умеренного роста существуют дифференциальный оператор $P(D)$ и непрерывная функция F с $|F(x)| \leqslant c(1+x^2)^N$, такие, что $\mathscr{W}_{n,\,\mathrm{T}} = P(D)F$. Итак,

$$|\mathscr{W}^{(a)}_{n,\,\mathrm{T}}(gh_{(a)})| \leqslant c_0 \int (1+(x+a)^2)^N |P(D)(gh_{(a)})|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant c(1+a^2)^N \int (1+x^2)^N |P(D)(gh_{(a)})(x)|\, dx.$$

В силу убывания g и свойств носителя $h_{(a)}$, последний интеграл стремится к нулю быстрее любой степени $d(\alpha)$. Таким образом, (317a) следует из (318), если заметить, что для любого α можно подобрать соответствующий вектор a, удовлетворяющий неравенству $a^2 \leqslant cd(\alpha)^2$, взяв, скажем, $a_1 = 0$. Доказательство (317b) аналогично.

XI.17. Фазово-пространственный анализ рассеяния и спектральная теория

На первом шаге доказательства нужно ждать. Частице может потребоваться много времени, чтобы уйти далеко от рассеивателя. Следует запастись терпением. Вспомните, как долго пришлось ждать, пока появилось доказательство асимптотической полноты.

В. ЭНСС

В этом разделе мы описываем замечательный подход к исследованию полноты и спектральных задач для операторов Шредингера. Возможности этого метода распространяются на многочастичные системы. Мы разбираем здесь двухчастичную задачу, где с точностью до некоторых различий в предположениях о логарифмическом поведении результаты для локальных потенциалов очень похожи на теорему Агмона—Като—Куроды (теорему XIII.33), доказанную в § XIII.8. Однако методы совершенно различны: последняя теория основана на внушительном, хотя и элегантном механизме, включающем сужения преобразований Фурье на сферы (§ IX.9), теорию локально гладких возмущений (§ XIII.7) и аналитическую теорию Фредгольма (§ VI.5). Для сравнения укажем, что в этом разделе будет применяться немногим более, чем метод Кука, интегрирование по частям (в духе теоремы XI.14), а также одно важное физическое соображение: частица в любом состоянии, не являющемся связанным, должна проводить продолжительные периоды времени вдали от рассеивателя (точный смысл этому утверждению придается теоремой РАГЭ, которую мы доказываем в дополнении к этому разделу) и в эти периоды времени потенциалом можно пренебречь. Если разложить состояние в это время на две части: одну со скоростями, направленными от рассеивающего центра, и другую со скоростями, направленными к рассеивающему центру, то одна из этих частей не должна участвовать во взаимодействии в обозримом будущем, а другая — в обозримом прошлом.

На протяжении всего нашего рассмотрения двухчастичной задачи мы полагаем $H_0 = -{}^1/_2\Delta$. Этот выбор массы, $m=1$, удобен, поскольку скорости тогда совпадают с импульсами. Под $F(S)$ мы понимаем оператор, являющийся умножением на характеристическую функцию множества S.

Определение. Симметрический оператор V в $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ называют **потенциалом Энсса** тогда и только тогда, когда

(a) V есть относительно ограниченное возмущение H_0 с относительной гранью $a<1$;

(b) функция h на $[0, \infty)$, заданная посредством

$$h(R) = \|V(H_0+i)^{-1}F(|x| \geqslant R)\|,$$

лежит в $L^1(0, \infty; dR)$. При этом $h(R)$ автоматически монотонно убывает и $\lim\limits_{R\to\infty} h(R) = 0$.

Заметим, что мы не требуем, чтобы V был оператором умножения, но если это так, то, как можно показать (задача 151d), $h(R)$ лежит в L^1 тогда и только тогда, когда этим свойством обладает функция

$$h(R) = \|F(|x| \geqslant R)\, V(H_0+i)^{-1}\|.$$

В частности, если V — оператор умножения, причем произведение $(1+|x|)^{1+\varepsilon}V(H_0+i)^{-1}$ ограничено, и если V имеет относительную H_0-грань, меньшую 1, то V — потенциал Энсса.

