удовлетворяют условиям

$$B_+^* B_+ - B_-^* B_- = I, \qquad B_+^* C B_- = B_-^* C B_+, \tag{298}$$

$$K_+^* K_+ - K_-^* K_- = I, \qquad K_+^* C K_- = K_-^* C K_+, \tag{299}$$

где

$$K_+ = B_+^*, \qquad K_- = -C B_-^* C. \tag{300}$$

Положим

$$\begin{aligned} a_B(f) &\equiv a^\dagger(CB_-Cf) + a(CB_+Cf), \\ a_B^\dagger(f) &\equiv a^\dagger(B_+f) + a(B_-f). \end{aligned} \tag{301}$$

Тогда унитарный оператор W на $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, такой, что

$$a_B(f) = W^{-1}a(f)W, \qquad a_B^\dagger(f) = W^{-1}a^\dagger(f)W,$$

существует тогда и только тогда, когда B_- — оператор Гильберта — Шмидта. W определяется однозначно с точностью до общего фазового множителя.

Отображение $\langle a, a^\dagger\rangle \longmapsto \langle a_B, a_B^\dagger\rangle$, заданное в (301), называется **преобразованием Боголюбова.** Условия на B_+, B_- — именно те, которые требуются для выполнения равенств

$$[a_B(f), a_B(g)] = 0 = [a_B^\dagger(f), a_B^\dagger(g)]$$

и

$$[a_B(f), a_B^\dagger(g)] = (Cf, g)_{\mathcal{H}}.$$

Операторы K — это операторы B для обратного преобразования Боголюбова, а формулы (299) гарантируют обратимость. Иными словами, если выполнены (298) и (299), то

$$a^\dagger(f) = a_B^\dagger(K_+f) + a_B(K_-f), \qquad a(f) = a_B^\dagger(CK_-Cf) + a_B(CK_+Cf).$$

XI.16. Квантовополевое рассеяние II: теория Хаага — Рюэля

В этом разделе мы хотим описать идеи, относящиеся к рассеянию в классе теорий поля, удовлетворяющих аксиомам Вайтмана из § IX.8. Важную роль в нашем изложении будет играть свободное поле из § X.7. В предыдущем разделе мы обсудили простой пример, в котором уравнение поля было линейным, внешнее поле классическим (не операторнозначным) и имело компактный носитель в пространстве-времени. И даже в этом случае построение было нетривиальным. Как же можно надеяться на построение теории рассеяния для общей теории квантованных полей, когда не имеет места ни одно из перечисленных упрощений? Ответ прост. Мы проведем аксиоматическое построение. Будем предполагать, что выполняются аксиомы Гординга — Вайтмана, в частности что существует унитарная динамика взаимодействия. В предыдущем разделе мы как раз и занимались описанием такой динамики. Замечательно, что в общем случае теорию рассеяния можно построить, пользуясь спектральным условием и микропричинностью.

Первая принципиальная проблема, с которой мы сталкиваемся, — отсутствие естественной «свободной» динамики, к которой взаимодействующая динамика могла бы приближаться при $t \to \pm\infty$. Интересно, что это свойственно не только общему аксиоматическому подходу, но также и тому типу моделей, которые были введены в § X.7 и получены путем возмущения свободного поля массы m_0. Это как-то странно, поскольку, казалось бы, гамильтониан H_0 этого свободного поля должен играть роль гамильтониана свободной динамики. Но, во-первых, эти два гамильтониана действуют в двух разных гильбертовых пространствах. В самом деле, когда пространственное обрезание из § X.7 снято, следует перейти к новому представлению канонических коммутационных соотношений, поскольку справедливо общее утверждение, известное как теорема Хаага. Эта теорема утверждает, что любая вайтманова теория поля, в которой в нулевой момент времени существуют φ и π, унитарно эквивалентные таким же величинам свободной теории, сама есть свободная теория поля. Во-вторых, физически важен тот факт, что масса взаимодействующих частиц не может равняться m_0, иными словами, в теории взаимодействующих квантованных полей, в отличие от классических полевых теорий, частицы никогда не могут избавиться от самодействия. Эти две причины связаны между собой, поскольку даже для свободного поля изменение массы означает изменение представления канонических коммутационных соотношений.

«Свободная динамика» в смысле, который мы позже уточним, будет свободным полем, но с правильной физической массой, отличной от m_0. В этом смысле существует аналогия с рассеянием спиновых волн в том, что динамика сравнения определяется некоторой частью динамики со взаимодействием. Тот факт, что гамильтониан свободного поля и гамильтониан взаимодействующего поля естественным образом заданы на разных гильбертовых пространствах, укладывается в формализм двух гильбертовых пространств. Однако, рассмотрения одних лишь гамильтонианов еще недостаточно. Действительно, массовый гиперболоид $\{p \mid p \cdot p = m^2\}$ порождает абсолютно непрерывный спектр бесконечной кратности на $[m, \infty)$. Таким образом, изучая лишь спектр H, невозможно узнать, присутствует ли только вклад этого гиперболоида или имеются также и «многочастичные состояния». Эта проблема отчасти проясняется, если рассмотреть объединенный спектр энергии-импульса. Но истинная теория рассеяния должна быть связана с пространственно-временным поведением поля $A(x)$ (чтобы избежать путаницы, мы пользуемся обозначением Φ для свободного поля и A для взаимодействующего).

