всего две (энергию и временну́ю компоненту конформного тока), хотя в этом дополнении мы рассмотрели также три компоненты импульса и масштабные преобразования.

Для приведенного выше конформного преобразования путем прямого дифференцирования получаем $\Psi=2tu$, $X_j=2x_jt$, $X_0=t^2+|\mathbf{x}|^2$, и потому

$$j_0=(|\mathbf{x}|^2+t^2)\left(\tfrac{1}{2}u_t^2+\tfrac{1}{2}(\nabla u)^2+\tfrac{1}{4}u^4\right)+2tu_t\mathbf{x}\cdot\nabla u+2tu_tu,$$
$$\mathbf{j}=(-\nabla u)\left\{(|\mathbf{x}|^2+t^2)u_t+2t\mathbf{x}\cdot\nabla x+2tu\right\}-2t\mathbf{x}\left(\tfrac{1}{2}u_t^2-\tfrac{1}{2}(\nabla u)^2-\tfrac{1}{4}u^4\right).$$

Зная, что $\delta\mathscr{L}$ не обращается в нуль при инверсии, мы не ожидаем этого и для конформного преобразования, но мы надеемся, что $S(u)=\partial^\mu b_\mu$, поскольку $\delta\mathscr{L}=\partial^\mu B_\mu$ для инверсии. Как и при вычислениях с инверсией, величина $S(u)$ получается в виде разности между $\frac{1}{2}(\partial^\mu\tilde{u})(\partial_\mu\tilde{u})$ и $\frac{1}{2}J(\partial^\mu u)(\partial_\mu u)$. Поскольку

$$\tilde{u}=(1+2\varepsilon t)\,u(y)+O(\varepsilon^2),$$

получаем

$$\partial^\mu\tilde{u}=(1+2\varepsilon t)\,\partial^\mu(u(y))+2\varepsilon\delta^\mu{}_0u+O(\varepsilon^2),$$

так что дополнительный член (с точностью до порядка $O(\varepsilon^2)$) как раз и имеет вид $\frac{1}{2}[4\varepsilon\delta^\mu{}_0u(\partial^\mu u)]=\varepsilon\partial_0(u^2)$ В итоге $S(u)=\partial_0(u^2)$, и потому если положить $\mathbf{k}=\mathbf{j}$, $k_0=j_0-u^2$, то $\partial_0k_0+\nabla\cdot\mathbf{k}=0$. Таким образом, проверено, что для (270b) сохраняется заряд, даваемый выражением (270c), и, более того, мы описали, как отыскивать такие сохраняющиеся величины.

XI.14. Рассеяние спиновых волн

Обсудим теперь физические системы, совсем непохожие на те, которые мы анализировали до сих пор, но рассеяние в которых хорошо описывается формализмом двух гильбертовых пространств, введенным в § 3. Мы рассмотрим систему квантовомеханических спинов, находящихся по одному в узлах решетки $\mathbb{Z}^3\subset\mathbb{R}^3$ и взаимодействующих с ближайшими соседями. Основные состояния для каждого спина — это либо «спин-вверх», либо «спин-вниз», но, поскольку система подчиняется квантовомеханическим законам, возможны и суперпозиции этих состояний. В итоге множество состояний для одного спина в фиксированном узле $\alpha\in\mathbb{Z}^3$ есть единичная сфера в двумерном комплексном гильбертовом пространстве. Если в момент времени $t=0$ задано состояние, где один выделенный спин направлен вверх, а все остальные вниз, то взаимодействия, точно описанные ниже, носят такой характер, что по мере развития системы во времени в ней бежит элементарная «волна», отвечающая перемещению направленного вверх спина по решетке, т. е. при $t\to\infty$ возникает нестационарная суперпозиция состояний с одним спином вверх, охватывающая все больше и больше узлов, все дальше отстоящих от начального узла. Если начать с двух спинов, направленных вверх, то возникает суперпозиция состояний с двумя спинами вверх. Если сначала эти узлы далеки друг от друга, то в течение очень малого времени оба спина эволюционируют более или менее как две независимые элементарные спиновые волны, ибо взаимодействие затрагивает только ближайших соседей. По мере эволюции этих состояний во времени появляется ненулевая вероятность возникновения состояния с двумя соседними спинами, направленными вверх. Такие спины взаимодействуют, что приводит к рассеянию. Именно этот процесс мы и хотим изучить.

