есть собственное значение $H_n(K)$ для некоторого фиксированного K, в типичном случае непрерывно меняющееся при изменении K. Когда такие «связанные состояния» присутствуют (а в описанной выше системе они существуют; см. Замечания), можно построить дополнительные волновые операторы, ассоциированные с новыми каналами, так, как это делалось в случае уравнения Шредингера.

Для рассеяния в $\mathscr{H}_2$ можно доказать асимптотическую полноту (задача 135).

XI.15. Квантовополевое рассеяние I: внешнее поле

Вы можете полагать, что это — вопрос, который всерьез может задать лишь теоретик-полевик, который сошел с ума, проведя так много лет в столь малом числе измерений.

С. КОЛМАН

В этом и в следующем разделах мы рассматриваем рассеяние в квантовой теории поля. В § 16 показано, что в теории поля, которая удовлетворяет аксиомам Вайтмана, а также некоторым дополнительным предположениям, существует естественный способ построения оператора рассеяния. Эта общая конструкция, называемая теорией Хаага — Рюэля, и элегантна, и важна, поскольку показывает, как в принципе вайтмановы поля связаны с рассеянием отдельных частиц. К сожалению, построение динамики для нетривиальных полевых теорий и проверка аксиом Вайтмана — очень сложное дело, завершенное пока что лишь для некоторых моделей в одном и двух пространственных измерениях. В этом разделе мы рассматриваем то, что должно быть гораздо более простой задачей: рассеяние во внешнем поле. Эта задача должна быть проще, поскольку взаимодействующее поле удовлетворяет *линейному* волновому уравнению, например:

$$\varphi_{tt}(x, t) - \Delta\varphi(x, t) + m^2\varphi(x, t) = V(x, t)\varphi(x, t), \qquad (278)$$

где $V(x, t)$ — внешний потенциал.

Одно важное явление, связанное с квантованной версией этого уравнения, — явление рождения пар. Если в исходный момент начать с состояния без частиц, то среднее значение поля будет ненулевым, и в результате благодаря линейности (278) правая часть будет действовать как источник и будет ненулевой. Другими словами, будет ненулевой вероятность рождения пар частиц.

Явление рождения пар приводит к двум поразительным следствиям в математической структуре теории. Во-первых, «свободная» динамика при $t = -\infty$ отличается от «свободной» динамики при $t=+\infty$. Во-вторых, теория усложняется в том отношении, что должны быть отличны от нуля амплитуды рассеяния, описывающие переход n приходящих частиц в m уходящих. Оказывается, что все эти амплитуды могут быть описаны посредством некоторого фундаментального решения *классического* полевого уравнения.

Прежде чем начать обсуждение уравнения (278), мы бы хотели сстановиться на некоторых причинах, обусловливающих интерес к задачам во внешнем поле. Во-первых, поскольку задачи во внешнем поле «решаются явно», они часто использовались как аппроксимации и как наводящие соображения при изучении реальных взаимодействий. Один пример применения такой аппроксимации дает ядерная физика, где нуклонное поле рассматривается как внешнее поле для мезонов. Считается, что это разумно, поскольку нуклоны гораздо тяжелее мезонов. Случай, когда задачи во внешнем поле были применены в качестве наводящих соображений,— это исследование инфракрасных особенностей в квантовой электродинамике. Во-вторых, некоторые юкавские поля можно представить как интегралы по внешним полям после того, как «фермионы проинтегрированы». Внешние поля в этой задаче не являются гладкими, а включают в себя ультрафиолетовые особенности. В-третьих, имеется большое число инвариантных волновых уравнений, равно как и множество взаимодействий, каждое из которых можно использовать при описании высших спинов, и хотелось бы знать, какие из соответствующих волновых полей стабильны при взаимодействии с внешним полем. Если свободные поля не стабильны по отношению к взаимодействию с внешним полем (точнее говоря, если теория взаимодействия обладает различными патологиями), то считается, что взаимодействие с полностью квантованным полем будет еще хуже. Сейчас становится несомненным *отсутствие* уравнений спина 3/2 или выше, которые обладают полностью непатологическими взаимодействиями с внешними полями. Это не обязательно огромное бедствие, поскольку частицы со спином 3/2 могут возникать в теориях, где поля имеют спин 1/2 (см. замечания к § IX.8). Более серьезна та проблема, что гравитационное поле в уравнениях Эйнштейна имеет спин 2. Были предложены два способа ее решения. Первый основан на том, что гравитационные уравнения обладают весьма специальными нелинейностями, которые, возможно, не допускают хороших моделей на основе внешних полей. Более радикальное предположение состоит в том, что гравитон есть связанное состояние двух фотонов, а «гравитационное поле» — производный объект!

В этом разделе мы рассмотрим только случай нулевого спина со взаимодействием (278). Мы предполагаем, что $V(x, t)$ — вещественнозначная C^∞-функция переменных x и t с компактным носителем. Наша цель — построить квантовое поле, удовлетворяющее уравнению (278) и всем аксиомам Вайтмана, за исключением пуанкаре-инвариантности (мы не можем ожидать пуанкаре-инвариантности, поскольку этим свойством не обладает V), а затем развить теорию рассеяния. Огромное преимущество линейного уравнения движения для поля состоит в том, что для порождения квантовополевой динамики можно пользоваться аналогичным классическим волновым уравнением. Итак, мы начинаем с изучения проблемы существования и теории рассеяния для классического волнового уравнения:

$$w_{tt} - \Delta w + m^2 w = V(x,\ t)\, w, \qquad (279)$$
$$w(x,\ 0) = w_1(x), \quad w_t(x,\ 0) = w_2(x).$$

Как и в § 10, положим $B = \sqrt{-\Delta + m^2}$ и перепишем (279) как систему уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}.$$

Чтобы облегчить в последующем переход к квантовополевой задаче, удобно диагонализовать свободную часть динамики. Пусть

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} B^{1/2} & iB^{-1/2} \\ B^{1/2} & -iB^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Положим $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^3)$, выберем $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ в качестве нашего гильбертова пространства и определим операторы h_0 и $v(t)$ как

$$-ih_0 \equiv T\begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = i\begin{pmatrix} -B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$
$$-iv(t) \equiv T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = \frac{i}{2} B^{-1/2} V(x,\ t)\, B^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если ввести $\eta(t) = \langle \alpha(t),\ \beta(t) \rangle = T\langle w(t),\ w_t(t) \rangle$, то (279) превратится в уравнение

$$\eta'(t) = -ih_0\eta(t) - iv(t)\,\eta(t) \qquad (280)$$

с начальным условием

$$\eta(0) = \langle \alpha_0(x),\ \beta_0(x) \rangle \equiv T\langle w(0),\ w_t(0) \rangle$$

на $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$-значную функцию $\eta(t)$. Оператор h_0 самосопряжен на $D(h_0) = D(B) \oplus D(B)$, а $v(t)$ — непрерывная функция из $\mathbb{R}$ в множество ограниченных операторов на $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, удовлетворяющая оценке

$$\| v(t) \|_{\mathscr{L}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})} \leqslant 2m^{-1} \sup_{x,\ t} |V(x,\ t)| \equiv M < \infty.$$

Итак, для каждого t оператор

$$ih(t) \equiv i(h_0 + v(t))$$

есть генератор экспоненциально ограниченной полугруппы на $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, и все $ih(t)$ имеют, в силу теоремы X.50, $D(h_0)$ в качестве общей области определения. Затем, поскольку мы предполагаем, что $V(x, t)$ непрерывно дифференцируема, легко проверить (задача 137), что операторы $ih(t) + M + 1$ удовлетворяют условиям (a)—(c) теоремы X.70. Таким образом, из теоремы X.70 следует, что существует непрерывное семейство $u(t, s)$ ограниченных операторов на $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, такое, что $u(t, s)\eta_0$ дифференцируемо при $\eta_0 \in D(h_0)$ и

$$\frac{d}{dt} u(t, s)\eta_0 = -ih(t)u(t, s)\eta_0, \quad u(s, s)\eta_0 = \eta_0. \tag{281}$$

Далее, в силу оценки на $\|v(t)\|$, оператор $u(t, s)$ удовлетворяет неравенству $\|u(t, s)\eta_0\| \leqslant e^{M|t-s|}\|\eta_0\|$. Отметим, что, поскольку $-ih(t)$ также порождает экспоненциально ограниченную полугруппу, $u(t, s)$ определен для всех t и s и удовлетворяет равенству $u(t_1, t_2)u(t_2, t_3) = u(t_1, t_3)$. Поскольку эволюция в обратном направлении по времени удовлетворяет тем же оценкам, что и выше, имеем

$$e^{-M|t-s|}\|\eta_0\| \leqslant \|u(t, s)\eta_0\| \leqslant e^{M|t-s|}\|\eta_0\| \tag{282}$$

для всех t и s. Отметим, что, поскольку возмущения ограничены, можно было бы для определения динамики пользоваться рядом Дайсона в представлении взаимодействия (см. обсуждение после теоремы X.69) вместо более тонкой теоремы X.70.