Для начала предположим, что $\Phi_m(x, t)$ — свободное поле массы $m > 0$, описанное в § X.7. Из (X.84) ясно, что для каждого фиксированного t поля $\Phi_m(\cdot, t)$ и $\dot{\Phi}_m(\cdot, t)$ — операторнозначные обощенные функции; тот факт, что не требуется сглаживания по t, — особая черта свободного поля и в общих вайтмановых теориях не имеет места. Пусть $f(x, t)$ — регулярный волновой пакет для уравнения Клейна — Гордона $f_{tt} = \Delta f - m^2 f$ типа введенного и рассмотренного в первом дополнении к § 3. Введем символ $\overleftrightarrow{\partial_0}$:

$$(g\overleftrightarrow{\partial_0}k)(t) \equiv \int \left[g(x, t)\frac{\partial}{\partial t}k(x, t) - k(x, t)\frac{\partial}{\partial t}g(x, t)\right]d^3x,$$

который отображает пары функций от x и t в функцию от t. Тогда $f\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m$ не зависит от времени, поскольку как f, так и Φ_m удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона, которое является уравнением второго порядка по t, а $f\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m$, по существу, его вронскиан. Действительно, если преобразование Фурье функции f по пространственным переменным имеет вид

$$\hat{f}(p, t) = (2\mu(p))^{-1/2}h(p)e^{-i\mu(p)t}, \tag{302a}$$

то

$$f\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m = i\int h(p)a^\dagger(p)d^3p, \tag{302b}$$

а если

$$\hat{f}(p, t) = (2\mu(p))^{-1/2}h(p)e^{+i\mu(p)t}, \tag{302c}$$

то

$$f\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m = -i\int h(-p)a(p)d^3p. \tag{302d}$$

В частности, (302b) показывает, что если N пробегает 0, 1, ..., а f_i — всевозможные функции, удовлетворяющие (302a), то векторы

$$(f_1\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m)(f_2\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m)\ldots(f_N\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m)\Omega_0$$

пробегают тотальное множество в $\mathscr{H}_0$ — гильбертовом пространстве свободного поля.

Предположим, что $\langle\mathscr{H}, U, A, D\rangle$ — эрмитово скалярное поле, удовлетворяющее аксиомам Гординга — Вайтмана (свойства 1—8 из § IX.8) и обладающее двумя дополнительными свойствами.

Свойство 9 **(верхняя и нижняя массовые щели).** Пусть P_μ — генераторы представления подгруппы трансляций $U(a, I)$ группы Пуанкаре. Для некоторого $m>0$ и некоторого $\varepsilon>0$ спектр P_μ содержится в множестве

$$\{0\}\cup H_m\cup\overline{V}_{m+\varepsilon,+}\equiv$$
$$\equiv\{0\}\cup\{p\mid p^2=m^2;\ p_0>0\}\cup\{p\mid p^2\geqslant(m+\varepsilon)^2;\ p_0>0\},$$

где $p^2=p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2$. Более того, множество $\mathbf{S}$ собственных векторов оператора P^2 с собственным значением m^2 непусто, и существует циклический вектор относительно действия подгруппы $U(a, I)$ на $\mathbf{S}$.

$\mathbf{S}$ — семейство векторов, описывающих состояния одной бесспиновой частицы массы m. Благодаря свойству 9 собственное значение m^2 — изолированное собственное значение P^2.

Свойство 10 **(связь вакуума с одночастичными состояниями).** Спектральный вес $d\rho$ в представлении Челлена — Лемана (теорема IX.34) имеет вид

$$d\rho(s)=\delta(s-m)+d\bar{\rho}(s),$$

где носитель $d\bar{\rho}$ находится в $[m+\varepsilon,\ \infty)$.

Свойство 10, по существу, говорит о том, что не все векторы вида $A(f)\psi_0$, где ψ_0 — вакуум, ортогональны $\mathbf{S}$. Действительно, при этом условии $d\rho(s)=\alpha\delta(s-m)+d\bar{\rho}(s)$, где $\alpha\neq0$, так что A можно умножить на константу, с тем чтобы обратить α в 1.

Выберем функцию $h\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ так, чтобы $h(y)=1$ вблизи $y=m^2$ и $\operatorname{supp}h\subset(0,\ m^2+\varepsilon)$. Определим новую операторнозначную обобщенную функцию $B(\mathbf{x}, t)$ как $\hat{B}(p)=h(p^2)\hat{A}(p)$, т. е. положим

$$B(g)=A(Tg),\qquad\text{где}\qquad \widehat{Tg}(p)=h(p^2)\hat{g}(p).\tag{303}$$

Пусть теперь $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. Тогда функция $\hat{f}(\mathbf{p})e^{-ip_0t_0}h(p^2)$ лежит в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, так что g в (303) можно выбрать в виде $f(\mathbf{x})\delta(t-t_0)$, иными словами, $B(\mathbf{x}, t)$ — обобщенная функция от $\mathbf{x}$, гладкая по t, и аналогично $\dot{B}(\mathbf{x}, t)$ — обобщенная функция от $\mathbf{x}$. В действительности для $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ оператор $B(f, t)$ принадлежит C^∞ по t. В частности, для любого $f\in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ с $f(\cdot, t)$ и $\partial_0 f(\cdot, t)$ из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ для каждого t можно построить $(f\overleftrightarrow{\partial_0}B)(t)$. В общем случае, даже когда f удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, $(f\overleftrightarrow{\partial_0}B)(t)$ зависит от времени, поскольку B этому уравнению не удовлетворяет, но тем не менее справедлива

Лемма 1. Пусть f — регулярный волновой пакет для уравнения Клейна — Гордона массы m. Тогда вектор $(f\overleftrightarrow{\partial_0}B)(t)\psi_0$ не зависит от t, где ψ_0 — вакуум теории.

Доказательство. В общем случае $B(x)$ не удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, однако $B(x)\psi_0$ удовлетворяет. ∎

Согласно свойству 10,

$$((f\overleftrightarrow{\partial_0}B)\psi_0,\ (g\overleftrightarrow{\partial_0}B)\psi_0)=((f\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m)\Omega_0,\ (g\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m)\Omega_0). \tag{304}$$

Действительно, левую часть (304) можно выразить через двухточечную функцию A. Поскольку B включает в себя множитель $h(p^2)$, в силу свойства 10 в спектральном весе остается лишь член $\delta(s-m)$, т. е. остается ровно то же самое, что было бы, если бы A равнялось Φ_m. Поскольку $\hat{\Phi}_m(p)=h(p^2)\hat{\Phi}_m(p)$, (304) выполняется.

Теперь приведем основную теорему Хаага — Рюэля.

Теорема XI.109. Пусть A — эрмитова скалярная теория поля, удовлетворяющая аксиомам Гординга — Вайтмана (свойства 1—8), а также свойствам 9 и 10. Определим B, как выше. Тогда:

(a) для любых регулярных волновых пакетов $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$ пределы

$$\lim_{t\to\mp\infty}(f^{(1)}\overleftrightarrow{\partial_0}B)(t)\ldots(f^{(n)}\overleftrightarrow{\partial_0}B)(t)\psi_0\equiv\eta_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$$

существуют в равномерной топологии на $\mathscr{H}$ и не зависят от выбора функции h.

