем вычисляем частную производную по t полученной функции от x и t. Символ $\partial\mathscr{L}/\partial(\nabla u)$ обозначает n мерный вектор $\langle\partial\mathscr{L}/\partial b_1, \ldots, \partial\mathscr{L}/\partial b_n\rangle$, вычисленный при $a=u_t$, $\mathfrak{b}=\nabla u$, $c=u$ Несмотря на то что такие обозначения несколько двусмысленны, они вполне стандартны и весьма удобны, если к ним привыкнуть.

Мы хотим выбрать $\mathscr{L}$ таким, чтобы рассматриваемое уравнение имело вид **уравнения Эйлера — Лагранжа**

$$(\mathscr{D})(u)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\right)+\nabla\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla u)}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u}=0. \tag{270j}$$

Уравнение (270b) имеет как раз такой вид, если выбрать

$$\mathscr{L}(u_t, \nabla u, u)={}^1/_2u_t^2-{}^1/_2(\nabla u)^2-{}^1/_4u^4. \tag{270k}$$

Причина, по которой уравнение (270j) столь полезно, связана с **принципом наименьшего действия** или, точнее, с **принципом стационарного действия**. Пусть заданы открытая ограниченная область Ω в $\mathbb{R}^{n+1}$ с гладкой границей и C^∞-функция u в окрестности Ω. Определим **действие** соотношением

$$A_\Omega(u)=\int\limits_\Omega\mathscr{L}(u_t, \nabla u, u)\,d^nx\,dt.$$

Если $v\in C_0^\infty(\Omega)$, т. е. v класса C^∞ и обращается в нуль около границы Ω, то

$$\frac{d}{d\lambda}A_\Omega(u+\lambda v)\big|_{\lambda=0}=-\int\limits_\Omega v\,(\mathscr{D})(u)\,d^3x\,dt, \tag{270l}$$

т. е. u есть решение (270j) тогда и только тогда, когда для любой Ω действие A_Ω стационарно при малых изменениях u *строго внутри* Ω. Это позволяет связать инвариантность уравнения (270j) относительно каких-то преобразований с инвариантностью $\mathscr{L}$. Рассмотрим гладкие преобразования координат

$$s=s(\mathrm{x}, t), \qquad \mathrm{y}=\mathrm{y}(\mathrm{x}, t)$$

и гладкую функцию V из $\mathbb{R}^{n+2}$ в $\mathbb{R}$. Пусть

$$\bar{u}(\mathrm{x}, t)=V(u(\mathrm{y}(\mathrm{x}, t), s(\mathrm{x}, t)), \mathrm{y}(\mathrm{x}, t), s(\mathrm{x}, t)).$$

Когда $\tilde{u}$ есть решение (270j), если u — решение этого уравнения? *Достаточное* условие таково: $\delta\mathscr{L} \doteq 0$, где

$$\delta\mathscr{L} \equiv [\mathscr{L}(\tilde{u})](x, t) - J[\mathscr{L}(u)](y(x, t), s(x, t)), \qquad (270m)$$

а J — якобиан преобразования T: $\langle x, t\rangle \mapsto \langle y, s\rangle$. Первый член в правой части (270m) означает, что $\mathscr{L}$ вычисляется на функции $\tilde{u}$ вместо u. Второй член показывает, что сначала вычисляется $\mathscr{L}(u)$, а затем делается замена переменных. Если $\delta\mathscr{L} = 0$, то $A_\Omega(\tilde{u}) = A_{T[\Omega]}(u)$, и действие стационарно на u тогда и только тогда, когда оно стационарно на $\tilde{u}$. Таким образом, если $\delta\mathscr{L} = 0$, то $\tilde{u}$ есть решение (270j), когда таково u. Как мы увидим, условие $\delta\mathscr{L} = 0$ *не* необходимо для инвариантности (270j) относительно замены $u \mapsto \tilde{u}$ (см. примеры 3 и 4 ниже).