Описанная система спинов является моделью (называемой **гейзенберговой моделью**) ферромагнетика. Со спинами связаны магнитные моменты, и основное взаимодействие носит магнитный характер. Описанные выше волны возбуждения обычно называют **магнитными спиновыми волнами**, или **магнонами**. Следует отметить одну особенность нашей системы: мы рассмотрели спиновые волны на фоне всех спинов, опущенных вниз, что, как мы увидим, отвечает основному состоянию системы. Можно с таким же успехом рассматривать систему со всеми спинами вверх или в любом другом фиксированном направлении, что даст другие возможные основные состояния. На самом деле, в силу общей инвариантности относительно вращений, такие теории эквивалентны той, которую мы развиваем. В основном состоянии система пребывает только при нулевой абсолютной температуре; при ненулевой температуре мы имеем «суперпозицию возбужденных состояний». Существует некоторое количество глубоких, хотя и не строгих работ о магнонах при ненулевых температурах (см. Замечания).

Обсуждение, проводимое в этом разделе, связано с различными вопросами, которых мы еще не касались. Во-первых, мы имеем дело с бесконечной системой, а в общем случае бесконечные системы наиболее естественно описываются на языке C^*-алгебр. Это так и для модели Гейзенберга при ненулевых температурах; но благодаря тому что основное состояние гейзенбергова магнетика можно явно описать, в этом случае удается избежать использования техники C^*-алгебр. Однако даже здесь существует ряд других идей, интересных с физической и математической точек зрения, например явление спонтанного нарушения симметрии, которые требуют применения C^*-алгебр. Мы вернемся к этому кругу вопросов в последующих томах. Во-вторых, в описании всех процессов рассеяния, которые мы изучали до сих пор, использовалось сравнение некоей априорной «свободной динамики» с динамикой системы со взаимодействием. В интересующей нас сейчас ситуации «свободная динамика» не определяется какой-то заранее заданной системой, а скорее задается частью системы со взаимодействием, а именно динамикой одномагнонных состояний. Эта идея появится вновь в § 16 при изучении рассеяния в квантовополевых системах со взаимодействием.

Опишем сначала модель с конечным числом спинов. Пусть Λ — конечное подмножество в $\mathbb{Z}^3$. Каждой точке $\alpha \in \Lambda$ сопоставим экземпляр пространства $\mathbb{C}^2$ и обозначим его $\mathbb{C}^2_\alpha$. Будем называть векторы

$$e_1^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_0^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

состояниями со спином вверх и спином вниз в точке α соответственно. Гильбертовым пространством состояний конечного числа спинов, по одному в каждой точке $\alpha \in \Lambda$, будет

$$\mathcal{H}_\Lambda = \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{C}^2_\alpha. \tag{271}$$

Множество векторов вида $\bigotimes_{\alpha \in \Lambda} e^{(\alpha)}_{a_\alpha}$, где $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ — последовательность нулей и единиц, есть базис в $\mathcal{H}_\Lambda$; для удобства мы далее будем писать $\psi(\{a_\alpha\}) = \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} e^{(\alpha)}_{a_\alpha}$.

Для того чтобы определить гамильтониан H_Λ этой конечной системы, введем некоторые термины и обозначения. Пусть σ_x, σ_y, σ_z — матрицы Паули, т. е.

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$

положим $\sigma_\pm \equiv {}^1/_2 (\sigma_x \pm i\sigma_y)$, так что

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица σ_+ переворачивает вверх спин, направленный вниз, а σ_- — наоборот. Интерпретация ${}^1/_2\sigma$ как вектора квантовомеханического момента количества движения следует из того, что этот вектор удовлетворяет коммутационным соотношениям алгебры Ли группы трехмерных вращений. Для каждого $\alpha \in \Lambda$ обозначим через $\sigma_x^{(\alpha)}$, $\sigma_y^{(\alpha)}$, $\sigma_z^{(\alpha)}$, $\sigma_\pm^{(\alpha)}$ операторы в $\mathcal{H}_\Lambda$, действующие соответственно как σ_x, σ_y, σ_z, $\sigma_\pm$ на α-ю компоненту тензорного произведения и как единичная матрица на остальные компоненты. Таким образом, на базисных векторах $\psi(\{a_\beta\})$ имеем

$$\sigma_z^{(\alpha)}\psi(\{a_\beta\}) = (2a_\alpha - 1)\,\psi(\{a_\beta\}),$$

$$\sigma_+^{(\alpha)}\psi(\{a_\beta\}) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_\alpha = 1, \\ \psi(\{a_\beta + \delta_{\beta\alpha}\}), & \text{если } a_\alpha = 0. \end{cases}$$