(b) Пусть $\mathscr{H}_{\text{in}}$ и $\mathscr{H}_{\text{out}}$ — замкнутые оболочки векторов η_{in} и η_{out}; $\mathscr{H}_{\text{in}}$ и $\mathscr{H}_{\text{out}}$ инвариантны под действием представления U группы Пуанкаре.

(c) Существуют операторнозначные обобщенные функции φ_{in} на $\mathscr{H}_{\text{in}}$ и φ_{out} на $\mathscr{H}_{\text{out}}$, такие, что $\langle\mathscr{H}_{\text{in}}, U, \varphi_{\text{in}}\rangle$ и $\langle\mathscr{H}_{\text{out}}, U, \varphi_{\text{out}}\rangle$ унитарно эквивалентны свободному полю массы m и

$$\eta_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})=\left(f^{(1)}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}\right)\cdots\left(f^{(n)}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}\right)\psi_0.$$

Прежде чем рассматривать физическую интерпретацию этой теоремы и ее доказательство, отметим математическое следствие, аналогичное спектральным свойствам, вытекающим из существования волновых операторов в обычной квантовой механике. Поскольку сужение U на $\mathscr{H}_{\text{in}}$ унитарно эквивалентно представлению группы Пуанкаре для свободного поля, получаем

Следствие 1. В теории поля, удовлетворяющей свойствам 1—10, спектр энергии-импульса содержит область $\{p \mid p^2 \geqslant (2m)^2;\ p_0 > 0\}$.

В частности, получаем поразительный вывод: невозможно построить вайтманову теорию поля со спектром $\sigma(P) = \{p \mid p^2 = m^2, p_0 > 0\} \cup \{0\}$!

Чтобы облегчить понимание сути теоремы XI.109 с точки зрения теории рассеяния, можно либо попытаться переписать эту теорему в терминах некоего подобия волнового оператора, либо придать обычной нерелятивистской теории форму, аналогичную теореме XI.109. Здесь мы действуем первым способом, а по поводу второго отсылаем читателя к литературе, указанной в Замечаниях, и задачам (задача 142). Пусть функции $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$ удовлетворяют (302а). Определим отображение J плотного подмножества гильбертова пространства $\mathscr{H}_0$ свободного поля массы m в пространство $\mathscr{H}$, полагая

$$J\left[\prod_{i=1}^{n} (f^{(i)} \overleftrightarrow{\partial_0} \Phi_m)\, \Omega_0\right] = \prod_{i=1}^{n} (f^{(i)} \overleftrightarrow{\partial_0} B)\,(t=0)\,\psi_0.$$

Это определение корректно, поскольку заданный вектор $\psi \in \mathscr{H}_0$ можно не более чем одним способом записать в виде

$$\psi = \prod_{i=1}^{n} (f^{(i)} \overleftrightarrow{\partial_0} \Phi_m)\, \Omega_0,$$

если $f^{(i)}$ удовлетворяют (302а). Мы не можем пользоваться более естественной формулой

$$J\left[\prod_{i=1}^{n} (\Phi_m(g^{(i)}))\, \Omega_0\right] = \left[\prod_{i=1}^{n} A\,(g^{(i)})\right] \psi_0$$

именно потому, что хотим, чтобы J было корректно определено. Пусть $\mathscr{D}_0$ — множество векторов вида $\prod_{i=1}^{n} (f^{(i)} \overleftrightarrow{\partial_0} \Phi_m)\, \Omega_0$, которое, в силу (302b), тотально в $\mathscr{H}_0$. Тогда имеет место

Следствие 2. Операторы $\Omega^{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{itH} J e^{-itH_0}$ существуют и определяют частичные изометрии $\mathscr{H}_0 \xrightarrow{\Omega^+} \mathscr{H}_{\mathrm{in}}$ и $\mathscr{H}_0 \xrightarrow{\Omega^-} \mathscr{H}_{\mathrm{out}}$.

Доказательство. Пусть $e^{-ith_0} f$ задано как $(e^{-ith_0} f)(x, s) = f(x, t+s)$. Тогда

$$e^{-itH_0}\left[\prod_{i=1}^{n} f^{(i)} \overleftrightarrow{\partial_0} \Phi_m\right] \Omega_0 = \prod_{i=1}^{n} \left[e^{-ith_0} f^{(i)} \overleftrightarrow{\partial_0} \Phi_m\right] \Omega_0,$$

так что

$$e^{itH} J e^{-itH_0} \left[\prod_{i=1}^{n} f^{(i)} \overleftrightarrow{\partial_0} \Phi_m \right] \Omega_0 = \prod_{i=1}^{n} e^{itH} (f^{(i)}(\cdot, t) \overleftrightarrow{\partial_0} B(\cdot, 0)) e^{-itH} \psi_0 =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (f^{(i)} \overleftrightarrow{\partial_0} B)(t) \psi_0.$$

Следовательно, по теореме XI.109, пределы, определяющие $\Omega^{\pm}$, существуют и

$$\Omega^{\pm} \left[\prod_{i=1}^{n} f^{(i)} \overleftrightarrow{\partial_0} \Phi_m \right] \Omega_0 = \prod_{i=1}^{n} \left(f^{(i)} \overleftrightarrow{\partial_0} \varphi_{\substack{\text{in} \\ \text{out}}} \right) \psi_0. \tag{305}$$

В силу утверждения (с) основной теоремы, $\Omega^{\pm}$ — изометрии. ∎

Равенство (305) утверждает, что

$$\Omega^{\pm} \Phi_m = \varphi_{\substack{\text{in} \\ \text{out}}} \Omega^{\pm}.$$

В частности, S-матрица Яуха $S = \Omega^{+} (\Omega^{-})^{*}$ удовлетворяет равенству $\varphi_{\text{out}} = S^{-1} \varphi_{\text{in}} S$, если выполнено условие *асимптотической полноты:*

$$\mathcal{H}_{\text{in}} = \mathcal{H}_{\text{out}} = \mathcal{H}. \tag{306}$$

Конечно, бывает, что (306) в некоторых моделях нарушается, например, это так для многих обобщенных свободных полей (см. замечания к § IX.8). Обычно надеются, что это происходит из-за искусственности этих моделей и что реальные модели удовлетворяют условию асимптотической полноты, по крайней мере если можно сконструировать асимптотические поля для каждого отдельного массового гиперболоида и построить соответствующие состояния со всевозможными асимптотическими частицами. По этой причине при углублении исследований равенства (306) часто принимают в качестве аксиомы.