Семейство операторов $T^{-1}u(t, s)T$ обладает двумя другими важными свойствами. Во-первых, развитие во времени причинно. Иначе говоря, если начальные данные $w_0 = \langle w(x, s), w_t(x, s)\rangle$ имеют носитель в множестве Σ, то $w(t) = T^{-1}u(t, s)Tw_0$ имеет носитель в $\{x \mid |x-y| \leqslant |t-s|$ для некоторого $y \in \Sigma\}$. Идея доказательства в точности та же, что и в теореме X.77, за исключением того, что нелинейный член $-|u|^2u$ заменен на $V(x, t)w$. Во-вторых, пусть λ обозначает оператор

$$\lambda = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

на $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$. Тогда для всех t и s

$$u(t, s)^* \lambda u(t, s) = \lambda = u(t, s)\lambda u(t, s)^*. \tag{283a}$$

Прежде чем доказывать равенство (283a), отметим, что в исходных переменных оно эквивалентно следующему утверждению. Величина

$$q = \int_{\mathbb{R}^3} [\overline{w(x, t)}\, w_t(x, t) - w(x, t)\, \overline{w_t(x, t)}]\, d^3x \tag{283b}$$

не зависит от времени для решений w уравнения (279). После квантования (283a) будет выражать сохранение «заряда». Для доказательства (283a) заметим, что, в силу ограниченности $u(t, s)$ и поляризационного тождества, достаточно показать, что

$$(u(t, s)\eta_0, \lambda u(t, s)\eta_0) = (\eta_0, \lambda\eta_0) = (u(t, s)^*\eta_0, \lambda u(t, s)^*\eta_0)$$

для η_0 из плотного множества. Таким образом, достаточно показать, что (283b) не зависит от времени для решений уравнения (279) с начальными данными из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ Решение тогда лежит в $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ во все моменты времени. Более того, (283b) —не что иное, как вронскиан двух решений w и $\bar{w}$ уравнения (279), а потому не зависит от времени, ибо допустимо необходимое интегрирование по частям, так как $w(\cdot, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. В терминах теоремы Нётер, рассмотренной в дополнении к § 13, сохранение величины q есть отражение инвариантности относительно замены $w \longmapsto e^{i\theta}w$ (задача 152).

Сказанное суммирует

Теорема XI.104. Пусть $V(x, t)$ — непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем в $\mathbb{R}^4$. Пусть $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, h_0 и $v(t)$ такие, как выше. Тогда существует сильно непрерывное двупараметрическое семейство $u(t, s)$ ограниченных операторов в $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, такое, что

(a) $u(t_3, t_2)\, u(t_2, t_1) = u(t_3, t_1)$; $u(t, t) = I$;
(b) если $\eta_t \in D(h_0)$, то справедливо (281), а $\eta(t) = u(t, 0)\,\eta(0)$ удовлетворяет (280);
(c) если $\operatorname{supp} w(0) \in \Sigma$, то $\operatorname{supp} T^{-1}u(t, 0)\, Tw(0) \subset \{x \mid |x - y| \leqslant |t - s|$ для некоторого $y \in \Sigma\}$;
(d) выполнено (283a);
(e) пусть $w_1 \in D(B^2)$ и $w_2 \in D(B)$. Положим $\langle\alpha, \beta\rangle = T\langle w_1, w_2\rangle$. Определим $\langle\alpha(t), \beta(t)\rangle \equiv u(t, 0)\langle\alpha, \beta\rangle$. Тогда функция $w(t) = 2^{-1/2}\{B^{-1/2}\alpha(t) + B^{-1/2}\beta(t)\}$ дважды дифференцируема со значениями в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и удовлетворяет уравнению (279) с начальными данными $w(0) = w_1$, $w_t(0) = w_2$.

Утверждения (a) — (d) уже доказаны; (e) выполнено, поскольку условия (279) и (280) эквивалентны; необходимо лишь проверить детали, связанные с областями определения (задача 138).

Теперь мы введем классическое представление взаимодействия, которое позже будет полезно и в квантовой теории поля. Пусть

$$\tilde{u}(t, s) = e^{ith_0}u(t, s)\, e^{-ish_0}.$$

Тогда для $\eta_0 \in D(h_0)$

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}(t, s)\eta_0 = e^{ith_0}(-iv(t))u(t, s)e^{-ish_0}\eta_0 =$$
$$= e^{+ith_0}(-iv(t))e^{-ith_0}(e^{+ith_0}u(t, s)e^{-ish_0})\eta_0,$$

так что вектор $\tilde{u}(t, s)\eta_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}(t, s)\eta_0 = -i\tilde{v}(t)\tilde{u}(t, s)\eta_0,$$
$$\tilde{u}(s, s)\eta_0 = \eta_0,$$

где

$$\tilde{v}(t) = e^{+ith_0}v(t)e^{-ith_0}.$$

Отметим, что, в силу оценки (282) и равенства $u(s, t)u(t, s) = u(s, s) = I$, как $u(t, s)$, так и $\tilde{u}(t, s)$ — ограниченные операторы с ограниченными обратными.

Обратимся далее к классической теории рассеяния для уравнения (280), которая из-за наших сильных предположений о $V(x, t)$ очень проста. Пусть $u_0(t)$ обозначает e^{-ith_0}, и пусть t_0 достаточно велико, так что $v(x, t) = 0$ при $|t| \geqslant t_0$. Пусть задано $\eta_- \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$. Определим $W_+\eta_-$ как такой вектор в $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, для которого

$$\|u_0(t)\eta_- - u(t, 0)(W_+\eta_-)\|_{\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \tag{284}$$

Согласно части (a) теоремы XI.104, имеем

$$\eta(x, t) \equiv u(t, -t_0)u_0(-t_0)\eta_-(x) = u(t, 0)u(0, -t_0)u_0(-t_0)\eta_-(x).$$

Более того, при $t < -t_0$ справедливо равенство $u(t, -t_0) = u_0(t + t_0)$, поскольку $v(t) = 0$ при $t < -t_0$. Итак, при $t < -t_0$ получаем

$$\eta(x, t) = u_0(t + t_0)u_0(-t_0)\eta_-(x) = u_0(t)\eta_-(x),$$

так что если мы положим

$$W_+\eta_- = u(0, -t_0)u_0(-t_0)\eta_-,$$

то (284) выполняется, поскольку норма равна нулю при $t < -t_0$. Аналогично,

$$W_-\eta_+ = u(0, t_0)u_0(t_0)\eta_+.$$

Поскольку и u_0, и u сюръективны, $\operatorname{Ran} W_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} = \operatorname{Ran} W_-$, так что теория асимптотически полна и

$$S_{cl} = W_-^{-1}W_+ = [u(0, t_0)u_0(t_0)]^{-1}[u(0, -t_0)u_0(-t_0)] =$$
$$= u_0(-t_0)u(t_0, 0)u(0, -t_0)u_0(-t_0) =$$
$$= u_0(-t_0)u(t_0, -t_0)u_0(-t_0) = \tilde{u}(t_0, -t_0).$$

Таким образом, классический оператор рассеяния — не что иное, как пропагатор от $-t_0$ до t_0 в представлении взаимодействия.

Обратимся теперь к квантовополевой задаче и начнем с введения заряженного свободного скалярного поля массы m. Пусть $\mathcal{F}_s^{(1)}(L^2(\mathbb{R}^3))$ — бозонное фоково пространство над $L^2(\mathbb{R}^3)$, и пусть $a^\dagger(\cdot)$ и $a(\cdot)$ — операторы рождения и уничтожения на $\mathcal{F}_s^{(1)}(L^2(\mathbb{R}^3))$, стоящие в формулах (X.74), (X.75) и (X.76). Как и в § X.7, мы обозначаем через F_0 множество конечночастичных векторов и полагаем

$$D_{\mathcal{S}} = \{\psi \in F_0 \mid \psi^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n}) \text{ для всех } n \geqslant 1\}.$$

Пусть $\mathcal{F}_s^{(2)}(L^2(\mathbb{R}^3))$ — другой экземпляр того же фокова пространства, на котором соответствующие операторы уничтожения и рождения мы обозначим через $b(\cdot)$ и $b^\dagger(\cdot)$. Если $\mathcal{F}^{(1)}(L^2(\mathbb{R}^3))$ — гильбертово пространство каких-то бозонов, а $\mathcal{F}_s^{(2)}(L^2(\mathbb{R}^3))$ — гильбертово пространство соответствующих античастиц, то гильбертово пространство объединенной системы есть

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}_s^{(1)}(L^2(\mathbb{R}^3)) \otimes \mathcal{F}_s^{(2)}(L^2(\mathbb{R}^3)) = \mathcal{F}\ (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}).$$

Для каждого $f \in \mathfrak{h}$ операторы $a(f)$, $a^\dagger(f)$, $b(f)$, $b^\dagger(f)$ могут быть естественным образом отождествлены с операторами $a(f) \otimes I$, $a^\dagger(f) \otimes I$, $I \otimes b(f)$, $I \otimes b^\dagger(f)$ в $\mathcal{H}$, которые мы для простоты по-прежнему будем обозначать $a(f)$, $a^\dagger(f)$, $b(f)$ и $b^\dagger(f)$. Определим, как описано в § X.7, операторнозначные обобщенные функции $a(p)$, $a^\dagger(p)$, $b(p)$, $b^\dagger(p)$. В терминах этих операторов уничтожения и рождения в $\mathcal{H}$ определим **свободный гамильтониан**

$$H_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \mu(p)\, a^\dagger(p)\, a(p)\, d^3p + \int_{\mathbb{R}^3} \mu(p)\, b^\dagger(p)\, b(p)\, d^3p,$$

где $\mu(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$, **операторы числа частиц**

$$N_+ = \int_{\mathbb{R}^3} a^\dagger(p)\, a(p)\, d^3p, \qquad N_- = \int_{\mathbb{R}^3} b^\dagger(p)\, b(p)\, d^3p$$