Тогда гамильтониан определяется следующим образом:

$$H_\Lambda = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{|\alpha-\beta|=1, \\ \alpha,\, \beta \in \Lambda}} \left(\sigma_z^{(\alpha)}\sigma_z^{(\beta)} + 4\sigma_+^{(\alpha)}\sigma_-^{(\beta)}\right). \tag{272}$$

Сумма берется по всем *упорядоченным* парам $\langle\alpha, \beta\rangle$ ближайших узлов. Из-за множителя 1/2 каждая неупорядоченная пара вносит в энергию вклад $\sigma_z^{(\alpha)}\sigma_z^{(\beta)} + 2\sigma_+^{(\alpha)}\sigma_-^{(\beta)} + 2\sigma_-^{(\alpha)}\sigma_+^{(\beta)} = \sigma^{(\alpha)} \cdot \sigma^{(\beta)}$, где мы положили $\sigma^{(\alpha)} = \langle\sigma_x^{(\alpha)}, \sigma_y^{(\alpha)}, \sigma_z^{(\alpha)}\rangle$. Помня об упомянутой выше связи с вращениями, легко понять, что гамильтониан инвариантен относительно одновременного вращения всех спинов. Знак минус в (272) показывает, что состояния с параллельными спинами имеют более низкую энергию, чем состояния с антипараллельными.

Можно показать (задача 132), что если сделать множество Λ связным множеством, соединив между собой всех ближайших соседей, то основное состояние H_Λ будет $(n+1)$-кратно вырожденным, где n — число точек в Λ. Энергия этого основного состояния равна $-k$, где k — число пар ближайших соседей. Одним из собственных векторов, описывающих основное состояние, является $\psi_0 \equiv \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} e_0^{(\alpha)}$. Остальные базисные собственные векторы в подпространстве основных состояний можно получить применением нужное число раз оператора $\sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_+^{(\alpha)}$.

При переходе к $\Lambda = \mathbb{Z}^3$ возникают две трудности. Во-первых, необходимо решить, что использовать в качестве гильбертова пространства состояний бесконечной системы. Во-вторых, нужно решить, какую величину использовать в качестве гамильтониана, особенно в свете того, что энергия основного состояния (т. е. низшее собственное значение) H_Λ стремится к $-\infty$, когда объем $|\Lambda|$ множества Λ стремится к бесконечности.

Один метод определения гильбертова пространства бесконечной системы связан с развитием идеи бесконечного тензорного произведения и использованием (272); но, поскольку нас в первую очередь интересует другая реализация основной структуры, мы относим обсуждение бесконечных тензорных произведений в Замечания. Здесь мы рассмотрим бесконечномерное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с базисом $\{\psi(\{a_\beta\})\}$, где $a = \{a_\beta\}$ последовательность нулей и единиц, индексированная точками $\mathbb{Z}^3$, *в которой лишь конечное число* $a_\beta \neq 0$; таким образом, $\mathcal{H}$ состоит из векторов вида

$$\sum_a{}' c(a)\, \psi(a),$$

($\sum'$ означает, что берутся лишь те a, для которых выполнено выделенное курсивом условие), где $c(a) \in \mathbb{C}$ и $\sum_a{}' |c(a)|^2 < \infty$.

Внутреннее произведение в $\mathcal{H}$ задается так:

$$\left(\sum' d(a)\psi(a),\ \sum' c(a)\psi(a)\right)=\sum' \overline{d(a)}\,c(a);$$

ψ_0 будет обозначать базисный вектор, у которого все a_β равны нулю.

Для полного обоснования сделанного выбора $\mathcal{H}$ нужна теория C^*-алгебр, но можно отметить, что без выделенного курсивом условия мы получили бы несепарабельное пространство, тогда как наше $\mathcal{H}$ сепарабельно. Более того, $\sigma_x^{(\alpha)}$, $\sigma_y^{(\alpha)}$, $\sigma_z^{(\alpha)}$, $\sigma_\pm^{(\alpha)}$ можно определить как и раньше, а гамильтониан H можно построить следующим способом.