Обратимся теперь к доказательству теоремы XI.109. Оно опирается на четыре факта. Первый — это лемма 1. Второй — убывание регулярных волновых пакетов для уравнения Клейна — Гордона в соответствии с резюмирующей теоремой XI.17 и ее следствием. Для описания третьего факта необходимо ввести понятие усеченных функций Вайтмана (УФВ).

Определение. **Разбиение** упорядоченного множества $\langle 1, \ldots, n \rangle$ — это семейство P упорядоченных подмножеств $S_1 = \langle i_1, \ldots, i_{k(1)} \rangle, \ldots$ $\ldots, S_l = \langle i'_1, \ldots, i'_{k(l)} \rangle$, таких, что $i_1 < \ldots < i_{k(1)}, \ldots, i'_1 < \ldots$ $\ldots < i'_{k(l)}$ и $\bigcup S_j = \langle 1, \ldots, n \rangle$, $S_j \cap S_q = \varnothing$ при $j \neq q$. Символом $\mathcal{P}_n$ будем обозначать множество всех разбиений множества $\langle 1, \ldots, n \rangle$.

Определение. **Усеченные функции Вайтмана** (усеченные вакуумные средние) суть обобщенные функции $\mathscr{W}_{n,\,T}$, определенные в терминах обобщенных функций Вайтмана $\mathscr{W}_n$ соотношением

$$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{P \in \mathscr{P}_n} \mathscr{W}_{k(1),\,T}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k(1)}}\right) \ldots$$
$$\ldots \mathscr{W}_{k(l),\,T}\left(x_{i'_1}, \ldots, x_{i'_{k(l)}}\right). \qquad (307)$$

Очевидно, что функции $\mathscr{W}_{n,\,T}$ рекуррентно определяются формулой (307), поскольку если $\mathscr{W}_{1,\,T}, \ldots, \mathscr{W}_{n-1,\,T}$ уже найдены, то в точности один член в правой части (307), а именно тот, для которого $P = \{\langle 1, \ldots, n\rangle\}$, не известен и определяется формулой (307). Первые несколько функций $\mathscr{W}_{n,\,T}$ выглядят так:

$$\mathscr{W}_{1,\,T}(x_1) = (\psi_0, \varphi(x_1)\psi_0),$$
$$\mathscr{W}_{2,\,T}(x_1, x_2) = (\psi_0, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\psi_0) - (\psi_0, \varphi(x_1)\psi_0)(\psi_0, \varphi(x_2)\psi_0),$$
$$\mathscr{W}_{3,\,T}(x_1, x_2, x_3) = \mathscr{W}_3(x_1, x_2, x_3) - \mathscr{W}_1(x_1)\mathscr{W}_2(x_2, x_3) -$$
$$-\mathscr{W}_1(x_2)\mathscr{W}_2(x_1, x_3) - \mathscr{W}_1(x_3)\mathscr{W}_2(x_1, x_2) +$$
$$+ 2\mathscr{W}_1(x_1)\mathscr{W}_1(x_2)\mathscr{W}_1(x_3).$$

Существует множество явных формул для $\mathscr{W}_{n,\,T}$ (см. Замечания и задачу 143), однако неявные формулы (307) — это все, что нам потребуется. Причина, по которой функции $\mathscr{W}_{n,\,T}$ естественны, состоит в следующем факте, который мы в конечном счете докажем. Поскольку $\mathscr{W}_{n,\,T}$ трансляционно-инвариантна, можно построить, как и в § IX.8, функцию $\mathscr{W}_{n,\,T}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$. При выполнении предположения о спектре (свойство 9) носитель $\hat{W}_n$ лежит в $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{n-1}(-\bar{V}_{m,\,+} \cup \{0\})$, а носитель $\hat{W}_{n,\,T}$ — в $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{n-1}(-\bar{V}_{m,\,+})$. В частности, носители фурье-образов функций $W_{n,\,T}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ и $W_{n,\,T}(-\zeta_{n-1}, \ldots, -\zeta_1)$ не пересекаются, что важно для дальнейшего.

Третий основной факт, необходимый для доказательства теоремы XI.109, — это следующая

Теорема XI.110 (кластерное свойство УФВ). Фиксируем $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$. Для $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^3$ положим

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \int_{\mathbb{R}^{4n}} \mathscr{W}_{n,\,T}(x_1, \ldots, x_n) f(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)\, dx_1 \ldots dx_n \qquad (308)$$

(где a_i стоит вместо $\langle a_i, 0\rangle \in \mathbb{R}^4$). Определим функцию G равенством

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = F(a_1, \ldots, a_n); \qquad \alpha_i = a_{i+1} - a_i.$$

Тогда $G \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{3n-3})$.

Последний результат, нужный для доказательства теоремы XI.109, — это

Теорема XI.111. Пусть K — обобщенная функция из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^\nu)$, так что $K*f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ для любого $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$. Тогда для любого N существуют дифференциальный оператор $P(D)$ с постоянными коэффициентами и непрерывная функция F на $\mathbb{R}$, такие, что

$$K=P(D)F,\qquad |F(x)|\leqslant C(1+x^2)^{-N}.$$

Теперь мы обращаемся к доказательству теоремы XI.109. Теоремы XI.110 и XI.111 будут доказаны позже в этом разделе.