Чтобы показать, насколько естественно условие Энсса, начнем с доказательства того, что если V — потенциал Энсса, то существуют волновые операторы. Пусть f — функция из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$, такая, что $\hat{f}$ имеет компактный носитель в области $\{k \mid |k| > a\}$. Согласно следствию теоремы XI.14,

$$|(e^{-itH_0}(H_0+i)f)(x)| \leqslant C(1+|x|+|t|)^{-\nu-1}, \qquad |x| \leqslant {}^1/_2 a|t|,$$

для некоторого C, откуда видно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|F(|x| \leqslant {}^1/_2 a|t|)\, e^{-itH_0}(H_0+i)f\|\, dt < \infty. \tag{319}$$

Напишем теперь:

$$Ve^{-itH_0}f = V(H_0+i)^{-1}F(|x| \leqslant {}^1/_2 a|t|)\, e^{-itH_0}(H_0+i)f + \\ + V(H_0+i)^{-1}F(|x| \geqslant {}^1/_2 a|t|)\, e^{itH_0}(H_0+i)f.$$

Тогда

$$\|Ve^{-itH_0}f\| \leqslant \|V(H_0+i)^{-1}\| \|F(|x| \leqslant {}^1/_2 a|t|)e^{-itH_0}(H_0+i)f\| + \\ + \|V(H_0+i)^{-1}F(|x| \geqslant {}^1/_2 a|t|)\| \|(H_0+i)f\|. \quad (320)$$

По (319) первый член лежит в $L^1(\mathbb{R}, dt)$ По условию Энсса второй член также лежит в $L^1(\mathbb{R}, dt)$; значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|Ve^{-itH_0}f\, dt\| < \infty,$$

и, следовательно, в силу обычных рассуждений о плотном множестве и возможности применить метод Кука, волновые операторы $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют. На самом деле можно сказать намного больше. Для двухчастичного случая основной результат дает

Теорема XI.112 (теорема Энсса). Пусть V — потенциал Энсса, и пусть $H = H_0 + V$ — самосопряженная операторная сумма. Тогда:

(1) операторы $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют и полны;
(2) спектр $\sigma_{\text{sing}}(H)$ пуст;
(3) единственная возможная (конечная) точка накопления множества $\sigma_{\text{pp}}(H)$ — это 0, и любое ненулевое собственное значение имеет конечную кратность.

Отметим, что, в частности, из этой теоремы следует равенство $\sigma_{\text{ess}}(H) = [0, \infty)$. Это заключение не вытекает автоматически из теоремы Вейля (§ XIII.4), поскольку оператор V может не быть относительно компактным.

Для доказательства теоремы Энсса требуется

Теорема XI.113. Пусть $H = H_0 + V$, где $H_0 = -{}^1/_2\Delta$ и V — потенциал Энсса. Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность единичных векторов, такая, что

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \|F(|x| \leqslant n)\varphi_n\| = 0$;

(ii) для некоторых $a > 0$, $b > 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|[E_{(-a,\, a)}(H) + E_{(b,\, \infty)}(H)]\varphi_n\| = 0,$$

где $E_\Omega(H)$ — семейство спектральных проекторов оператора H.

Тогда $\varphi_n = \varphi_{n;\,\text{in}} + \varphi_{n;\,\text{out}} + \varphi_{n;\,\text{w}}$, где

$$\overline{\lim}\|\varphi_{n;\,\text{in}}\| < \infty, \quad \overline{\lim}\|\varphi_{n;\,\text{out}}\| < \infty, \quad (321)$$

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Omega^+ - 1)\varphi_{n;\,\text{in}}\| = 0 = \lim_{n\to\infty} \|(\Omega^- - 1)\varphi_{n;\,\text{out}}\|, \quad (322)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t<0} \|F(|x| \leqslant \delta n)e^{-itH_0}\varphi_{n;\,\text{in}}\| = 0 \quad (323)$$