Непосредственно использовать формулу (272) для определения $H_{\mathbb{Z}^3}$ нельзя, ибо на каждом $\psi(\{a_\beta\})$ сумма в $H_{\mathbb{Z}^3}$ будет расходиться. Однако если заменить произведение $\sigma_z^{(\alpha)}\sigma_z^{(\beta)}$ всюду, где оно встречается, на $\sigma_z^{(\alpha)}\alpha_z^{(\beta)}-1$, т. е. положить

$$H_{\mathbb{Z}^3}=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{|\alpha-\beta|=1,\\ \alpha,\,\beta\in\mathbb{Z}^3}}\left(\sigma_z^{(\alpha)}\sigma_z^{(\beta)}-1+4\sigma_+^{(\alpha)}\sigma_-^{(\beta)}\right), \tag{273}$$

то эта сумма будет сходиться на каждом $\psi(\{a_\beta\})$. Поскольку мы просто изменили энергию основного состояния на (бесконечную) постоянную, физика модели не изменится. Опустим теперь индекс Z^3 и возьмем в качестве области определения $D(H)$ гамильтониана H плотное множество конечных линейных комбинаций векторов $\psi(a)$. Поскольку на каждом векторе $v\in D(H)$ все, кроме конечного числа членов в Hv, равны нулю, H корректно определен на $D(H)$ В действительности справедливо

Предложение. Оператор H самосопряжен в существенном и неотрицателен, ψ_0 — единственный вектор, для которого $H\psi_0=0$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}_n$ — линейная оболочка тех $\psi(\{a_\beta\})$, для которых $\sum\limits_\beta a_\beta=n$. Тогда $H=\bigoplus\limits_n\mathcal{H}_n$, $\mathcal{H}_n\subset D(H)$, H оставляет $\mathcal{H}_n$ инвариантным и ограничен на каждом $\mathcal{H}_n$. Ясно, что H — прямая сумма ограниченных самосопряженных операторов, и потому, в силу элементарных рассуждений, которыми мы уже не раз пользовались (см. пример 2 в § VIII.10 или задачу 1 к гл. X), он самосопряжен в существенном. Кроме того, H положителен, поскольку

$$\sigma_z^{(\alpha)}\sigma_z^{(\beta)}+2\sigma_+^{(\alpha)}\sigma_-^{(\beta)}+2\sigma_-^{(\alpha)}\sigma_+^{(\alpha)}\leqslant 1$$

для любых α и β (задача 131). Доказательство простоты нулевого собственного значения мы оставляем читателю в качестве упражнения (задача 133). ∎

Как мы уже упомянули в последнем доказательстве, H оставляет каждое подпространство $\mathscr{H}_n$ инвариантным. Начнем с анализа $H \upharpoonright \mathscr{H}_1$. Пусть $\eta_\alpha = \psi(\{\delta_{\alpha\beta}\})$ для каждого $\alpha \in Z^3$, т. е. η_α — вектор, описывающий состояние со спином вверх в узле α и со всеми остальными спинами вниз. По определению H и в силу того что у α всего шесть ближайших соседей β_i, входящих в виде (α, β_i) и (β_i, α) в сумму (273), имеем

$$H\eta_\alpha = 12\eta_\alpha - 2 \sum_{|\beta-\alpha|=1} \eta_\beta$$

Произвольный $\varphi \in \mathscr{H}_1$ можно разложить в ряд $\varphi = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^3} \varphi(\alpha)\eta_\alpha$, так что $H\varphi = \sum (H\varphi)(\alpha)\eta_\alpha$, где

$$(H\varphi)(\alpha) = 2\left(6\varphi(\alpha) - \sum_{|\beta-\alpha|=1} \varphi(\beta)\right). \tag{274}$$

Для лучшего понимания $H \upharpoonright \mathscr{H}_1$ полезно знать, что H коммутирует с очевидным представлением Z^3 сдвигами в $\mathscr{H}$. Значит, отображение пространства $l^2(Z^3)$, заданное формулой $\{\varphi(\alpha)\} \mapsto \{(H\varphi)(\alpha)\}$, коммутирует со сдвигами, что очевидно благодаря (274). Тогда преобразование Фурье $l^2(Z^3) \xrightarrow{\wedge} L^2([-\pi, \pi]^3)$ дает спектральное представление H. В самом деле, полагая

$$\hat{\varphi}(k) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^3} \varphi(\alpha) e^{-ik\cdot\alpha},$$