Доказательство теоремы XI.109. Введем символ $B_f(t)$ для обозначения $f(\cdot,t)\overleftrightarrow{\partial_0}B(\cdot,t)$. Пусть $C_1(t),\ \ldots,\ C_n(t)$ суть n операторов, каждый из которых есть либо какой-нибудь $B_f(t)$, либо его производная по времени. Пусть $(\psi_0,\ C_1(t)\ldots C_n(t)\psi_0)_{\text{T}}$ — усеченное вакуумное среднее, определенное подобно УФВ выше. Прежде всего утверждается, что

$$|(\psi_0,\ C_1(t)\ldots C_n(t)\psi_0)_{\text{T}}|\leqslant c(1+|t|)^{-{}^3/_2(n-2)}. \tag{309}$$

Для доказательства этого неравенства разложим сначала функции C_i в суммы по функциям $B(x,t)$, сглаженным с функциями f. Все новые функции f суть регулярные волновые пакеты для уравнения Клейна — Гордона, поскольку они совпадают либо с исходными f, либо с их производными по времени. Итак, левая часть (309) ограничена суммой членов вида

$$\left|\int f^{(1)}(x_1,\ t)\ldots f^{(n)}(x_n,\ t)(\psi_0,\ Q_1(x_1,\ t)\ldots Q_n(x_n,\ t)\psi_0)_{\text{T}}\,d^{3n}x\right|, \tag{310}$$

где каждое Q есть B, ∂_0B или ∂_0^2B. Определим $K(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_{n-1})$, полагая

$$K(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_{n-1})=(\psi_0,\ Q_1(x_1,\ t)\ldots Q_n(x_n,\ t)\psi_0)_{\text{T}},\qquad \zeta_i=x_{i+1}-x_i.$$

$K\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{3n-3})$ и не зависит от t в силу трансляционной ковариантности теории относительно сдвигов по времени. Согласно (303), обобщенная функция K, сглаженная с g из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{3n-3})$, может быть переписана как $W_{n,\text{T}}$, сглаженная с $\tilde g$ из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n-4})$, так что, по теореме XI.110, $K*g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{3n-3})$ для каждой $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{3n-3})$. Таким образом, по теореме XI.111, можно найти дифференциальный оператор $P(D)$ и непрерывную функцию F, такие, что $K=P(D)F$ и

$$|F(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_{n-1})|\leqslant C(1+|\zeta|^2)^{-3n}.$$

Поэтому (310) мажорируется суммой членов вида

$$C\left|\int g_1(x_1,\ t)\ldots g_n(x_n,\ t)(1+|\zeta|^2)^{-3n}d^{3n}x\right|, \tag{311}$$

где каждая функция g_i — производная некоторой $f^{(i)}$, и потому есть регулярный волновой пакет для уравнения Клейна — Гордона. В результате, согласно следствию теоремы XI.17,

$$|g_2(x_2,\ t)| \leqslant c_2(1+|t|)^{-3/2},\ \ldots,\ |g_n(x_n,\ t)| \leqslant c_n(1+|t|)^{-3/2},$$
$$\int |g_1(x_1,\ t)|\, d^3x_1 \leqslant c_1(1+|t|)^{3/2},$$

так что (311) мажорируется выражением

$$c(1+|t|)^{-3/2(n-1)} \int |g_1(x,\ t)|\,(1+|\zeta|^2)^{-3n}\, d^{3n}x \leqslant d(1+|t|)^{-3/2\,(n-2)}.$$

Это доказывает оценку (309).

Пользуясь (309), можно при помощи модифицированного приема Кука доказать, что предел из теоремы XI.109 (а) существует. Пусть

$$\eta(t) = B_{f^{(1)}}(t)\ldots B_{f^{(n)}}(t)\,\psi_0.$$

Мы докажем, что

$$\left\|\frac{d\eta}{dt}\right\| \leqslant c(1+|t|)^{-3/2}, \tag{312}$$

так что существуют $\lim\limits_{t\to\mp\infty} \eta(t)$. Очевидно, $\|d\eta/dt\|^2$ — сумма членов вида $(\psi_0,\ C_1(t)\ldots C_{2n}(t)\,\psi_0)$, а потому — сумма произведений членов вида $(\psi_0,\ C_{i_1}(t)\ldots C_{i_k}(t)\,\psi_0)_T$. Поскольку $(\psi_0,\ B(x,\ t)\,\psi_0)=0$, ни одно из этих произведений не содержит одноточечного усеченного вакуумного среднего. Каждое произведение принадлежит к одному из следующих типов:

1. Один из сомножителей есть m-точечное усеченное вакуумное среднее с $m \geqslant 4$. В силу (309), этот сомножитель ограничен величиной $(1+|t|)^{-3}$.
2. Нет ни одного сомножителя предыдущего типа, но входит по крайней мере одно трехточечное усеченное вакуумное среднее. В этом случае, поскольку $2n$ четно, должны входить по крайней мере два таких множителя, каждый из которых убывает как $(1+|t|)^{-3/2}$, так что общее убывание опять не медленнее, чем $(1+|t|)^{-3}$.
3. Все сомножители — двухточечные функции. В этом случае один из сомножителей должен быть вида

$$\left(\psi_0,\ B_{f^{(1)}}(t)\,\frac{dB_{f^{(2)}}}{dt}(t)\,\psi_0\right), \quad \text{или} \quad \left(\psi_0,\ \frac{dB_{f^{(1)}}(t)}{dt}\,\frac{dB_{f^{(2)}}(t)}{dt}\,\psi_0\right),$$

или

$$\left(\psi_0,\ \frac{dB_{f^{(1)}}}{dt}(t)\,B_{f^{(2)}}(t)\,\psi_0\right) = \left(\frac{dB_{\overline{f^{(1)}}}}{dt}(t)\,\psi_0,\ B_{f^{(2)}}(t)\,\psi_0\right),$$

а каждый из них обращается в нуль в силу леммы 1. Значит, такие произведения обращаются в нуль.

Следовательно, $\|d\eta/dt\|^2 \leqslant C(1+|t|)^{-3}$, что доказывает (312), а потому и часть (а) теоремы.

Инвариантность $\mathcal{H}_{\text{in}}$ и $\mathcal{H}_{\text{out}}$ относительно пространственно-временных сдвигов очевидна. Инвариантность относительно преобразований Лоренца и независимость пределов от выбора функции h доказываются в работах, указанных в Замечаниях.