Теорема Нётер выражает тот факт, что по заданному однопараметрическому семейству преобразований, оставляющих инвариантным A, всегда можно найти сохраняющуюся величину для соответствующего уравнения Эйлера — Лагранжа. Суть приведенных выше выкладок в том, что условие $\delta\mathscr{L} = 0$ достаточно для инвариантности A. Ниже мы будем предполагать, что $\langle x, t\rangle$ пробегает все пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, а все преобразования гладкие. На самом деле в приложениях очень часто возникает желание использовать сингулярные преобразования, которые не определены на всем $\mathbb{R}^{n+1}$; множество областей Ω тогда ограничивается требованием отсутствия в них особых точек преобразований. Хотя такие тонкости вызывают некоторые теоретические трудности, на практике они не важны. Дело в том, что «теорема Нётер» дает способ последовательных действий, в результате которых мы получаем выражение, претендующее на роль сохраняющейся величины для данного дифференциального уравнения. Сохранение этой величины всегда можно проверить прямым вычислением; важность теоремы Нётер в том, что она дает последовательный метод нахождения кандидатов на эту роль.

Итак, пусть

$$s_\varepsilon = s(x, t, \varepsilon), \qquad y_\varepsilon = y(x, t, \varepsilon)$$

— гладкое семейство гладких преобразований координат, и пусть V_ε — гладкое семейство гладких отображений $\mathbb{R}^{n+2}$ в $\mathbb{R}$. Введем

$$\tilde{u}_\varepsilon(x, t) = V_\varepsilon(u(y_\varepsilon, s_\varepsilon), y_\varepsilon, s_\varepsilon).$$

Предположим далее, что при $\varepsilon = 0$, $s_0 = t$, $y_0 = x$ и $V_0(u(y_0, s_0), y_0, s_0) = u$, так что наша замена как зависимых, так и независимых переменных при $\varepsilon = 0$ обращается в тождественную операцию.

Теперь введем

$$X_j(\mathrm{x},\ t)=\left.\frac{\partial(\mathrm{y}_\varepsilon)_j}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\qquad X_0(\mathrm{x},\ t)=\left.\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$

$$\Psi(u,\ \mathrm{x},\ t)=\left.\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\qquad S(u)=\left.\frac{\partial(\delta_\varepsilon\mathscr{L})}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$

$$j_0=(u_tX_0+\nabla u\cdot\mathbf{X}+\Psi)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}-\mathscr{L}X_0, \tag{270n}$$

$$\mathrm{j}=(u_tX_0+\nabla u\cdot\mathbf{X}+\Psi)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla u)}-\mathscr{L}\mathbf{X}. \tag{270o}$$

Полагая $\partial_0\equiv\partial/\partial t$, получаем

$$\partial_0 j_0+\nabla\cdot\mathrm{j}=S(u). \tag{270p}$$

Таким образом, в частности, если $\delta_\varepsilon\mathscr{L}\equiv 0$ для всех ε и $\langle j_0,\ \mathrm{j}\rangle$ убывают достаточно быстро на ∞, то $\int\limits_{\mathbb{R}^n} j_0(\mathrm{x},\ t)\,d^nx$ — постоянная во времени величина. Для доказательства (270p) сначала заметим, что

$$F\equiv\left.\frac{\partial\tilde{u}_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=u_tX_0+\nabla u\cdot\mathbf{X}+\Psi,$$

так что при $\varepsilon=0$ можно написать

$$\partial_0 j_0+\nabla\cdot\mathrm{j}=\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla u)}\cdot\nabla F+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\right)+\nabla\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla u)}\right)\right]F\right\}-$$
$$-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}X_0-(\nabla\mathscr{L})\cdot\mathbf{X}-\mathscr{L}\left(\frac{\partial X_0}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{X}\right). \tag{270q}$$

С помощью уравнения Эйлера — Лагранжа (270j) легко отождествить величину в фигурных скобках с $\partial\mathscr{L}(\tilde{u}_\varepsilon)/\partial\varepsilon\,|_{\varepsilon=0}$. Более того,

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}X_0+\nabla\mathscr{L}\cdot\mathbf{X}=\left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[\mathscr{L}(\mathrm{y},\ s)]\right|_{\varepsilon=0}$$

и

$$\left.\frac{\partial J}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\frac{\partial X_0}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{X},$$

так что правую часть (270q) можно отождествить с $S(u)$. Это и доказывает (270p).