мы обнаружим, что $(H\varphi)^\wedge(k) = \mu(k)\hat{\varphi}(k)$, где

$$\mu(k) = 4(3 - \cos k_1 - \cos k_2 - \cos k_3).$$

Таким образом, $H \upharpoonright \mathscr{H}_1$ выглядит как решеточный вариант свободной кинетической энергии в нерелятивистской квантовой механике, поскольку $\mu = 2|k|^2 + O(k^4)$ при малых k.

Теперь мы можем объяснить, в каком смысле $H \upharpoonright \mathscr{H}_2$ есть гамильтониан, описывающий состояния, которые асимптотически выглядят как две свободно движущиеся элементарные спиновые волны. Однако прежде подчеркнем, что естественным пространством двух спиновых волн служит не $\mathscr{H}_2$, а $\mathscr{H}_1 \otimes_s \mathscr{H}_1$. Причина симметризации тензорного произведения в том, что физически не имеет смысла указывать, какой из двух спинов «первый». Причина симметрии (а не антисимметрии) в том, что мы выбрали спиновые операторы, отнесенные к различным узлам, коммутирующими. Такой выбор основан на желании иметь спиновые операторы в качестве независимых квантовых наблюдаемых. Если бы мы взяли σ в различных узлах антикоммутирующими, мы получили бы «свободный ферми-газ» без рассеяния.

Введем отображение

$$J_2\colon (\mathscr{H}_1 \otimes_s \mathscr{H}_1) \to \mathscr{H}_2, \quad J_2(\eta_\alpha \otimes_s \eta_\gamma) = \begin{cases} \psi(\{\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\gamma\beta}\}), & \alpha \neq \gamma, \\ 0, & \alpha = \gamma, \end{cases}$$

и воспользуемся теорией рассеяния в двух гильбертовых пространствах, построенной в § 3.

Теорема XI.102. Пусть $H_2 \equiv H \restriction \mathscr{H}_2$ и $H_1^{\otimes} = H_1 \otimes I + I \otimes H_1$. Тогда

$$\Omega_2^{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{itH_2} J_2 e^{-itH_1^{\otimes}}$$

существуют и являются изометриями из $\mathscr{H}_1 \otimes_s \mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_2$.

Доказательство. Согласно методу Кука, пределы существуют, если

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} \| [H_2 J_2 - J_2 H_1^{\otimes}] e^{-itH_1^{\otimes}} \varphi \| \, dt < \infty \tag{275}$$

на тотальном множестве векторов φ. Более того, для доказательства изометричности $\Omega_2^{\pm}$ достаточно показать, что

$$\left\| (J_2^* J_2 - 1) e^{-itH_1^{\otimes}} \varphi \right\| \to 0 \tag{276}$$

при $t \to \pm\infty$. Мы докажем (275), оставив доказательство (276) читателю (задача 134).

Введем $V\colon \mathscr{H}_1 \otimes_s \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_1 \otimes_s \mathscr{H}_1$ соотношением

$$V = J_2^* H_2 J_2 - H_1^{\otimes}.$$

У V два важных свойства. Во-первых, это ограниченное отображение. Во-вторых, его носитель лежит в области $|\alpha - \beta| \leqslant 2$ в следующем смысле. Отождествим $\mathscr{H}_1 \otimes_s \mathscr{H}_1$ со множеством симметричных функций из $l^2(Z^3 \times Z^3)$, воспользовавшись отображением $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}(\cdot, \cdot)$, где $\varphi = \sum \tilde{\varphi}(\alpha, \beta)\, \eta_\alpha \otimes \eta_\beta$. Определим $\tilde{V}$ формулой $\tilde{V}\tilde{\varphi} = \widetilde{V\varphi}$. Если теперь ввести оператор χ на $l^2(Z^3 \times Z^3)$ соотношением

$$(\chi\tilde{\varphi})(\alpha, \beta) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(\alpha, \beta) & \text{при } |\alpha - \beta| \leqslant 2, \\ 0 & \text{при } |\alpha - \beta| > 2, \end{cases}$$

то $\tilde{V}\chi = \tilde{V}$. В этом можно убедиться, если учесть, что H_2 действует как $H_1^{\otimes}$, если α и β не являются ближайшими соседями и не имеют общих соседей. Далее будем опускать $\tilde{}$.