Равенства (302) наводят на мысль определить $a_{\text{in}}^{\dagger}(p)$ равенством

$$\left(i\int h(p)a_{\text{in}}^{\dagger}(p)d^3p\right)(\eta_{\text{in}}(f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})) = \eta_{\text{in}}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}),$$

где h и $f^{(1)}$ связаны соотношением (302а), и $a_{\text{in}}(p)$ с помощью аналогичного равенства и соотношения (302с). Поле φ_{in} можно определить формулой (X.85). Ковариантность φ_{in} и φ_{out} относительно пространственно-временных сдвигов очевидна. Доказательство лоренцевой ковариантности снова можно найти в литературе. Унитарная эквивалентность φ_{in} свободному полю Φ_m следует из равенства

$$V(\eta_{\text{in}}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})) = \left[\prod_{i=1}^{n}(f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m)\right]\Omega_0.$$

Для проверки того, что оператор V корректно определен и унитарен, следует доказать лишь, что

$$(\eta_{\text{in}}(f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}), \eta_{\text{in}}(g^{(1)}, \ldots, g^{(n)})) =$$
$$= \left(\left(\prod_{i=1}^{m} f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m\right)\Omega_0, \left(\prod_{i=1}^{n} g^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m\right)\Omega_0\right). \tag{313}$$

Тогда легко убедиться, что

$$V\varphi_{\text{in}}V^{-1} = \Phi_m.$$

Левая часть (313) — предел скалярного произведения $(\prod B_{f^{(i)}}\psi_0, \prod B_{g^{(i)}}(t)\psi_0)$ при $t \to -\infty$. Представляя это произведение как сумму усеченных вакуумных средних, видим, что те члены, в которые входят m-точечные средние с $m \geqslant 3$, исчезают в силу (309). При $t \to -\infty$ остаются только те члены, которые являются произведениями двухточечных средних и, по лемме 1, не зависят, как мы уже объясняли, от времени. В силу свойства 10, эти средние тождественны двухточечной функции для поля Φ_m; см. (304). Поскольку n-точечная функция свободного поля есть сумма произведений двухточечных функций (см. X.162), равенство (313) выполняется. ∎

Доказательство теоремы XI.111. По теореме о замкнутом графике отображение $f \mapsto K * f$ непрерывно. Пусть $T = \hat{K}$. Тогда, по предположению и равенству $\widehat{K * f} = (2\pi)^{\nu/2} \hat{K} \hat{f}$ (теорема IX.4), произведение gT принадлежит $\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ для любого $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$. Отсюда следует, что T есть C^∞-функция, каждая из производных которой растет полиномиально, т. е. $T \in \mathcal{O}_M$ (см. задачу 23 к гл. V). Для заданного N подберем k так, чтобы для всех α с $|\alpha| \leqslant 2N$ выполнялось

$$|(D^\alpha T)(x)| \leqslant c(1+x^2)^k.$$

Пусть теперь $G(x) = (1+x^2)^{-k-\nu} T(x)$. Тогда для $|\alpha| \leqslant 2N$

$$|(D^\alpha G)(x)| \leqslant c(1+x^2)^{-\nu}.$$

Итак, поскольку $D^\alpha G$ лежит в L^1, $F = \check{G}$ — обобщенная функция, которая есть ограниченная непрерывная функция, и для нее произведение $x^\alpha F(x)$ ограничено для каждого $|\alpha| \leqslant 2N$. Следовательно,

$$|F(x)| \leqslant c(1+x^2)^{-N}$$

и $K = (1-\Delta)^{k+\nu} F$. ∎

Теперь мы начнем доказательство теоремы XI.110. Сначала требуется установить, что $\hat{W}_{n,\,\mathrm{T}}$ имеет носитель в $(-\overline{V}_{m,+})^{n-1}$.

Лемма 2. Пусть a — пространственно-подобный вектор из $\mathbb{R}^4$. Тогда

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}+\lambda a, \ldots, x_n+\lambda a) = \mathscr{W}_i(x_1, \ldots, x_i)\mathscr{W}_{n-i}(x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

в том смысле, что для любых $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4i})$, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4(n-i)})$

$$\mathscr{W}_n(f \otimes g_{\lambda a}) \to \mathscr{W}_i(f)\mathscr{W}_{n-i}(g) \tag{314}$$

при $\lambda \to \infty$, где

$$(f \otimes g_{\lambda a})(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i) g(x_{i+1}-\lambda a, \ldots, x_n-\lambda a).$$

Более того, фурье-образ $W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ — (знаконеопределенная) мера по переменной p_i (при сглаживании по другим переменным) и

$$\hat{W}_n(p_1, \ldots, p_{n-1}) = (2\pi)^2 \hat{W}_i(p_1, \ldots, p_{i-1}) \times \hat{W}_{n-i}(p_{i+1}, \ldots, p_{n-1})\, \delta(p_i) + R(p), \tag{315}$$

где (после усреднения по другим переменным) R — мера по p_i, задающая нулевой вес при $p_i = 0$.

Доказательство. Фиксируем $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4l})$, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4(n-l)})$. Пусть

$$\psi_1 = \int \overline{f(x_1, \ldots, x_l)}\, \varphi(x_l) \ldots \varphi(x_1)\, \psi_0\, dx_1 \ldots dx_l,$$

$$\psi_2 = \int g(x_1, \ldots, x_{n-l})\, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_{n-l})\, \psi_0\, dx_1 \ldots dx_{n-l}.$$

Тогда, как и при доказательстве теоремы IX.32, если $g_a(x) = g(x_1 - a, \ldots, x_{n-l} - a)$, то

$$\mathscr{W}_n(f \otimes g_a) = \int_{\mathbb{R}^4} e^{ik \cdot a} d(\psi_1, E_{\tilde{k}} \psi_2),$$

где E_Ω — спектральная мера для энергии-импульса, а $\tilde{k} = \langle k_0, -\mathbf{k} \rangle$. В силу единственности вакуума,

$$d(\psi_1, E_{\tilde{k}}\psi_2) = (\psi_1, \psi_0)(\psi_0, \psi_2)\,\delta(\tilde{k}) + R(\tilde{k}).$$

Отсюда (315) следует непосредственно. Доказательство равенства (314), которое не используется ниже, отнесено в задачи (задача 145). ∎