Пара $j=\langle j_0,\ \mathrm{j}\rangle$ называется **током**, отвечающим однопараметрическому семейству; если $\partial_0 j_0+\nabla\cdot\mathrm{j}=0$, то говорят, что **ток сохраняется**. Величина $S(u)$ называется **источником тока**.

Пример 1 (сохранение энергии и тензор энергии-импульса). Рассмотрим уравнение $u_{tt}=\Delta u-F(u)$. Тогда лагранжиан имеет вид $^1/_2u_t^2-{}^1/_2(\nabla u)^2-G(u)$, где $G(y)=\int\limits_0^y F(x)\,dx$. Ясно, что семейство сдвигов по времени $\langle x, t\rangle \mapsto \langle x, t+\varepsilon\rangle$, $V_\varepsilon(u)=u$, оставляет уравнение движения инвариантным, и легко понять, что $\delta\mathcal{L}=0$ для всех ε. Более того, $\mathrm{X}=0$, $\Psi=0$, $X_0=1$. Результирующий ток j_0, j_i, обычно обозначаемый через t_{00}, t_{0i}, имеет вид

$$t_{00}={}^1/_2u_t^2+{}^1/_2(\nabla u)^2+G(u), \qquad t_{0i}=-u_t(\nabla_i u).$$

Из (270j) вытекает, что $\partial_0 t_{00}+\sum_{i=1}^{n}\partial_i t_{0i}=0$, и мы узнаем в равенстве $(d/dt)\int t_{00}\,d^nx=0$ закон сохранения энергии (конечно, его можно получить из дифференциального уравнения интегрированием по частям). Причина, по которой в обозначение тока входят два индекса, в том, что можно еще учесть инвариантность относительно сдвигов в пространстве $\langle x, t\rangle \mapsto \langle x+\varepsilon\delta_i, t\rangle$, где $\delta_i=\langle 0, \ldots, 1, \ldots, 0\rangle$ с 1 на i-м месте. Результирующий ток j_0, j_k обычно обозначают через t_{i0}, t_{ik}. Легко обнаружить, что

$$t_{0i}=-t_{i0} \quad \text{и} \quad t_{ij}=t_{ji}, \qquad 1\leqslant i,\ j\leqslant n. \tag{270r}$$

В частности, сохраняется импульс $\int u_t(\nabla_i u)\,d^nx$. Величину $t_{\mu\nu}$ часто называют **тензором энергии-импульса**, хотя в последовательных релятивистских обозначениях то, что мы обозначали $t_{\mu\nu}$, обычно обозначают через $T^\mu{}_\nu$.

Пример 2 (ток для масштабных преобразований (270b)). Благодаря специальному выбору степени нелинейного члена в (270b) легко убедиться, что множество решений (270b) переходит в себя под действием преобразования $\langle x, t\rangle \mapsto \langle\lambda x, \lambda t\rangle$; $u\mapsto\lambda u$. Для таких масштабных преобразований $\delta\mathcal{L}=0$. Если взять $\lambda=e^\varepsilon$, то $X_0=t$, $X_i=x_i$, $\Psi=u$ В результате сохраняющейся величиной будет

$$\int\left[t\left({}^1/_2u_t^2+{}^1/_2(\nabla u)^2+{}^1/_4u^4\right)+u_t x\cdot\nabla u+u_t u\right]d^3x. \tag{270s}$$

Мы выписали общее соотношение (270p), включающее источник $S(u)$, по двум причинам. Во-первых, может оказаться полезной **нарушенная симметрия**, когда $S(u)\neq 0$; например, если $S(u)\leqslant 0$ при $t\geqslant 0$, то из (270p) следует, что $\int j_0(x, t)\,d^3x\leqslant \leqslant\int j_0(x, 0)\,d^3x$ для всех $t\geqslant 0$, а это может быть полезным (см задачу 153). Во-вторых, если $S(u)$ имеет вид $\partial_0 b_0+\nabla\cdot\mathbf{b}$, то $\partial_0 k_0+\nabla\cdot\mathbf{k}=0$ для $\mathbf{k}=\mathbf{j}-\mathbf{b}$, так что сохраняется k_0. Сначала мы рассмотрим случай нарушенной симметрии, а затем вернемся к классу случаев, когда $S(u)$ автоматически имеет вид $\partial_0 b_0+\nabla\cdot\mathbf{b}$.