и **оператор заряда**

$$Q = N_+ - N_-.$$

Пользуясь теоремой Нельсона об аналитических векторах, легко проверить, что операторы H_0, N_+, N_- и Q в существенном самосопряжены на области $D_{\mathcal{S}} \otimes D_{\mathcal{S}}$, которую впредь мы будем обозначать просто $D_{\mathcal{S}}$. Определим **заряженное свободное скалярное бозонное поле** как операторнозначную обобщенную функцию (заметьте, что индекс нуль указывает на то, что поле свободное, а не на фиксирование нулевого момента времени):

$$\varphi_0(f,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{a(e^{-iBt}B^{-1/2}f)+b^{\dagger}(e^{iBt}B^{-1/2}f)\}$$

для $f\in\mathfrak{H}$. Формально $\varphi_0(x,\ t)$ задается простым выражением

$$\varphi_0(x,\ t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[e^{-i(\mu(p)t-p\cdot x)}a(p)+e^{i(\mu(p)t-p\cdot x)}b^{\dagger}(p)\right]\frac{d^3p}{\sqrt{2\mu(p)}}.$$

Определим также **поля в нулевой момент времени** как

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}(e^{ip\cdot x}a(p)+e^{-ip\cdot x}b^{\dagger}(p))\frac{d^3p}{\sqrt{2\mu(p)}},$$

$$\pi_0(x)\equiv\varphi_0(x)^*=\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}(e^{-ip\cdot x}a^{\dagger}(p)-e^{ip\cdot x}b(p))\sqrt{\frac{\mu(p)}{2}}\,d^3p.$$

Поле $\varphi_0(x,\ t)$ выражается через поле $\varphi_0(x)$ формулой

$$\varphi_0(f,\ t)=e^{iH_0t}\varphi_0(f)e^{-iH_0t}.$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[a(f),\ a^{\dagger}(g)]=(f,\ g)_{L^2},\quad [b(f),\ b^{\dagger}(g)]=(f,\ g)_{L^2},\quad [a^{\#}(f),\ b^{\#}(g)]=0$$

для вещественнозначных функций $f,\ g\in L^2(\mathbb{R}^3)$, где индекс $\#$ обозначает наличие или отсутствие крестика.

Если $\mathcal{U}^{(1)}$ и $\mathcal{U}^{(2)}$ — действие группы Лоренца в $\mathcal{F}_s^{(1)}(L^2(\mathbb{R}^3))$ и $\mathcal{F}_s^{(2)}(L^2(\mathbb{R}^3))$, возьмем $\mathcal{U}=\mathcal{U}^{(1)}\otimes\mathcal{U}^{(2)}$ в качестве представления этой группы в нашем случае. Заметим, наконец, что имеется вакуум $\psi_0=\psi_0^{(1)}\otimes\psi_0^{(2)}$, определенный посредством вакуумов $\psi_0^{(i)}$ в пространствах $\mathcal{F}_s^{(i)}(L^2(\mathbb{R}^3))$. Четверка $\langle\mathcal{H},\ \mathcal{U},\ \varphi_0(x,\ t),\ \psi_0\rangle$ удовлетворяет очевидному обобщению аксиом Гординга — Вайтмана на неэрмитовы поля. Этот факт, а также другие сделанные выше утверждения можно проверить точно так же, как и в случае эрмитова скалярного поля, рассмотренного в § X.7 (задача 139).

Наша цель — решить операторнозначную задачу Коши, т. е. найти операторнозначную обобщенную функцию $\varphi(x,\ t)$, удовлетворяющую уравнению и начальным условиям

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(x,\ t)-\Delta\varphi(x,\ t)+m^2\varphi(x,\ t)=V(x,\ t)\varphi(x,\ t),\qquad(285)$$

$$\varphi(x,\ 0)=\varphi_0(x),\qquad \frac{d}{dt}\varphi(x,\ 0)=\pi_0(x)^*.$$

Мы будем действовать как в классическом случае и сначала решим задачу

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a(x, t) \\ b^\dagger(x, t)\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -B & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(x, t) \\ b^\dagger(x, t)\end{pmatrix} +$$
$$+\frac{i}{2}B^{-1/2}VB^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(x, t) \\ b^\dagger(x, t)\end{pmatrix} =$$
$$= -i(h_0+v(t))\begin{pmatrix} a(x, t) \\ b^\dagger(x, t)\end{pmatrix}, \tag{286}$$
$$a(x, 0) = a(x), \quad b^\dagger(x, 0) = b(x),$$

где $a(x)$ — обратный фурье-образ $a(p)$ и где предполагается, что уравнение выполнено в смысле (операторнозначных) обобщенных функций. Поскольку уравнение *линейно*, его можно решить, пользуясь классическим решением. Если

$$u(t, 0) = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t)\end{pmatrix},$$

где $u_{ij}(t)$: $\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$, то, по крайней мере формально,

$$\begin{pmatrix} a(x, t) \\ b^\dagger(x, t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{2}(t) & u_{22}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(x) \\ b^\dagger(x)\end{pmatrix}.$$

Итак, для $f\in\mathfrak{h}$ определим операторнозначные обобщенные функции $a(\cdot, t)$ и $b^\dagger(\cdot, t)$ посредством

$$a(f, t) = a(u_{11}^{\mathrm{T}}(t)f) + b^\dagger(u_{12}^{\mathrm{T}}(t)f),$$
$$b^\dagger(f, t) = a(u_{21}^{\mathrm{T}}(t)f) + b^\dagger(u_{22}^{\mathrm{T}}(t)f),$$

где $u_{ij}^{\mathrm{T}}(t)$ — результат транспонирования $u_{ij}(t)$ на $\mathfrak{h}$ — связан с $u_{ij}(t)^*$ посредством $u_{ij}^{\mathrm{T}}(t) = Cu_{ij}(t)^*C$. Мы предостерегаем читателя, что здесь везде транспонирования проводятся в $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^3)$, а не по матричным индексам. Наконец, введем $\varphi(\cdot, t)$ и $\pi(\cdot, t)$, полагая

$$\varphi(f, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{a(B^{-1/2}f, t) + b^\dagger(B^{-1/2}f, t)\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{a((u_{11}^{\mathrm{T}}(t)+u_{21}^{\mathrm{T}}(t))B^{-1/2}f) + b^\dagger((u_{12}^{\mathrm{T}}(t)+u_{22}^{\mathrm{T}}(t))B^{-1/2}f)\}, \tag{287a}$$

$$\overline{\pi}(f,t)^* = \frac{i}{\sqrt{2}}\{-a(B^{1/2}f, t) + b^\dagger(B^{1/2}f, t) =$$
$$= \frac{i}{\sqrt{2}}\{a((-u_{11}^{\mathrm{T}}(t)+u_{21}^{\mathrm{T}}(t))B^{1/2}f) + b^\dagger((-u_{12}^{\mathrm{T}}(t)+u_{22}^{\mathrm{T}}(t))B^{1/2}f)\}; \tag{287b}$$

$\pi(\cdot, t)$ определено лишь для $f \in D(B^{1/2})$. В силу (281), имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
u_{11}'(t) + u_{21}'(t) &= -iB(u_{11}(t) - u_{21}(t)),\\
u_{12}'(t) + u_{22}'(t) &= iB(-u_{12}(t) + u_{22}(t)),\\
u_{11}''(t) + u_{21}''(t) &= (-B^2 + B^{1/2}VB^{-1/2})(u_{11}(t) + u_{21}(t)),\\
u_{12}''(t) + u_{22}''(t) &= (-B^2 + B^{1/2}VB^{-1/2})(u_{12}(t) + u_{22}(t)).
\end{aligned}$$

Таким образом, для вещественнозначных функций $f \in D(B)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(f, t) &= \frac{i}{\sqrt{2}}\{a([-B(u_{11}(t) - u_{21}(t))]^{\mathrm{T}}B^{-1/2}f) +\\
&\quad + b^\dagger([B(-u_{12}(t) + u_{22}(t))]^{\mathrm{T}}B^{-1/2}f)\} =\\
&= \frac{i}{\sqrt{2}}\{-a((u_{11}^{\mathrm{T}}(t) - u_{21}^{\mathrm{T}}(t))B^{1/2}f) +\\
&\quad + b^\dagger((-u_{12}^{\mathrm{T}}(t) + u_{22}^{\mathrm{T}}(t))B^{1/2}f)\} = \pi(f, t)^*
\end{aligned}$$

и аналогично для $f \in D(B^2)$

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(f, t) = \varphi(-B^2 f, t) + \varphi(Vf, t),$$

откуда видно, что $\varphi(\cdot, t)$ удовлетворяет (285) в смысле обобщенных функций.