Поскольку V такое хорошее, (275) можно получить путем простого применения метода стационарной фазы. Обозначим символом $\hat{}$ преобразование Фурье из $l^2(Z^3\times Z^3)$ в $L^2([-\pi, \pi]^3\times\times[-\pi, \pi]^3)$. Пусть φ — вектор из $\mathcal{H}_1\otimes_s\mathcal{H}_1$, такой, что $\hat{\varphi}\in\in C_0^\infty([-\pi, \pi]^3\times[-\pi, \pi]^3)$ и

(i) $\operatorname{supp}\hat{\varphi}$ не содержит точек, у которых хотя бы одна координата равна $\pm\pi$;

(ii) $\operatorname{supp}\hat{\varphi}\subset\{\langle k, l\rangle \mid \partial\mu(k)/\partial k\neq\partial\mu(l)/\partial l\}$.

В таком случае мы утверждаем, что для любого $m>0$ существуют постоянные C_m и T, такие, что при $t>T$

$$\left|\left(e^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right)(\alpha, \beta)\right|\leqslant C_m(|\alpha|+|\beta|+|t|+1)^{-m} \tag{277}$$

в области $|\alpha-\beta|\leqslant 2$. Предположим пока, что (277) справедливо. Тогда для φ такого, как выше,

$$\begin{aligned}\left\|J_2Ve^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right\|^2_{\mathcal{H}_2}&\leqslant\left\|Ve^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right\|^2_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_1}=\left\|V\chi e^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right\|^2_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_1}\leqslant\\ &\leqslant\|V\|^2\left\|\chi e^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right\|^2_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_1}=\|V\|^2\sum_{|\alpha-\beta|\leqslant 2}\left|\left(e^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right)(\alpha, \beta)\right|^2\leqslant\\ &\leqslant d\|V\|^2(1+|t|)^{-4}\end{aligned}$$

в силу (277). Следовательно,

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty}\left\|J_2Ve^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right\|dt<\infty,$$

откуда, в силу $J_2J_2^*=I$, заключаем, что (275) имеет место. Поскольку множество рассматриваемых φ плотно, волновые операторы существуют.

Доказательство неравенства (277) есть простое упражнение на метод стационарной фазы из первого дополнения к § 3. Действительно, нужна только элементарная теорема XI.14. В самом деле, положим $\omega=|\alpha|+|\beta|+|t|$ и

$$f_{\alpha, \beta, t}(k, l)=(\alpha\cdot k+\beta\cdot l-t\mu(k)-t\mu(l))(|\alpha|+|\beta|+|t|)^{-1}.$$

Тогда

$$\left(e^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right)(\alpha, \beta)=\text{const}\int e^{i\omega f_{\alpha, \beta, t}(k, l)}\hat{\varphi}(k, l)\,dk\,dl$$

удовлетворяет (277) в силу теоремы XI.14 и условий (i) и (ii). ∎

Обобщение изложенного на n-спиновые волны не является сложной проблемой; мы воспользуемся обозначениями, охватывающими сразу все n. Пусть $\mathcal{F}_1$ — фоково пространство, построенное на основе $\mathscr{H}_1$. Определим

$$J:\ \mathscr{F}_1 \to \mathscr{H}$$

с помощью следующих отображений $\otimes_s^n \mathscr{H}_1$ на $\mathscr{H}_n$:

$$J(\eta_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\eta_{\alpha_n}) = \begin{cases} \psi(\{\delta_{\alpha_1\beta}+\ldots+\delta_{\alpha_n\beta}\}), & \text{если все } \alpha \text{ различны,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, повторяя проведенное выше доказательство, получаем, что справедлива

Теорема XI.103. Операторы

$$\Omega^{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{itH} J e^{-itd\Gamma(H_1)}$$

существуют и изометричны.