Пример 3 (нарушенная масштабная инвариантность для уравнения $u_{tt}=\Delta u-u|u|^{p-1}$). Если $\mathcal{L}={}^1/_2u_t^2-{}^1/_2(\nabla u)^2-(p+1)^{-1}|u|^{p+1}$

в трехмерном пространстве, то при масштабных преобразованиях $\langle \mathbf{x}, t\rangle \mapsto \langle \lambda\mathbf{x}, \lambda t\rangle$, $u \mapsto \lambda u$ величина $\delta\mathcal{L}$ не равна нулю, когда $p \neq 3$. Часть $u_{tt} - \Delta u$ лагранжиана $\mathcal{L}$ инвариантна, но

$$\delta\mathcal{L} = -(p+1)^{-1}(\lambda^{p+1} - \lambda^4)\,|u(\lambda\mathbf{x}, \lambda t)|^{p+1}.$$

Взяв $\lambda = e^{\varepsilon}$ и вычислив $\partial(\delta_{\varepsilon}\mathcal{L})/\partial\varepsilon$, находим, что

$$S(u) = (p+1)^{-1}(3-p)\,|u|^{p+1},$$

поэтому $S(u) \leqslant 0$ при $p \geqslant 3$. Поскольку заряд (270s), отвечающий масштабным преобразованиям, не обладает очевидными свойствами положительности, это соотношение имеет ограниченную ценность; однако конформную инвариантность, которую мы применяли при доказательстве теоремы XI.101, можно заменить нарушенной конформной инвариантностью и получить аналогичный результат для

$$u_{tt} = \Delta u - u\,|u|^{p-1} \tag{270t}$$

при $3 < p < 5$ (задача 153). Действительно, это уравнение обладает определенной масштабной инвариантностью; ясно, что при $\langle \mathbf{x}, t\rangle \mapsto \langle \lambda\mathbf{x}, \lambda t\rangle$, $u \mapsto \lambda^{\alpha} u$ с $\alpha = 2(p-1)^{-1}$ решения (270r) переходят в другие решения. В этом случае неверно, что $\delta\mathcal{L} = 0$; на самом деле $\mathcal{L}(\tilde{u}) = \lambda^{2+2\alpha}\mathcal{L}(u)(y, s)$, тогда как $J\mathcal{L}(u)(y, s) = \lambda^{4\alpha}\mathcal{L}(u)$. Это означает, что $A_{\Omega}(\tilde{u}) = \lambda^{2-2\alpha}A_{T[\Omega]}(u)$; таким образом, инвариантность дифференциального уравнения можно понять, руководствуясь принципом стационарности действия. Однако $S(u) = (2-2\alpha)\mathcal{L}(u)$, так что ток, отвечающий такому масштабному преобразованию, не сохраняется. Более того, S не является дивергенцией (задача 154); поэтому нельзя получить сохраняющийся ток заменой j на k. Это показывает, что инвариантность дифференциального уравнения, которая не означает инвариантности действия, может не давать новой сохраняющейся величины.

Существует один общий случай, когда $S(u)$ автоматически имеет вид $\partial_0 b_0 + \nabla\cdot\mathbf{b}$, а именно когда $\delta_{\varepsilon}\mathcal{L} = \partial_0 B_0^{(\varepsilon)} + \nabla\cdot\mathbf{B}^{(\varepsilon)}$; действительно, достаточно взять $b_0 = \partial B_0^{(\varepsilon)}/\partial\varepsilon$, $\mathbf{b} = \partial\mathbf{B}^{\varepsilon}/\partial\varepsilon$. Заметим, что если

$$\delta\mathcal{L} = \partial_0 B_0 + \nabla\cdot\mathbf{B}, \tag{270u}$$

где $B(\mathbf{x})$ — функция только $\tilde{u}$ и ее производных в точке $\mathbf{x}$, то $A_{\Omega}(\tilde{u}) = A_{T[\Omega]}(u) + \int_{\partial\Omega}[B_0\,d\sigma_0 + \mathbf{B}\cdot d\sigma]$, так что для $\tilde{v}$, обращающихся в нуль около $\partial\Omega$,

$$A_{\Omega}(\tilde{u} + \lambda\tilde{v}) - A_{\Omega}(\tilde{u}) = A_{T[\Omega]}(u + \lambda v) - A_{T[\Omega]}(u).$$