В терминах операторов $a(f, t)$. $b^\dagger(f, t)$ определим естественным образом операторы

$$a^\dagger(f, t) = a(Cf, t)^*, \qquad b(f, t) = b^\dagger(Cf, t)^*.$$

Тогда в момент времени t эти операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[a(f, t), a^\dagger(g, t)] = (Cf, g), \quad [b(f, t), b^\dagger(g, t)] = (Cf, g),$$
$$[a^\#(f, t), b^\#(g, t)] = 0.$$

Чтобы в этом убедиться, заметим, что

$$\begin{aligned}
a(f, t) &= a(u_{11}^{\mathrm{T}}f) + b^\dagger(u_{12}^{\mathrm{T}}f),\\
a^\dagger(g, t) &= a(u_{11}^{\mathrm{T}}Cg)^* + b^\dagger(u_{12}^{\mathrm{T}}Cg)^* = a^\dagger(Cu_{11}^{\mathrm{T}}Cg) + b(Cu_{12}^{\mathrm{T}}Cg) =\\
&= a^\dagger(u_{11}^* g) + b(u_{12}^* g).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
[a(f, t), a^\dagger(g, t)] &= [a(u_{11}^{\mathrm{T}}f), a^\dagger(u_{11}^* g)] + [b^\dagger(u_{12}^{\mathrm{T}}f), b(u_{12}^* g)] =\\
&= (Cu_{11}^{\mathrm{T}}f, u_{11}^* g) - (Cu_{12}^* g, u_{12}^{\mathrm{T}}f) =\\
&= (u_{11}^* Cf, u_{11}^* g) - (u_{12}^* Cf, u_{12}^* g) =\\
&= (Cf, (u_{11}u_{11}^* - u_{12}u_{12}^*)g) = (Cf, g),
\end{aligned}$$

поскольку $u_{11}u_{11}^* - u_{12}u_{12}^* = I$ в силу (283а). Другие коммутаторы вычисляются аналогично. Отсюда следует, что

$$[\varphi(f, t), \pi(g, t)] = i(Cf, g).$$

Наконец, проверим, что поле $\varphi(x, t)$ причинно, иными словами что

$$[\varphi(f, t), \varphi(g, t')] = 0, \tag{288a}$$

$$[\varphi(f, t), \varphi(g, t')^*] = 0, \tag{288b}$$

если множества $\{\langle x, t\rangle \mid x \in \operatorname{supp} f\}$ и $\{\langle x, t'\rangle \mid x \in \operatorname{supp} g\}$ пространственно-подобно разделены. Поскольку $a(f)$ коммутирует с $a(g)$ для всех f и g и аналогично ведет себя $b(\cdot)$, (288а) выполняется автоматически. Мы докажем равенство (288b) в случае, когда $t' = 0$. Общий случай доказывается аналогично при помощи соотношения $u(t_1, t_2)u(t_2, t_3) = u(t_1, t_3)$ (задача 140). Итак,

$$\begin{aligned}
[\varphi(f, t), \varphi(g)^*] &= \frac{1}{2}[a((u_{11}+u_{21})^{\mathrm{T}}B^{-1/2}f), a^{\dagger}(CB^{-1/2}g)] + \\
&\quad + \frac{1}{2}[b^{\dagger}((u_{12}+u_{22})^{\mathrm{T}}B^{-1/2}f), b(CB^{-1/2}g)] = \\
&= \frac{1}{2}(C(u_{11}+u_{21})^{\mathrm{T}}B^{-1/2}f, CB^{-1/2}g) - \\
&\quad - \frac{1}{2}(B^{-1/2}g, (u_{21}+u_{22})^{\mathrm{T}}B^{-1/2}f) = \\
&= \frac{1}{2}((u_{11}+u_{21})^* CB^{-1/2}f, CB^{-1/2}g) - \\
&\quad - \frac{1}{2}((u_{21}+u_{22})^* CB^{-1/2}f, CB^{-1/2}g) = \\
&= \frac{1}{2}(Cf, B^{-1/2}\{(u_{11}+u_{21}) - (u_{12}+u_{22})\}B^{-1/2}Cg).
\end{aligned}$$

Пусть теперь

$$d(t) = \begin{pmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) \end{pmatrix} = T^{-1}u(t, 0)T.$$

Тогда $d_{12}(t) = B^{-1/2}\{(u_{11}+u_{21}) - (u_{12}+u_{22})\}B^{-1/2}$. Поскольку решение классического уравнения причинно (теорема XI.104(с)), заключаем, что матричный элемент $(Cf, d_{12}(t)Cg)$ равен нулю при $t < T$, если носители f и g находятся на расстоянии T друг от друга.

Сказанное выше суммирует

Теорема XI.105. Пусть $\varphi(f, t)$ и $\pi(f, t)$ заданы равенствами (287). Тогда $\varphi(\cdot, t)$ и $\pi(\cdot, t)$ суть операторнозначные обобщенные функции и

(а) $\varphi(\cdot, t)$ удовлетворяет уравнению и начальным условиям (285), где $\varphi_0(x)$ и $\pi_0(x)$ — свободные поля в нулевой момент времени;

(b) $\frac{d}{dt}\varphi(\cdot, t) = \pi(\cdot, t)^*$;

(c) в каждый момент t поля $\varphi(\cdot, t)$ и $\pi(\cdot, t)$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям $[\varphi(f, t), \pi(g, t)] = i(Cf, g)$;

(d) имеет место микроскопическая причинность.

Обратимся теперь к задаче рассеяния во внешнем поле $V(x, t)$. Пусть $\varphi_{\text{in}}(x, t)$ — свободное заряженное скалярное поле массы m с соответствующими операторами рождения и уничтожения $a^\dagger_{\text{in}}$ и a_{in}. Как и ранее, $V(x, t)$ — вещественнозначная функция, равная нулю при $|t| \geqslant t_0$. Нам бы хотелось решить следующую задачу Коши:

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(x, t) - \Delta\varphi(x, t) + m^2\varphi(x, t) = V(x, t)\varphi(x, t), \tag{289}$$

$$\varphi(x, -t_0) = \varphi_{\text{in}}(x, -t_0), \qquad \varphi^*(x, -t_0) = \pi_{\text{in}}(x, -t_0).$$

Если ввести

$$a_{\text{in}}(f, t) \equiv e^{iH_0t}a_{\text{in}}(f)e^{-iH_0t} = a_{\text{in}}(e^{-iBt}f),$$
$$b^\dagger_{\text{in}}(f, t) \equiv e^{iH_0t}b^\dagger_{\text{in}}(f)e^{-iH_0t} = b^\dagger_{\text{in}}(e^{iBt}f),$$

то $\varphi_{\text{in}}(x, -t_0)$ и $\pi_{\text{in}}(x, -t_0)$ выражаются через $a_{\text{in}}(x)$ и $b^\dagger_{\text{in}}(x)$ формулами

$$\varphi_{\text{in}}(f, -t_0) = 2^{-1/2}\{a_{\text{in}}(B^{-1/2}f, -t_0) + b^\dagger_{\text{in}}(B^{-1/2}f, -t_0)\} =$$
$$= 2^{-1/2}\{a_{\text{in}}(e^{iBt_0}B^{-1/2}f) + b^\dagger_{\text{in}}(e^{-iBt_0}B^{-1/2}f)\},$$
$$\pi_{\text{in}}(\bar f, -t_0)^* = i2^{-1/2}\{-a_{\text{in}}(e^{iBt_0}B^{1/2}f) + b^\dagger_{\text{in}}(e^{-iBt_0}B^{1/2}f)\}.$$

Задачу Коши (289) можно решить способом, аналогичным тому, которым была решена задача Коши для $t = 0$. Положим $u(t) = u(t, -t_0)$ и введем

$$a(x, t) \equiv u_{11}(t)a_{\text{in}}(x, -t_0) + u_{12}(t)b^\dagger_{\text{in}}(x, -t_0),$$
$$b^\dagger(x, t) \equiv u_{21}(t)a_{\text{in}}(x, -t_0) + u_{22}(t)b^\dagger_{\text{in}}(x, -t_0)$$

и

$$\varphi(f, t) \equiv 2^{-1/2}\{a(B^{-1/2}f, t) + b^\dagger(B^{-1/2}f, t)\} =$$
$$= 2^{-1/2}\{a_{\text{in}}((u^{\text{T}}_{11} + u^{\text{T}}_{21})B^{-1/2}f, -t_0) + b^\dagger_{\text{in}}((u^{\text{T}}_{12} + $$
$$+ u^{\text{T}}_{22})B^{-1/2}f, -t_0)\} =$$
$$= 2^{-1/2}\{a_{\text{in}}(e^{iBt_0}(u^{\text{T}}_{11} + u^{\text{T}}_{21})B^{-1/2}f) +$$
$$+ b^\dagger_{\text{in}}(e^{-iBt_0}(u^{\text{T}}_{12} + u^{\text{T}}_{22})B^{-1/2}f)\},$$
$$\pi(f, t)^* \equiv i2^{-1/2}\{a_{\text{in}}(e^{iBt_0}(-u^{\text{T}}_{11} + u^{\text{T}}_{21})B^{1/2}f) +$$
$$+ b^\dagger_{\text{in}}(e^{-iBt_0}(-u^{\text{T}}_{12} + u^{\text{T}}_{22})B^{1/2}f)\}.$$

Тогда, как и выше, $d\varphi(f, t)/dt = \pi(f, t)^*$ и $\varphi(x, t)$ удовлетворяет (289) в смысле обобщенных функций. В частности, $\varphi(x, t) = \varphi_{in}(x, t)$ при всех $t \leqslant -t_0$.