Если $\varphi\in\otimes_s^n\mathscr{H}_1$, то $\Omega^{\pm}\varphi$ суть состояния, которые асимптотически выглядят как n свободных спиновых волн. Мы как раз и описали состояния рассеяния, отвечающие системе с n перевернутыми спинами, распадающейся на n частей. Вспоминая N-частичное уравнение Шредингера, можно задаться вопросом, а нет ли других каналов рассеяния, отвечающих связанным группам (кластерам) нескольких перевернутых спинов. Да, они есть, но эти «связанные состояния» обладают дополнительной сложностью по сравнению с уравнением Шредингера. В последнем случае из полного гамильтониана можно выделить энергию движения центра масс, так что «связанные состояния» суть собственные векторы фиксированного оператора. Ключевой факт состоит в том, что если $\mu_S(\mathbf{k}) = k^2$ и $\sum_1^N \mathbf{k}_i = 0$, то

$$\sum_{i=1}^N \mu_S(\mathbf{a}+\mathbf{k}i) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^N \mu_S(\mathbf{k}_i),$$

так что для произвольных $\mathbf{k}_i$ энергия $\sum_{i=1}^N \mu_S(\mathbf{k}_i)$ есть сумма одной функции, зависящей только от $\mathbf{K}=\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_N$, и одной функции, зависящей только от $\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_{N-1}-\mathbf{k}_N$. Для функции $\mu(\mathbf{k}) = 3-\cos k_1-\cos k_2-\cos k_3$ это не так. «Выделение движения центра масс» в системе спиновых волн отвечает реализации $H_n \equiv H\restriction\mathscr{H}_n$ как

$$(H_n\varphi)(K, k_1, \ldots, k_{n-1}) = (H_n(K)\varphi_K)(k_1, \ldots, k_{n-1}),$$

где $K=k_1+\ldots+k_n$, а $H_n(K)$ — зависящий от K оператор. В итоге H_n реализуется как «расслоенный оператор» в смысле § XIII.16, или, по-иному, как «прямой интеграл». K есть оператор полного импульса, коммутирующий с H_n. «Связанное состояние» тогда есть собственное значение $H_n(K)$ для некоторого фиксированного K, в типичном случае непрерывно меняющееся при изменении K. Когда такие «связанные состояния» присутствуют (а в описанной выше системе они существуют; см. Замечания), можно построить дополнительные волновые операторы, ассоциированные с новыми каналами, так, как это делалось в случае уравнения Шредингера.

Для рассеяния в $\mathscr{H}_2$ можно доказать асимптотическую полноту (задача 135).

XI.15. Квантовополевое рассеяние I: внешнее поле

Вы можете полагать, что это — вопрос, который всерьез может задать лишь теоретик-полевик, который сошел с ума, проведя так много лет в столь малом числе измерений.

С. КОЛМАН

В этом и в следующем разделах мы рассматриваем рассеяние в квантовой теории поля. В § 16 показано, что в теории поля, которая удовлетворяет аксиомам Вайтмана, а также некоторым дополнительным предположениям, существует естественный способ построения оператора рассеяния. Эта общая конструкция, называемая теорией Хаага — Рюэля, и элегантна, и важна, поскольку показывает, как в принципе вайтмановы поля связаны с рассеянием отдельных частиц. К сожалению, построение динамики для нетривиальных полевых теорий и проверка аксиом Вайтмана — очень сложное дело, завершенное пока что лишь для некоторых моделей в одном и двух пространственных измерениях. В этом разделе мы рассматриваем то, что должно быть гораздо более простой задачей: рассеяние во внешнем поле. Эта задача должна быть проще, поскольку взаимодействующее поле удовлетворяет *линейному* волновому уравнению, например:

$$\varphi_{tt}(x,\ t)-\Delta\varphi(x,\ t)+m^2\varphi(x,\ t)=V(x,\ t)\,\varphi(x,\ t), \tag{278}$$

где $V(x,\ t)$ — внешний потенциал.

Одно важное явление, связанное с квантованной версией этого уравнения, — явление рождения пар. Если в исходный момент начать с состояния без частиц, то среднее значение поля будет ненулевым, и в результате благодаря линейности (278) правая часть будет действовать как источник и будет ненулевой. Другими словами, будет ненулевой вероятность рождения пар частиц.

Явление рождения пар приводит к двум поразительным следствиям в математической структуре теории. Во-первых, «свободная» динамика при $t=-\infty$ отличается от «свободной» динамики