Итак, из (270р) следует, что рассматриваемое преобразование переводит одни решения уравнения Эйлера—Лагранжа в другие. Когда $S(u)=\partial_0 b_0+\nabla\cdot\mathbf{b}$, сохраняется $\int (j_0-b_0)\,d^n x$ и инвариантность основного дифференциального уравнения можно связать с сохраняющейся величиной, отличной от $\int j_0\, d^n x$

Пример 4 (конформная инвариантность уравнения (270b)). Инверсия $z\mapsto z^{-1}$ аналитична в комплексной плоскости вне начала координат; таким образом, $u(x(x^2+y^2)^{-1},\ -y(x^2+y^2)^{-1})$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, если такова u. Возможность формального продолжения из x в ix наводит на мысль, что если $u_{tt}-u_{xx}=0$, то $u(x(t^2-x^2)^{-1},\ t(t^2-x^2)^{-1})$ также есть решение волнового уравнения вне точек $t^2-x^2=0$, и в этом можно убедиться прямым вычислением. В четырехмерном пространстве это уже не так; чтобы убедиться в этом, рассмотрим сначала гармонический случай Функция $u(\mathbf{x})=|\mathbf{x}|^{-2}$ гармоническая вне точки $\mathbf{x}=0$, но функция $\tilde{u}(\mathbf{x})\equiv u(\mathbf{x}|\mathbf{x}|^{-2})=|\mathbf{x}|^2$ таким свойством не обладает. Поскольку единственной другой сферически симметричной гармонической функцией является 1, можно испытать функцию $\tilde{u}(\mathbf{x})\equiv|\mathbf{x}|^{-2}u(\mathbf{x}|\mathbf{x}|^{-2})$; и в самом деле, путем долгих вычислений можно показать, что $\Delta\tilde{u}=|\mathbf{x}|^{-4}(\Delta u)^{\sim}$. Аналогично, для $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, $t\in\mathbb{R}$ определим **лоренцеву инверсию** соотношениями

$$\mathbf{y}(\mathbf{x},t)=\mathbf{x}(t^2-|\mathbf{x}|^2)^{-1},\qquad s(\mathbf{x},t)=t(t^2-|\mathbf{x}|^2)^{-1},$$
$$V(u,\mathbf{x},t)=(t^2-|\mathbf{x}|^2)^{-1}u.$$

Если $\tilde{u}(\mathbf{x},t)=V(u(\mathbf{y},s),\mathbf{y},s)$, то $\tilde{u}$ есть решение уравнения $\tilde{u}_{tt}=\Delta\tilde{u}$ тогда и только тогда, когда таковым является u. В самом деле,

$$\tilde{u}_{tt}-\Delta\tilde{u}=(t^2-|x|^2)^{-2}(u_{tt}-\Delta u)^{\sim}. \tag{270v}$$

Поскольку рассматриваемые преобразования сингулярны при $|\mathbf{x}|=t$, это утверждение справедливо только вне плоскости $|\mathbf{x}|=t$. Дальше мы не будем думать об этой трудности, а просто покажем, что $\partial_0 k_0+\nabla\cdot\mathbf{k}=0$ для всех точек $\langle\mathbf{x},t\rangle$ с $|\mathbf{x}|\neq t$, когда k_0 и $\mathbf{k}$ заданы формулами (270d) и (270i). При этом легко понять, что k_0 и $\mathbf{k}$ класса C^∞, и потому результат будет выполняться для всех $\langle\mathbf{x},t\rangle$, откуда и будет вытекать сохранение конформного заряда $\int k_0\, d^3x$