Поскольку $\varphi(x, t)$ удовлетворяет (289), а $V(x, t) = 0$ при $t \geqslant t_0$, имеем

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(x, t) - \Delta\varphi(x, t) + m^2\varphi(x, t) = 0, \qquad t \geqslant t_0.$$

Иными словами, $\varphi(x, t)$ удовлетворяет уравнению свободного поля при $t \geqslant t_0$. Это наводит на мысль ввести

$$a_{out}(x, t_0) = u_{11}(t_0, -t_0)\, a_{in}(x, -t_0) + u_{12}(t_0, -t_0)\, b_{in}^{\dagger}(x, -t_0),$$
$$b_{out}^{\dagger}(x, t_0) = u_{21}(t_0, -t_0)\, a_{in}(x, -t_0) + u_{22}(t_0, -t_0)\, b_{in}^{\dagger}(x, -t_0)$$

и

$$\varphi_{out}(f, t) = 2^{-1/2}\{a_{out}(e^{-i(t-t_0)B}B^{-1/2}f, t_0) + \\ + b_{out}^{\dagger}(e^{i(t-t_0)B}B^{-1/2}f, t_0)\},$$
$$\pi_{out}(f, t)^* = i2^{-1/2}\{-a_{out}(e^{i(t-t_0)B}B^{1/2}f, t_0) + \\ + b_{out}^{\dagger}(e^{i(t-t_0)B}B^{1/2}f, t_0)\}.$$

Для $f \in \mathscr{S}$ величины $a_{out}(f, t)$, $b_{out}^{\dagger}(f, t)$, $\varphi_{out}(f, t)$ и $\pi_{out}(f, t)$ и все их произведения — корректно определенные операторы на $D_{\mathscr{S}}$. Далее, $d\varphi_{out}(f, t)/dt = \pi_{out}(f, t)^*$, и $\varphi_{out}(x, t)$ — «свободное поле» в том смысле, что оно удовлетворяет свободному уравнению Клейна — Гордона при всех t. Заметим также, что $\varphi(x, t) = \varphi_{out}(x, t)$ при всех $t \geqslant t_0$. Позже мы увидим, хотя априори это и не очевидно, что для out-полей существует вакуум ψ_{out}, что

$$H_{out} = \int_{R^3} \mu(p)\, a_{out}^{\dagger}(p, t_0)\, a_{out}(p, t_0)\, d^3p + \\ + \int_{R^3} \mu(p)\, b_{out}^{\dagger}(p, t_0)\, b_{out}(p, t_0)\, d^3p \qquad (290)$$

имеет смысл самосопряженного оператора в $\mathscr{H}$ и что

$$\varphi_{out}(x, t) = e^{iH_{out}(t-t_0)}\varphi_{out}(x, t_0)\, e^{-iH_{out}(t-t_0)},$$
$$\pi_{out}(x, t) = e^{iH_{out}(t-t_0)}\pi_{out}(x, t_0)\, e^{-iH_{out}(t-t_0)}.$$

Поскольку a_{out} содержит в себе некоторые $b_{in}^{\dagger}$, оператор H_{out} не аннулирует вакуум ψ_{in}, так что $H_{out} \neq H_{in} \equiv H_0$. Таким образом, асимптотически свободная динамика около $t = +\infty$ — не то же самое, что асимптотически свободная динамика около $t = -\infty$. Динамическая ситуация изображена на рис. XI.15. В соответствии с общими идеями этой главы нам следует ввести преобразование рассеяния $\mathfrak{S}$ как отображение множества операторов, заданное соответствиями

$$\mathfrak{S}\colon \varphi_{\text{in}}(x, 0) \longmapsto \varphi_{\text{out}}(x, 0), \qquad \pi_{\text{in}}(x, 0) \longmapsto \pi_{\text{out}}(x, 0).$$

Мы увидим, что $\mathfrak{S}$ унитарно порождаемо, т. е. что существует унитарный оператор S в $\mathscr{H}$, такой, что

$$\varphi_{\text{out}}(f, 0) = S^{-1}\varphi_{\text{in}}(f, 0)\, S, \qquad \pi_{\text{out}}(f, 0) = S^{-1}\pi_{\text{in}}(f, 0)\, S.$$

Мы назовем S **оператором рассеяния**, а $\mathfrak{S}$ — **оператором рассеяния в гейзенберговой картине**, поскольку он представляет собой пре-

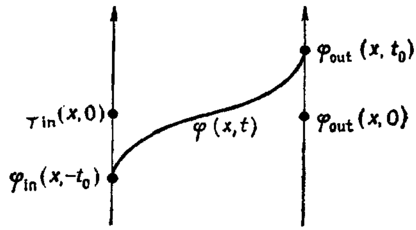

Рис. XI.15.

образование, отвечающее рассеянию, в гейзенберговой картине квантовой механики. Заметим, что S может быть определен этими условиями лишь с точностью до фазы. Принятое определение S соответствует S-матрице Яуха в противоположность S-матрице ЭБФМ, которой мы до сих пор пользовались в этом томе. Этот выбор общепринят в теории поля, и мы снова воспользуемся им в следующем разделе. У нас имеется явное действие преобразования $\mathfrak{S}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}(a_{\text{in}}(f)) &= a_{\text{out}}(f, 0) = 2^{-1/2}\{\varphi_{\text{out}}(f, 0) + i\pi(f, 0)^*\} = \\
&= a_{\text{out}}(e^{it_0B}f, t_0) = a_{\text{in}}(u_{11}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0)\, e^{it_0B}f, -t_0) + \\
&\qquad + b_{\text{in}}^{\dagger}(u_{12}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0)\, e^{it_0B}f, -t_0) = \\
&= a_{\text{in}}(e^{it_0B}u_{11}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0)\, e^{it_0B}f) + \\
&\qquad + b_{\text{in}}^{\dagger}(e^{-it_0B}u_{12}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0)\, e^{it_0B}f) = \\
&= a_{\text{in}}(\tilde{u}_{11}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0) f) + b_{\text{in}}^{\dagger}(\tilde{u}_{12}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0) f)
\end{aligned}$$

и аналогично

$$\mathfrak{S}(b_{\text{in}}^{\dagger}(f)) = b_{\text{out}}^{\dagger}(f, 0) = a_{\text{in}}(\tilde{u}_{21}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0) f) + b_{\text{in}}^{\dagger}(\tilde{u}_{22}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0) f).$$

Следовательно, преобразование от операторов рождения и уничтожения в нулевой момент времени in-поля к операторам рождения и уничтожения в нулевой момент времени out-поля дается равенством

$$\begin{pmatrix} a_{\text{out}}(x, 0) \\ b_{\text{out}}^{\dagger}(x, 0) \end{pmatrix} = S_{\text{cl}} \begin{pmatrix} a_{\text{in}}(x, 0) \\ b_{\text{in}}^{\dagger}(x, 0) \end{pmatrix},$$

где $S_{cl} = \tilde{u}(t_0, -t_0) = e^{it_0h_0}u(t_0, -t_0)e^{it_0h_0}$ — классический оператор рассеяния.

Мы пытаемся построить унитарный оператор S, такой, что

$$S^{-1}a_{in}^{\#}(f)S = a_{out}^{\#}(f), \qquad S^{-1}b_{in}^{\#}(f)S = b_{out}^{\#}(f), \tag{291}$$

где $a_{out}^{\dagger}$, b_{out} выражаются через a_{out}, $b_{out}^{\dagger}$ обычными формулами, включающими сопряжение C. Поскольку h_0 коммутирует с λ и выполняется (283), $\tilde{u}(t_0, -t_0)$ удовлетворяет равенству

$$\tilde{u}(t_0, -t_0)^*\lambda\tilde{u}(t_0, -t_0) = \lambda = \tilde{u}(t_0, -t_0)\lambda\tilde{u}(t_0, -t_0)^*. \tag{292}$$

Таким образом, то же доказательство, что и в теореме XI.105, показывает, что операторы a_{out}, b_{out} удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[a_{out}(f, 0), a_{out}^{\dagger}(g, 0)] = (Cf, g), \qquad [b_{out}(f, 0), b_{out}^{\dagger}(g, 0)] = (Cf, g),$$

а все остальные коммутаторы исчезают.

Следующая теорема сводит вопрос об унитарной порождаемости преобразования рассеяния к проверке некоторого свойства классического пропагатора.

Теорема XI.106. Предположим, что $\tilde{u}_{11}(t_0, -t_0)^{-1}\tilde{u}_{12}(t_0, -t_0)$ — оператор Гильберта — Шмидта в $L^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда существует унитарный оператор S в $\mathcal{H} = \mathcal{F}_s^{(1)}(L^2(\mathbb{R}^3)) \otimes \mathcal{F}_s^{(2)}(L^2(\mathbb{R}^3))$, такой, что выполняются равенства (291).

Доказательство. Поскольку $\tilde{u}$ удовлетворяет (292), имеем

$$\tilde{u}_{11}^*\tilde{u}_{11} = 1 + \tilde{u}_{12}^*\tilde{u}_{12}, \qquad \tilde{u}_{11}\tilde{u}_{11}^* = 1 + \tilde{u}_{12}\tilde{u}_{12}^*, \tag{293}$$

так что $\tilde{u}_{11}^*\tilde{u}_{11} \geqslant 1$ и $\tilde{u}_{11}\tilde{u}_{11}^* \geqslant 1$, откуда следует, что $\operatorname{Ran} \tilde{u}_{11} = L^2(\mathbb{R}^3)$ и что $\tilde{u}_{11}^{-1}$ существует и ограничен. Итак, произведение $\tilde{u}_{11}(t_0, -t_0)^{-1}\tilde{u}_{12}(t_0, -t_0)$ имеет смысл.

Чтобы доказать теорему, мы построим в $\mathcal{H}$ вектор ψ_{out} — вакуумный вектор для out-полей. Как только это будет сделано, будет легко выписать оператор S^{-1} явно.