Лемма 3. Для полей, обладающих свойством 9, носитель $\hat{W}_{n,\mathrm{T}}$ содержится в $(-\overline{V}_{m,+})^{(n-1)}$ при $n \geqslant 2$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы IX.32, по свойству 9 носитель $\hat{W}_n$ лежит в $(\{0\} \cup (-\overline{V}_{m,+}))^{n-1}$. Очевидно, что $\hat{W}_{n,\mathrm{T}}$ обладает тем же свойством. Более того, $\hat{W}_{n,\mathrm{T}}$ — мера по каждой переменной, как в лемме 2. Итак, следует доказать лишь, что $\hat{W}_{n,\mathrm{T}}$, будучи сглаженной по всем переменным, за исключением p_i, не содержит вклад $\delta(p_i)$. Доказательство проводится индукцией по n. При $n = 2$ имеем $W_{2,\mathrm{T}}(x) = W_2(x) - W_1^2$, так что

$$\hat{W}_{2,\mathrm{T}}(p) = \hat{W}_2(p) - (2\pi)^2 \delta(p)\, W_1^2$$

и, значит, по (315) $\delta(p)$-вклад в $\hat{W}_{2,\mathrm{T}}$ равен нулю. Пусть теперь, по предположению индукции, носитель $\hat{W}_{j,\mathrm{T}}$ лежит в $(-\overline{V}_{m,+})^{(j-1)}$ при $j = 2, \ldots, n-1$. Фиксируем i и рассмотрим

$$\hat{\mathscr{W}}_{n,\mathrm{T}} = \hat{\mathscr{W}}_n - \sum_{\substack{P \in \mathscr{P}_n \\ P \neq \{1, \ldots, n\}}} \Big(\prod_{S_j \in P} \mathscr{W}_{S_j,\mathrm{T}}\Big)^{\wedge}.$$

Разобьем сумму по $\mathscr{P}_n$ на две части. В первую отнесем те $P \in \mathscr{P}_n$, для которых никакие $k_1 \leqslant i$ и $k_2 \geqslant i+1$ не принадлежат одному и тому же подмножеству $S_j \in P$. Очевидно, сумма по таким P дает фурье-образ $\mathscr{W}_i(x_1, \ldots, x_i)\, \mathscr{W}_{n-i}(x_{i+1}, \ldots, x_n)$, так что вклад этой суммы в $\hat{W}_{n,\mathrm{T}}(p)$ в точности уничтожает $\delta(p_i)$-часть $\hat{W}_n$. Во второй части суммы p_i есть сумма импульсов, от которых зависит $\hat{W}_{S_j, T}$, и, таким образом, по предположению индукции, эта сумма имеет носитель по p_i в $(-\bar{V}_{m,+})$ (см. задачу 146). Отсюда следует, что $\hat{W}_{n,T}(p)$ не содержит $\delta(p_i)$-вклада, и потому ее носитель лежит в $(-\bar{V}_{m,+})^{(n-1)}$. ∎

Доказательство теоремы XI.110. Поскольку функция F из (308) обладает тем свойством, что ее производные снова имеют тот же самый вид, нужно лишь показать, что для любого N

$$\sup_{\alpha} d(\alpha)^N F(a_1, \ldots, a_n) < \infty, \tag{316}$$

где $d(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)^2\right)^{1/2}$. Очевидно, достаточно показать, что для любого единичного вектора $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}^{3n-3}$ оценка (316) выполнена равномерно по $\alpha/\|\alpha\|$ в некоторой фиксированной окрестности $\hat{\alpha}$. Для заданного $\hat{\alpha}$ сначала утверждаем, что найдется разбиение набора $\langle 1, \ldots, n\rangle$ на два набора $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и $I' = \{i'_1, \ldots, i'_{n-k}\}$, такие, что если $a_{i+1} - a_i = \hat{\alpha}_i$, то $\|a_j - a_{i'}\| \geqslant n^{-3/2}$ для всех $j \in I$ и $i' \in I'$. Это вытекает из следующего построения. Некоторая компонента $\hat{\alpha}$, скажем $\hat{\alpha}_j$, должна иметь длину не меньше $n^{-1/2}$. Рассмотрим n плоскостей в $\mathbb{R}^3$, перпендикулярных вектору $a_{j+1} - a_j$ и проходящих через точки a_i. Очевидно, что для какой-то пары соседних плоскостей расстояние между этими плоскостями не меньше $n^{-1}\|a_{j+1} - a_j\| \geqslant n^{-3/2}$. Возьмем в качестве I точки по одну сторону от этой пары, а в качестве I' — по другую. Выберем окрестность M около $\hat{\alpha}$ так, чтобы если $\alpha/\|\alpha\| \in M$, то для всех $j \in I$ и $i' \in I'$ было

$$\|a_j - a_{i'}\| \geqslant \frac{1}{2n^{3/2}}\|\alpha\|.$$

Пусть $\tilde{M} = \{\alpha \neq 0 \mid \alpha/\|\alpha\| \in M\}$. Докажем, что (316) выполняется для $\alpha \in \tilde{M}$. Поскольку единичная сфера может быть покрыта конечным числом таких окрестностей M, отсюда будет следовать (316). Введем

$$\mathscr{W}'_{n,T}(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_{n,T}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i'_1}, \ldots, x_{i'_{n-k}}\right),$$

$$\mathscr{W}''_{n,T}(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_{n,T}\left(x_{i'_1}, \ldots, x_{i'_{n-k}}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right),$$

где мы упорядочили наборы I и I' так, что $i_1 < \ldots < i_k$, $i'_1 < \ldots < i'_{n-k}$. Мы утверждаем, что для любого N и любого $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$

$$\sup_{\alpha \in \tilde{M}} |d^N(\alpha)(\mathscr{W}'_{n,T}(g_a) - \mathscr{W}_{n,T}(g_a))| < \infty, \tag{317a}$$

$$\sup_{\alpha \in \tilde{M}} |d^N(\alpha)(\mathscr{W}''_{n,T}(g_a) - \mathscr{W}_{n,T}(g_a))| < \infty. \tag{317b}$$