Уравнение (270v) показывает, что преобразование $u\mapsto\tilde{u}$ сохраняет решения и уравнения (270b) Это наводит на мысль вычислить изменение $\delta\mathcal{L}$ при лоренцевой инверсии для лагранжиана $\mathcal{L}={}^1/_2u_t^2-{}^1/_2(\nabla u)^2-{}^1/_4u^4$. Для таких вычислений удобно перейти к релятивистским обозначениям. Пусть x_μ ($\mu=0,1,2,3$)

обозначают t, x_1, x_2, x_3, а x^μ обозначают t, $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$. Введем матрицу из элементов $g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}$, равных нулю при $\mu\neq\nu$ и 1 (соответственно -1), если μ и ν одновременно принимают значение 0 (соответственно 1, 2, 3). Наконец, положим $\partial^\mu=\partial/\partial x_\mu$. Кроме того, мы будем пользоваться соглашением о суммировании по повторяющимся индексам, так что $x^\lambda x_\lambda=t^2-|\mathbf{x}|^2$, $\partial^\lambda\partial_\lambda=\partial_0^2-\Delta$ и т. д. Начнем с изучения якобиевой матрицы $T^\mu{}_\nu=\partial^\mu y_\nu$, где $y_\nu=(x^\lambda x_\lambda)^{-1}x_\nu$ — лоренцева инверсия. Прямым вычислением получаем, что $T^\mu{}_\nu=(x^\lambda x_\lambda)^{-1}S^\mu{}_\nu$, где

$$S^\mu{}_\nu=\delta^\mu{}_\nu-2(x^\lambda x_\lambda)^{-1}x^\mu x_\nu, \tag{270w}$$

а $\delta^\mu{}_\nu$ — единичная матрица. Существенно то, что $S^\mu{}_\nu$ есть лоренцево преобразование, т. е.

$$S^\lambda{}_\varkappa g_{\lambda\mu}S^\mu{}_\nu=g_{\varkappa\nu}.$$

Перейдя к определителям, мы увидим, что $|\det(S)|=1$, так что якобиан $J\,|\det T|=(x^\lambda x_\lambda)^{-4}$. Используя отмеченную выше инвариантность, получим

$$g_{\mu\nu}T^\mu{}_\varkappa T^\nu{}_\lambda\,\partial^\varkappa v\,\partial^\lambda v=(x^\lambda x_\lambda)^{-2}g_{\mu\nu}\partial^\mu v\,\partial^\nu v. \tag{270x}$$

Пусть теперь $\tilde u(x)\equiv(x^\lambda x_\lambda)^{-1}u(y(x))$. Тогда

$$\partial^\mu\tilde u=(x^\lambda x_\lambda)^{-1}T^\mu{}_\nu(\partial^\nu u)(y)-2(x^\lambda x_\lambda)^{-2}x^\mu u(y). \tag{270y}$$

Если воспользоваться далее (270x) и взять $\mathscr{L}(u)=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\mu u\,\partial^\nu u-\frac{1}{4}u^4$, то

$$(\delta\mathscr{L})(u)=2(x^\lambda x_\lambda)^{-3}u(y)^2-2(x^\lambda x_\lambda)^{-3}x_\mu u\,\partial^\mu(u(y))=\partial_\mu B^\mu, \tag{270z}$$

где $B^\mu=-x^\mu(x^\lambda x_\lambda)^{-3}u(y)^2$. Средняя часть (270z) получается после возведения в квадрат (270y) и учета того факта, что единственный квадратичный по $\partial^\mu u$ член в $\mathscr{L}(\tilde u)$ сокращается с соответствующим членом в $J\mathscr{L}(u)(y)$.

Лоренцева инверсия не определяет непрерывную группу симметрий, а представляет собой отдельное преобразование. Однако, если сделать инверсию, затем сдвиг $-\varepsilon$ по времени, а затем снова инверсию, мы получим непрерывную группу симметрий. Таким образом, определим

$$\mathbf{y}(\mathbf{x},t,\varepsilon)=\mathbf{x}F,\quad s(\mathbf{x},t,\varepsilon)=(t-\varepsilon(t^2-|\mathbf{x}|^2))F,\quad V(\mathbf{x},t,u,\varepsilon)=uF,$$
$$F(\mathbf{x},t,\varepsilon)=(t^2-|\mathbf{x}|^2)\left[\{t-\varepsilon(t^2-|\mathbf{x}|^2)\}^2-|\mathbf{x}|^2\right]^{-1}.$$

Это довольно сложное выражение называется конформным преобразованием. Точнее, конформная группа есть 15-параметрическая группа, состоящая из преобразований Пуанкаре, масштабных преобразований и лоренцевой инверсии. Соответственно для уравнения (270b) существуют 15 сохраняющихся величин, из которых при доказательстве теоремы XI.101 мы использовали всего две (энергию и временну́ю компоненту конформного тока), хотя в этом дополнении мы рассмотрели также три компоненты импульса и масштабные преобразования.