Согласно теоремам VI.17 и VI. 22(e) и сделанным предположениям, в $L^2(\mathbb{R}^3)$ существуют ортонормированные наборы $\{f_i\}$, $\{g_i\}$, такие, что оператор $L = \tilde{u}_{11}^{-1}\tilde{u}_{12}$ можно записать в виде

$$Lh = \sum_{i=1}^{N_0} \lambda_i (g_i, h) f_i,$$

где λ_i — собственные значения оператора $|L|$ и $\sum \lambda_i^2 < \infty$. Число N_0 может быть конечным или бесконечным. Мы рассмотрим случай $N_0 = \infty$, поскольку именно здесь возникают наибольшие трудности. Из (293) следует, что

$$1 = LL^* + (\tilde{u}_{11}^{-1})(\tilde{u}_{11}^{-1})^*, \tag{294}$$

а поскольку $LL^*h = \sum \lambda_i^2 (f_i, h) f_i$, отсюда вытекает, что $\lambda_i \leqslant 1$, так как $(\tilde{u}_{11}^{-1})(\tilde{u}_{11}^{-1})^* \geqslant 0$. Далее, если $\lambda_{i_0} = 1$ для некоторого i_0, то (294) влечет за собой равенство $(\tilde{u}_{11}^{-1})^* f_{i_0} = 0$, которое неверно, поскольку $\operatorname{Ran} \tilde{u}_{11}^{-1} = L^2(\mathbb{R}^3)$. Итак, $\lambda_i < 1$ для всех i.

Далее, обозначим вакуум в $\mathscr{H}$ через ψ_{in}, и пусть F_{in} — множество конечных линейных комбинаций векторов вида $\psi_1 \otimes \psi_2$, где $\psi_i \in F_0 \subset \mathscr{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$. При помощи ортонормированных наборов $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ введем операторы

$$a_i = a_{\text{in}}(Cf_i), \qquad b_i = b_{\text{in}}(g_i).$$

Формально out-вакуум задается формулой

$$\psi_{\text{out}} = d\left(\prod_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i a_i^* b_i^*}\right)\psi_{\text{in}},$$

где константа d выбрана так, что $\|\psi_{\text{out}}\| = 1$. Чтобы придать смысл этому выражению, начнем с рассмотрения вектора $e^{-\lambda_1 a_1^* b_1^*}\psi_{\text{in}}$, который мы определим степенным рядом:

$$e^{-\lambda_1 a_1^* b_1^*}\psi_{\text{in}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1 a_1^* b_1^*)^n}{n!}\psi_{\text{in}}.$$

Для каждого n вакуум ψ_{in} лежит в области определения оператора $(a_1^* b_1^*)^n$ и

$$\begin{aligned}(a_1^* b_1^*)^n \psi_{\text{in}} &= \left|\sqrt{n!}\, S_n (\otimes^n f_1)\right| \otimes \left|\sqrt{n!}\, S_n (\otimes^n \bar{g}_1)\right| = \\ &= n!\, (\otimes^n f_1) \otimes (\otimes^n \bar{g}_1).\end{aligned}$$

Для разных n векторы $(a_1^* b_1^*)^n \psi_{\text{in}}$ ортогональны, поэтому

$$\left\|e^{-\lambda_1 a_1^* b_1^*}\psi_{\text{in}}\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{2n}}{(n!)^2}\left\|(a_1^* b_1^*)^n \psi_{\text{in}}\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1^{2n} = \frac{1}{1-\lambda_1^2}.$$

Итак, вектор $e^{-\lambda_1 a_1^* b_1^*}\psi_{\text{in}}$ имеет смысл, поскольку $\lambda_1 < 1$. Аналогично, пользуясь тем, что $(f_1, f_2) = 0 = (g_1, g_2)$, имеем

$$\begin{aligned}(a_2^* b_2^*)^{n-s} (a_1^* b_1^*)^s \psi_{\text{in}} &= \left|\sqrt{n!}\, S_n (\otimes^{n-s} f_2 \otimes^s f_1)\right| \otimes \\ &\otimes \left|\sqrt{n!}\, S_n (\otimes^{n-s} \bar{g}_2 \otimes^s \bar{g}_1)\right|,\end{aligned}$$

откуда

$$\left\|(a_2^* b_2^*)^{n-s} (a_1^* b_1^*)^s \psi_{\text{in}}\right\|^2 = (n!)^2 \left[\frac{(n-s)!\, s!}{n!}\right]^2 = [(n-s)!\, s!]^2.$$

Таким образом,

$$\left\| e^{-\lambda_2 a_2^* b_2^*} e^{-\lambda_1 a_1^* b_1^*} \psi_{in} \right\|^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\lambda_1 a_1^* b_1^* - \lambda_2 a_2^* b_2^*)^n \psi_{in} \right\|^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{(n-s)!\, s!}\right)^2 \lambda_1^{2s} \lambda_2^{2(n-s)} \| (a_2^* b_2^*)^{n-s} (a_1^* b^*)^s \psi_{in} \|^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} \lambda_1^{2s} \lambda_2^{2(n-s)} = (1-\lambda_1^2)^{-1} (1-\lambda_2^2)^{-1}.$$

Продолжая действовать таким способом, мы покажем, что вектор $\chi_N = \left(\prod_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i a_i^* b_i^*} \right) \psi_{in}$ существует и что $\| \chi_N \|^2 = \prod_{i=1}^{N} (1-\lambda_i^2)^{-1}$. Более того, пользуясь ортонормированностью векторов $\{f_i\}$ и векторов $\{g_i\}$, аналогично предыдущему вычислению (задача 141а) получаем, что

$$\| \chi_N - \chi_M \|^2 = \prod_{i=1}^{N} (1-\lambda_i^2)^{-1} - \prod_{i=1}^{M} (1-\lambda_i^2)^{-1}. \tag{295}$$

В силу допущения о том, что L — оператор Гильберта — Шмидта, $\sum \lambda_i^2 < \infty$, так что бесконечное произведение $\prod_{i=1}^{\infty} (1-\lambda_i^2)^{-1}$ сходится. Следовательно, $\{\chi_N\}$ — последовательность Коши, и мы обозначим ее должным образом нормированный предел через ψ_{out}.

Для доказательства того, что ψ_{out} аннулируется оператором $a_{out}(f)$, напомним, что

$$a_{out}(f) = a_{in}(\tilde{u}_{11}^{T} f) + b_{in}^{\dagger}(\tilde{u}_{12}^{T} f).$$

Поскольку $\operatorname{Ran}(\tilde{u}_{11}^{T})^{-1} = L^2(\mathbb{R}^3)$, можно считать, что f имеет вид $f = (\tilde{u}_{11}^{T})^{-1} h$. Выберем $h = Cf_i$. Тогда

$$a_{out}((\tilde{u}_{11}^{T})^{-1} Cf_i) = a_{in}(Cf_i) + b_{in}^{\dagger}(\tilde{u}_{12}^{T} (\tilde{u}_{11}^{T})^{-1} Cf_i) =$$

$$= a_{in}(Cf_i) + b_{in}^{\dagger}(C((\tilde{u}_{11})^{-1} \tilde{u}_{12})^* f_i) =$$

$$= a_{in}(Cf_i) + b_{in}^{\dagger}(C\lambda_i g_i) = a_i + \lambda_i b_i^*.$$

В силу ортогональности наборов $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$, все операторы $a_i^{\#}$ и $b_i^{\#}$ коммутируют при разных i, так что

$$(a_i + \lambda_i b_i^*) \chi_N = \left(\prod_{j \neq i}^{N} e^{-\lambda_j a_j^* b_j^*} \right) (a_i + \lambda_i b_i^*) e^{-\lambda_i a_i^* b_i^*} \psi_{in} = 0,$$

поскольку $(a_i + \lambda_i b_i^*) e^{-\lambda_i a_i^* b_i^*} \psi_{in} = 0$ за счет канонических коммутационных соотношений, которым удовлетворяют a_i и a_i^* (задача

141b). Устремляя $N \to \infty$, видим, что ψ_{out} лежит в области определения оператора $a_{out}((\tilde{u}_{11}^T)^{-1} Cf_i)$ и что $a_{out}((\tilde{u}_{11}^T)^{-1} Cf_i)\psi_{out} = 0$. Предположим, что $k \in \{f_i\}^\perp$. Тогда $a_{out}((\tilde{u}_{11}^T)^{-1} Ck) = a_{in}(Ck)$, а поскольку $a_{in}(Ck)$ коммутирует с $a_i^\#$ и $b_i^\#$ для всех i, заключаем, что $a_{out}((\tilde{u}_{11}^T)^{-1} Ck)\psi_{out} = 0$. Разлагая произвольное $h \in L^2(\mathbb{R}^3)$ по набору $\{f_i\}$ и некоторому базису в $\{f_i\}^\perp$, легко получить из предыдущего, что ψ_{out} лежит в области определения оператора $a_{out}((\tilde{u}_{11}^T)^{-1} h)$ и что $a_{out}((\tilde{u}_{11}^T)^{-1} h)\psi_{out} = 0$. Доказательство того, что b_{out} аннулирует ψ_{out}, аналогично и использует равенство $\tilde{u}_{21}^*(\tilde{u}_{22}^*)^{-1} = \tilde{u}_{11}^{-1}\tilde{u}_{12}$, которое следует из того, что $\tilde{u}$ удовлетворяет (292).