Принимая (317) пока на веру, докажем (316) для $\alpha \in \tilde{M}$. Пусть S' (соответственно S'') — носитель $\mathscr{W}'$ (соответственно $\mathscr{W}''$). Если $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle \in S'$ (соответственно S''), то, в силу леммы 3 и задачи 146, сумма $P = \sum_i p_i$, где суммирование ведется по $i \in I'$ (соответственно по $i \in I''$), лежит в $-\bar{V}_{m,+}$ (соответственно $\bar{V}_{m,+}$). Пусть h — ограниченная C^∞-функция с ограниченными производными, такая, что $h = 1$ на $-\bar{V}_{m,+}$ и $h = 0$ на $\bar{V}_{m,+}$. Пусть $g = (h\hat{f})^{\check{}}$. Тогда $\mathscr{W}''_{n,\,\mathrm{T}}(g_a) = 0$ и $\mathscr{W}_{n,\,\mathrm{T}}(g_a) = \mathscr{W}'_{n,\,\mathrm{T}}(f_a)$. Итак, в силу (317), $\sup_{\alpha \in \tilde{M}} |d^N(\alpha) \mathscr{W}'_{n,\,\mathrm{T}}(f_a)| < \infty$. Снова применяя (317а), получаем, что

$$\sup_{\alpha \in \tilde{M}} |d^N(\alpha) \mathscr{W}_{n,\,\mathrm{T}}(f_a)| < \infty.$$

Это доказывает (316).

Таким образом, для завершения доказательства осталось доказать лишь (317). Пусть $\alpha \in M$ фиксировано, и пусть $x \in \mathbb{R}^{4n}$ таково, что $\|x\| < d(\alpha)/4n^{3/2}$. Тогда для любых $j \in I$, $i' \in I'$

$$\|x_j - x_{i'}\|^2 \leqslant 2(\|x_{i'}\|^2 + \|x_j\|^2) \leqslant 2\|x\|^2 < {}^1/_2 (d(\alpha)/2n^{3/2})^2 \leqslant {}^1/_2 \|a_j - a_{i'}\|^2.$$

Полагая $\zeta = x_{i'} - x_j \in \mathbb{R}^4$ и $\alpha = a_{i'} - a_j \in \mathbb{R}^3$, имеем

$$\zeta_0^2 + \zeta^2 < {}^1/_2 \|\alpha\|^2,$$

так что

$$(|\zeta_0| + |\zeta|)^2 \leqslant 2\zeta_0^2 + 2|\zeta|^2 < \|\alpha\|^2,$$

или

$$|\zeta_0| < \|\alpha\| - \|\zeta\| \leqslant \|\alpha + \zeta\|.$$

Итак, вектор $\zeta + \alpha$ пространственно-подобен, иными словами, если $\|x\| < d(\alpha)/4n^{3/2}$, $\alpha \in \tilde{M}$ и $j \in I$, $i' \in I'$, то векторы $(x+a)_{i'}$ и $(x+a)_j$ пространственно-подобно разделены. Отсюда, в силу локальной коммутативности, следует, что для таких x имеет место равенство

$$\mathscr{W}'_{n,\,\mathrm{T}}(x+a) = \mathscr{W}_{n,\,\mathrm{T}}(x+a).$$

Таким образом, для любого $h_{(a)}$ из C^∞, равного 1 при $\|x\| \geqslant d(\alpha)/4n^{3/2}$, выполняется оценка

$$|\mathscr{W}_{n,\,\mathrm{T}}(g_a) - \mathscr{W}'_{n,\,\mathrm{T}}(g_a)| \leqslant |\mathscr{W}^{(a)}_{n,\,\mathrm{T}}(gh_{(a)})| + |\mathscr{W}'^{(a)}_{n,\,\mathrm{T}}(gh_{(a)})|, \tag{318}$$

где $\mathscr{W}^{(a)}(x) = \mathscr{W}(x+a)$. Функцию $h_{(a)}$ можно выбрать обращающейся в нуль на множестве таких x, для которых $\|x\| \leqslant d(\alpha)/8n^{3/2}$, и такой, что при $d(\alpha) \geqslant 1$ нормы $\|D^\beta h_{(a)}\|$ равномерно ограничены по a. По теореме о регулярности для обобщенных функций умеренного роста существуют дифференциальный оператор $P(D)$ и непрерывная функция F с $|F(x)|\leqslant c(1+x^2)^N$, такие, что $\mathscr{W}_{n,\,\text{т}}=P(D)F$. Итак,

$$|\mathscr{W}_{n,\,\text{т}}^{(a)}(gh_{(a)})|\leqslant c_0\int(1+(x+a)^2)^N|P(D)(gh_{(a)})|\,dx\leqslant$$
$$\leqslant c(1+a^2)^N\int(1+x^2)^N|P(D)(gh_{(a)})(x)|\,dx.$$

В силу убывания g и свойств носителя $h_{(a)}$, последний интеграл стремится к нулю быстрее любой степени $d(\alpha)$. Таким образом, (317a) следует из (318), если заметить, что для любого α можно подобрать соответствующий вектор a, удовлетворяющий неравенству $a^2\leqslant cd(\alpha)^2$, взяв, скажем, $a_1=0$. Доказательство (317b) аналогично.

XI.17. Фазово-пространственный анализ рассеяния и спектральная теория

На первом шаге доказательства нужно ждать. Частице может потребоваться много времени, чтобы уйти далеко от рассеивателя. Следует запастись терпением. Вспомните, как долго пришлось ждать, пока появилось доказательство асимптотической полноты.

В. ЭНСС

В этом разделе мы описываем замечательный подход к исследованию полноты и спектральных задач для операторов Шредингера. Возможности этого метода распространяются на многочастичные системы. Мы разбираем здесь двухчастичную задачу, где с точностью до некоторых различий в предположениях о логарифмическом поведении результаты для локальных потенциалов очень похожи на теорему Агмона—Като—Куроды (теорему XIII.33), доказанную в § XIII.8. Однако методы совершенно различны: последняя теория основана на внушительном, хотя и элегантном механизме, включающем сужения преобразований Фурье на сферы (§ IX.9), теорию локально гладких возмущений (§ XIII.7) и аналитическую теорию Фредгольма (§ VI.5). Для сравнения укажем, что в этом разделе будет применяться немногим более, чем метод Кука, интегрирование по частям (в духе теоремы XI.14), а также одно важное физическое соображение: частица в любом состоянии, не являющемся связанным, должна проводить продолжительные периоды времени вдали от рассеивателя (точный смысл этому утверждению придается теоремой РАГЭ, которую мы доказываем в дополнении к этому разделу) и в эти периоды времени потенциалом можно пренебречь. Если разложить состояние в это время на две части: одну со ско-