Для приведенного выше конформного преобразования путем прямого дифференцирования получаем $\Psi = 2tu$, $X_j = 2x_j t$, $X_0 = t^2 + |\mathbf{x}|^2$, и потому

$$j_0 = (|\mathbf{x}|^2 + t^2)\left(\tfrac{1}{2}u_t^2 + \tfrac{1}{2}(\nabla u)^2 + \tfrac{1}{4}u^4\right) + 2tu_t\mathbf{x}\cdot\nabla u + 2tu_t u,$$
$$\mathbf{j} = (-\nabla u)\left\{(|\mathbf{x}|^2 + t^2)u_t + 2t\mathbf{x}\cdot\nabla x + 2tu\right\} - 2t\mathbf{x}\left(\tfrac{1}{2}u_t^2 - \tfrac{1}{2}(\nabla u)^2 - \tfrac{1}{4}u^4\right).$$

Зная, что $\delta\mathscr{L}$ не обращается в нуль при инверсии, мы не ожидаем этого и для конформного преобразования, но мы надеемся, что $S(u) = \partial^\mu b_\mu$, поскольку $\delta\mathscr{L} = \partial^\mu B_\mu$ для инверсии. Как и при вычислениях с инверсией, величина $S(u)$ получается в виде разности между $\frac{1}{2}(\partial^\mu \tilde{u})(\partial_\mu \tilde{u})$ и $\frac{1}{2}J(\partial^\mu u)(\partial_\mu u)$. Поскольку

$$\tilde{u} = (1 + 2\varepsilon t)\,u(y) + O(\varepsilon^2),$$

получаем

$$\partial^\mu \tilde{u} = (1 + 2\varepsilon t)\,\partial^\mu(u(y)) + 2\varepsilon\delta^\mu{}_0 u + O(\varepsilon^2),$$

так что дополнительный член (с точностью до порядка $O(\varepsilon^2)$) как раз и имеет вид $\frac{1}{2}[4\varepsilon\delta^\mu{}_0 u(\partial^\mu u)] = \varepsilon\partial_0(u^2)$ В итоге $S(u) = \partial_0(u^2)$, и потому если положить $\mathbf{k} = \mathbf{j}$, $k_0 = j_0 - u^2$, то $\partial_0 k_0 + \nabla\cdot\mathbf{k} = 0$. Таким образом, проверено, что для (270b) сохраняется заряд, даваемый выражением (270c), и, более того, мы описали, как отыскивать такие сохраняющиеся величины.

XI.14. Рассеяние спиновых волн

Обсудим теперь физические системы, совсем непохожие на те, которые мы анализировали до сих пор, но рассеяние в которых хорошо описывается формализмом двух гильбертовых пространств, введенным в § 3. Мы рассмотрим систему квантовомеханических спинов, находящихся по одному в узлах решетки $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ и взаимодействующих с ближайшими соседями. Основные состояния для каждого спина — это либо «спин-вверх», либо «спин-вниз», но, поскольку система подчиняется квантовомеханическим законам, возможны и суперпозиции этих состояний. В итоге множество состояний для одного спина в фиксированном узле $\alpha \in \mathbb{Z}^3$ есть единичная сфера в двумерном комплексном гильбертовом пространстве. Если в момент времени $t = 0$ задано состояние, где один выделенный спин направлен вверх, а все остальные вниз, то взаимодействия, точно описанные ниже, носят такой характер, что по мере развития системы во времени в ней бежит элементарная «волна», отвечающая перемещению направленного вверх спина по решетке, т. е. при $t \to \infty$ возникает нестационарная