Введем

$$h_i = (\tilde{u}_{11}^{-1}) * f_i/\sqrt{1-\lambda_i^2}, \qquad k_i = (\tilde{u}_{22}^{-1}) * g_i/\sqrt{1-\lambda_i^2}$$

и

$$\tilde{a}_i \equiv a_{out}(Ch_i), \qquad \tilde{b}_i \equiv b_{out}(k_i).$$

Тогда, проводя такие же вычисления, как и выше, имеем

$$\tilde{a}_i = a_{in}(\tilde{u}_{11}^T Ch_i) + b_{in}^\dagger(\tilde{u}_{12}^T Ch_i) = \frac{a_i + \lambda_i b_i^*}{\sqrt{1-\lambda_i^2}} \text{ и } \tilde{b}_i = \frac{b_i + \lambda_i a_i^*}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}.$$

Из (294) легко следует, что $\{h_i\}$ — ортонормированный набор. Чтобы обнаружить, что и $\{k_i\}$ — ортонормированный набор, воспользуемся сначала равенством (283а) и докажем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 (g_i, \cdot) g_i = LL^* = \tilde{u}_{22}^{-1}\tilde{u}_{21}\tilde{u}_{21}^* (\tilde{u}_{22}^{-1})^* = I - \tilde{u}_{22}^{-1}(\tilde{u}_{22}^{-1})^*,$$

откуда ортонормированность легко следует. Теперь дополним $\{h_i\}$ до ортонормированного базиса в $L^2(\mathbb{R}^3)$, который мы обозначим $\{\eta_i\}$, и дополним $\{Ck_i\}$ до ортонормированного базиса, который обозначим $\{\gamma_i\}$. Для векторов вида $\prod a_{in}^\dagger(\eta_i) \prod b_{in}^\dagger(\gamma_j)\psi_{in}$ определим S^{-1}, полагая

$$S^{-1}: \psi_{in} \mapsto \psi_{out},$$

$$S^{-1}: \prod a_{in}^\dagger(\eta_i) \prod b_{in}^\dagger(\gamma_j)\psi_{in} \mapsto \prod a_{out}^\dagger(\eta_i) \prod b_{out}^\dagger(\gamma_j)\psi_{out},$$

где произведения взяты по некоторым конечным наборам индексов i и j. Сначала отметим, что правая часть имеет смысл, поскольку ψ_{out} лежит в области определения оператора $\prod a_{out}^\dagger(\eta_i) \prod b_{out}^\dagger(\gamma_j)$. Если $\eta_i = (\tilde{u}_{11}^{-1})^* f_i/\sqrt{1-\lambda_i^2}$, то

$$a_{out}^\dagger(\eta_i) = (a_i^* + \lambda_i b_i)/\sqrt{1-\lambda_i^2}.$$

С другой стороны, если η_i — один из других базисных элементов, то $\eta_i = (\bar{u}_{11}^{-1})^* f$, где $f \in \{f_i\}^\perp$ и $\|f\| = 1$. Все это выполняется потому, что, как следует из (294), $(\bar{u}_{11}^{-1})^*$ — изометрия из $\{f_i\}^\perp$ на $\{(\bar{u}_{11}^{-1})^* [\{f_i\}]\}^\perp$. Таким образом, в этом случае $a_{\text{out}}^\dagger(\eta_i) = a_{\text{in}}(Cf)^*$, где $f \perp \{f_i\}$. Аналогичные утверждения, основанные на свойствах $(\bar{u}_{22}^{-1})^*$, выполняются для $b_{\text{out}}^\dagger(\gamma_i)$. Итак, каждый сомножитель в $\prod a_{\text{out}}^\dagger(\eta_i) \prod b_{\text{out}}^\dagger(\gamma_j)$ есть произведение конечного числа степеней операторов $a_i^\#$, $b_i^\#$, $a_{\text{in}}(Cf)$, $b_{\text{in}}(g)$. Когда такие произведения применяются к χ_N, то предельное состояние ψ_{out} все еще существует, поскольку операторы $a_i^\#$, $b_i^\#$ при $N > i$ не влияют на сделанные утверждения о сходимости χ_N. Кроме того, операторы $a_{\text{in}}(Cf)$, $b_{\text{in}}(g)$ коммутируют с $e^{-\lambda_i a_i^* b_i^*}$ для всех i, поскольку $f \perp \{f_i\}$, $g \perp \{g_i\}$, и при пронесении внутрь также не влияют на сделанные утверждения. Та же самая ортогональность и определения операторов $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$ гарантируют, что операторы $a_{\text{out}}^\dagger(\eta_i)$, $a_{\text{out}}(C\eta_i)$, $b_{\text{out}}^\dagger(\gamma_i)$, $b_{\text{out}}(C\gamma_i)$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям, откуда следует, что S^{-1} сохраняет норму и сохраняет ортогональность при действии на ортонормированном базисе $\left\{\prod a_{\text{in}}^\dagger(\eta_i) \prod b_{\text{in}}^\dagger(\gamma_i)\psi_{\text{in}}\right\}$ в $\mathscr{H}$. Таким образом, S^{-1} однозначно продолжается до изометрии $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$, и легко проверить, что выполняется (291). Читателю предлагается восполнить детали предыдущего построения (задача 141c)

Для того чтобы показать, что оператор S^{-1} унитарен, достаточно показать, что он имеет плотную область значений, а для этого достаточно показать, что каждый вектор вида $\prod a_{\text{in}}^\dagger(\eta_i) \times \prod b_{\text{in}}^\dagger(\gamma_i)\psi_{\text{in}}$ может быть аппроксимирован конечными линейными комбинациями векторов вида $\prod a_{\text{out}}^\dagger(\eta_i) \prod b_{\text{out}}^\dagger(\gamma_i)\psi_{\text{out}}$. Чтобы убедиться в этом, определим вектор $\psi_{\text{in}}' = d' \prod_{i=1}^{\infty} e^{\lambda_i \bar{a}_i^* \bar{b}_i^*}\psi_{\text{out}}$. Те же соображения, что и при построении ψ_{out}, показывают, что правая часть сходится и что $a_{\text{in}}(C\eta_i)\psi_{\text{in}}' = 0 = b_{\text{in}}(C\gamma_j)\psi_{\text{in}}'$ для всех i и j. Таким образом, подбирая константу d', получим $\psi_{\text{in}}' = \psi_{\text{in}}$ и

$$\prod a_{\text{in}}^\dagger(\eta_i) \prod b_{\text{in}}^\dagger(\gamma_i)\psi_{\text{in}} = \prod a_{\text{in}}^\dagger(\eta_i) \prod b_{\text{in}}^\dagger(\gamma_i)\, d' \prod_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n \bar{a}_n^* \bar{b}_n^*}\psi_{\text{out}}.$$

Поскольку $a_{\text{in}}^\dagger(\eta_i)$ и $b_{\text{in}}^\dagger(\gamma_i)$ можно выразить через $\bar{a}_i^\#$, $\bar{b}_i^\#$ или непосредственно через $a_{\text{out}}^\dagger$, $b_{\text{out}}^\dagger$, приблизить бесконечное произведение конечным и заменить оставшиеся экспоненты конечными суммами их тейлоровых разложений, левая часть допускает аппроксимацию конечными линейными комбинациями слагаемых вида $\prod a^\dagger_{\text{out}}(\eta_i) \prod b^\dagger_{\text{out}}(\gamma_j)\psi_{\text{out}}$, что и требуется ∎

Прежде чем доказывать, что $\tilde{u}_{12}(t_0, -t_0)$ — оператор Гильберта — Шмидта, сделаем несколько замечаний о только что законченном доказательстве. Во-первых, все построение можно обратить и показать, что если отображение $a_{\text{in}} \mapsto a_{\text{out}}$, $b_{\text{in}} \mapsto b_{\text{out}}$ унитарно порождаемо, то $\tilde{u}_{11}^{-1}\tilde{u}_{12}$ — оператор Гильберта — Шмидта. Во-вторых, доказательство опиралось лишь на предположение о том, что указанный оператор есть оператор Гильберта — Шмидта, и на равенство (292), а потому то же самое доказательство вместе с приведенным ниже предложением показывает, что для каждого t существует унитарный оператор $U(t, -t_0)$, удовлетворяющий условиям

$$\varphi(x, t) = U(t, -t_0)\varphi_{\text{in}}(x, -t_0)U(t, -t_0)^{-1},$$
$$\pi(x, t) = U(t, -t_0)\pi_{\text{in}}(x, -t_0)U(t, -t_0)^{-1},$$

т. е. динамика, определенная теоремой XI.105, унитарно порождаема. Наконец, если положить $H_{\text{out}} = S^{-1}H_{\text{in}}S$, то H_{out} задается формулой

$$H_{\text{out}} = \int_{\mathbb{R}^3} \mu(p)\, a^\dagger_{\text{out}}(p, 0)\, a_{\text{out}}(p, 0)\, dp + \int_{\mathbb{R}^3} \mu(p)\, b^\dagger_{\text{out}}(p, 0)\, b_{\text{out}}(p, 0)\, dp.$$

Кроме того, H_{out} задается формулой (290), а свободная динамика out-поля — оператором $e^{itH_{\text{out}}}$. Все эти факты тривиальны, коль скоро имеется оператор S, ибо они суть не что иное, как перефразировка соответствующих фактов относительно (свободного) in-поля.

Предложение. Допустим, что $V(x, t)$ принадлежит C^∞ и имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^4$. Тогда описанные выше $u_{12}(t, -t_0)$ и $\tilde{u}_{12}(t, -t_0)$ — операторы Гильберта — Шмидта на $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Доказательство. Поскольку $u_{12}(t, s) = e^{-itB}\tilde{u}_{12}(t, s)e^{-isB}$, достаточно доказать предположение для $\tilde{u}_{12}(t, -t_0)$. Так как $t \mapsto \tilde{v}(t)$ — сильно непрерывное отображение $\mathbb{R}$ в множество ограниченных операторов на $L^2(\mathbb{R}^3)$, $\tilde{u}(t, -t_0)$ задается разложением Дайсона (теорема X.69):

$$\tilde{u}(t, -t_0)f = f + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-t_0}^{t}\int_{-t_0}^{t_1}\cdots\int_{-t_0}^{t_{n-1}} \tilde{v}(t_1)\ldots\tilde{v}(t_n)f\, dt_n\ldots dt_1. \tag{296}$$

В качестве первой попытки показать, что $\tilde{u}_{12}$ — оператор Гильберта — Шмидта, можно было бы доказать оценку $M_2 \equiv \sup_t \|\tilde{v}(t)\|_{\mathcal{I}_2} <$

$<\infty$, ибо тогда n-й член в (296) был бы оператором Гильберта—Шмидта с нормой Гильберта—Шмидта, не превосходящей $|t_0+t|^n M_2^n/n!$. К сожалению, величина M_2 бесконечна; действительно,

$$\tilde{v}(t)=\begin{pmatrix} e^{iBt}Re^{-iBt} & e^{+iBt}Re^{iBt} \\ -e^{-iBt}Re^{-iBt} & -e^{-iBt}Re^{iBt}\end{pmatrix},$$

где $R=-{}^1/_2 B^{-1/2}V(x,\ t)\,B^{-1/2}$, так что след

$$\operatorname{Tr}(R^*R)=\frac{1}{4}\int|\hat{V}(k-p,\ t)|^2(k^2+m^2)^{-1/2}(p^2+m^2)^{-1/2}\,d^3k\,d^3p$$

бесконечен, поскольку подынтегральное выражение убывает лишь как $|k+p|^{-2}$, когда $|k+p|\to\infty$ при фиксированной разности $k-p$. Однако

$$M_4\equiv\sup_t\|\tilde{v}(t)\|_{\mathcal{J}_4}<\infty,$$

так как $|V(x,\ t)|^{1/2}B^{-1/2}\in\mathcal{J}_8$ в силу теоремы XI.20 и того, что $f(y)=(y^2+m^2)^{-1/4}\in L^8(\mathbb{R}^3)$. Поскольку $\|AB\|_{\mathcal{J}_2}\leqslant\|A\|_4\|B\|_4$, n-й член в правой части (296) при $n\geqslant 2$—оператор Гильберта—Шмидта с соответствующей нормой, ограниченной величиной $M_4^n|t_0+t|^n/n!$. Таким образом, поскольку член с $n=0$ не имеет элемента (1, 2), достаточно доказать, что

$$G(t)=\int_{-t_0}^{t}\tilde{v}_{12}(s)\,ds$$

—оператор Гильберта—Шмидта (это *неверно*, если индекс 1 2 заменить на 1 1). Далее, $G(t)$ имеет в p-пространстве интегральное ядро

$$g(k,\ p,\ t)=\int_{-t_0}^{t}(k^2+m^2)^{-1/4}(p^2+m^2)^{-1/4}\hat{V}(k-p,\ s)\times$$
$$\times\exp\left[-is\left(\sqrt{k^2+m^2}+\sqrt{p^2+m^2}\right)\right]ds,$$

и с помощью интегрирования по частям легко найти, что

$$|g(k,\ p,\ t)|\leqslant C\left[(k^2+m^2)^{-1/4}(p^2+m^2)^{-1/4}\left\{(k^2+m^2)^{1/2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(p^2+m^2)^{1/2}\right\}^{-1}(1+|k-p|^2)^{-4}\right].\qquad(297)$$

Таким образом, $g\in L^2(\mathbb{R}^6)$ для каждого t, так что $G(t)$—оператор Гильберта—Шмидта. ∎

Это вычисление, если его проводить в четырех пространственных измерениях, обладает одной интригующей особенностью. В этом случае правая часть (297) не лежит в L^2, так что естественно попытаться снова проинтегрировать по частям. Если после первого интегрирования по частям не возникло граничного члена, то так можно улучшить убывание и тем самым оценить член в (296) с $n=1$, но если граничный член не равен нулю, то член с $n=1$ *не будет* оператором Гильберта—Шмидта. Для всех t члены с $n \geqslant 3$ — операторы Гильберта—Шмидта; это видно непосредственно, так как в этом случае $M_8 < \infty$. Член с $n=2$ тоже оператор Гильберта—Шмидта, в чем можно убедиться после однократного интегрирования по частям. Поскольку $\hat{V}(\cdot, -t_0)=0$, граничный член не лежит в L^2, если $\hat{V}(\cdot, t)\neq 0$, а потому получаем, что в случае четырех пространственных измерений $u_{12}(t, -t_0)$ — оператор Гильберта—Шмидта только для тех t, для которых $V(\cdot, t)=0$. Значит, может случиться, что преобразование, отвечающее рассеянию, *унитарно порождаемо*, тогда как динамика для промежуточных моментов времени не обладает этим свойством. Это явление имеет место и в пространстве трех измерений, если рассматриваются подходящие уравнения с высшими спинами или применяются взаимодействия, отличные от взаимодействия в (278).

Сказанное суммирует

Теорема XI.107. Предположим, что $V(x, t)$ принадлежит C^∞ и имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^4$. Пусть φ_{in} — свободное заряженное скалярное поле массы m. Тогда существуют операторнозначные обобщенные функции $\varphi(x, t)$ и $\pi(x, t)$ при каждом t, такие, что $\pi(x, t)^* = d\varphi(x, t)/dt$ и выполняется (289). Существует семейство унитарных операторов $U(t, -t_0)$ на $\mathscr{H}$, такое, что

$$\varphi(x, t) = U(t, -t_0)\,\varphi_{\text{in}}(x, -t_0)\,U(t, -t_0)^{-1},$$
$$\pi(x, t) = U(t, -t_0)\,\pi_{\text{in}}(x, -t_0)\,U(t, -t_0)^{-1}.$$

Наконец, пусть φ_{out} определено, как выше. Тогда существует унитарный оператор рассеяния S на $\mathscr{H}$, такой, что

$$\varphi_{\text{out}}(x, 0) = S^{-1}\varphi_{\text{in}}(x, 0)\,S,$$
$$\pi_{\text{out}}(x, 0) = S^{-1}\pi_{\text{in}}(x, 0)\,S.$$

Наконец, отметим, что путем обобщения изложенных выше идей можно доказать следующий абстрактный результат

Теорема XI.108. Пусть $\mathscr{H}$ — сепарабельное комплексное гильбертово пространство, и пусть $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ — бозонное пространство Фока над $\mathscr{H}$. Для каждого $f \in \mathscr{H}$ пусть $a^-(f)$ — оператор уничтожения на $\mathscr{F}_s(H)$, определенный формулой (X.62). Положим

$$a(f) = a^-(Cf), \qquad a^\dagger(f) = (a^-(f))^*,$$

где C — некоторое заданное сопряжение на $\mathscr{H}$. Пусть $\langle B_+, B_-\rangle$ — пара ограниченных линейных преобразований на $\mathscr{H}$, которые удовлетворяют условиям

$$B_+^*B_+ - B_-^*B_- = I, \qquad B_+^*CB_- = B_-^*CB_+, \tag{298}$$

$$K_+^*K_+ - K_-^*K_- = I, \qquad K_+^*CK_- = K_-^*CK_+, \tag{299}$$

где

$$K_+ = B_+^*, \qquad K_- = -CB_-^*C. \tag{300}$$

Положим

$$\begin{aligned} a_B(f) &\equiv a^\dagger(CB_-Cf) + a(CB_+Cf), \\ a_B^\dagger(f) &\equiv a^\dagger(B_+f) + a(B_-f). \end{aligned} \tag{301}$$

Тогда унитарный оператор W на $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, такой, что

$$a_B(f) = W^{-1}a(f)W, \qquad a_B^\dagger(f) = W^{-1}a^\dagger(f)W,$$

существует тогда и только тогда, когда B_- — оператор Гильберта — Шмидта. W определяется однозначно с точностью до общего фазового множителя.

Отображение $\langle a, a^\dagger\rangle \mapsto \langle a_B, a_B^\dagger\rangle$, заданное в (301), называется **преобразованием Боголюбова.** Условия на B_+, B_- — именно те, которые требуются для выполнения равенств

$$[a_B(f), a_B(g)] = 0 = [a_B^\dagger(f), a_B^\dagger(g)]$$

и

$$[a_B(f), a_B^\dagger(g)] = (Cf, g)_{\mathcal{H}}.$$

Операторы K — это операторы B для обратного преобразования Боголюбова, а формулы (299) гарантируют обратимость. Иными словами, если выполнены (298) и (299), то

$$a^\dagger(f) = a_B^\dagger(K_+f) + a_B(K_-f), \qquad a(f) = a_B^\dagger(CK_-Cf) + a_B(CK_+Cf).$$

XI.16. Квантовополевое рассеяние II: теория Хаага — Рюэля

В этом разделе мы хотим описать идеи, относящиеся к рассеянию в классе теорий поля, удовлетворяющих аксиомам Вайтмана из § IX.8. Важную роль в нашем изложении будет играть свободное поле из § X.7. В предыдущем разделе мы обсудили простой пример, в котором уравнение поля было линейным, внешнее поле классическим (не операторнозначным) и имело компактный носитель в пространстве-времени. И даже в этом случае построение было нетривиальным. Как же можно надеяться на построение теории рассеяния для общей теории квантованных полей, когда не имеет места ни одно из перечисленных упрощений? Ответ прост. Мы проведем аксиоматическое построение. Будем