для некоторого $\delta > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_{n;\,\mathrm{w}}\| = 0. \tag{324}$$

Основная идея будет состоять в разбиении φ_n на части: одну с импульсами наружу и другую — внутрь. Таким способом мы отделяем те части, которые предназначены для мусорной корзины (wastebasket), и сваливаем их в общую кучу, обозначаемую $\varphi_{n;\,\mathrm{w}}$. Конечно, мы могли бы вынуть эти части из корзины и объединить их все с $\varphi_{n;\,\mathrm{in}}$ без нарушения условий (321)—(323), но с идейной точки зрения удобнее не делать этого. Мы отложим доказательство теоремы XI.113, а пока воспользуемся ею для доказательства теоремы XI.112.

Доказательство теоремы XI.112. Мы уже показали, что волновые операторы существуют. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{sing}}(H)$, причем $E_{(-a,\,a)}(H)\varphi = E_{(b,\,\infty)}(H)\varphi = 0$ для некоторых a, b. Поскольку оператор $(H_0+i)(H+i)^{-1}$ ограничен, а $F(|x| \leqslant n)\,(H_0+i)^{-1}$ компактен, компактен и $F(|x|\leqslant n)(H+i)^{-1}$. Итак, по теореме РАГЭ, доказанной в дополнении, мы индуктивно можем построить такую последовательность $\{\tau_n\}$, что $\tau_{n+1} > \tau_n > 0$ и $\|F(|x|\leqslant n)\times\times e^{-i\tau_n H}\varphi\| \leqslant 1/n$. Пусть $\varphi_n = e^{-i\tau_n H}\varphi$. Тогда $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы XI.113, так что

$$\|\varphi_n - \Omega^+\varphi_{n;\,\mathrm{in}} - \Omega^-\varphi_{n;\,\mathrm{out}}\| \to 0. \tag{325}$$

Поскольку $\operatorname{Ran}\Omega^\pm \subset \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H) \subset \mathcal{H}_{\mathrm{sing}}^\perp$, а пространство $\mathcal{H}_{\mathrm{sing}}$ инвариантно под действием e^{-itH}, мы видим, что $\|\varphi_n\| \to 0$, и потому $\varphi = 0$. Отсюда следует, что $\mathcal{H}_{\mathrm{sing}}(H) = \{0\}$.

Далее, пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H)$, и предположим, что $\varphi \in (\operatorname{Ran}\Omega^-)^\perp$ и $E_{(-a,\,a)}(H)\varphi = E_{(b,\,\infty)}(H)\varphi = 0$ для некоторых a, b. Как и выше, выполняется (325). Мы получаем, что $(\varphi_n, \Omega^-\varphi_{n;\,\mathrm{out}}) = 0$, поскольку e^{-itH} оставляет множество $(\operatorname{Ran}\Omega^-)^\perp$ инвариантным. Более того,

$$\begin{aligned}|(\varphi_n, \Omega^+\varphi_{n;\,\mathrm{in}})| &= |(\varphi, e^{i\tau_n H}\Omega^+\varphi_{n;\,\mathrm{in}})| = |((\Omega^+)^*\varphi, e^{i\tau_n H_0}\varphi_{n;\,\mathrm{in}})| \leqslant \\ &\leqslant \|F(|x|\geqslant \delta n)(\Omega^+)^*\varphi\|\,\|\varphi_{n;\,\mathrm{in}}\| + \|\varphi\|\,\|F(|x|\leqslant \delta n)e^{i\tau_n H_0}\varphi_{n;\,\mathrm{in}}\|.\end{aligned}$$

В силу (321), первый член стремится к нулю, а по (323) так же ведет себя и второй. Таким образом, последовательность $\{\varphi_n\}$ асимптотически ортогональна $\Omega^+\varphi_{n;\,\mathrm{in}} + \Omega^-\varphi_{n;\,\mathrm{out}}$, а тем самым сама себе. Отсюда следует, что $\varphi = 0$, поэтому $(\operatorname{Ran}\Omega^-)^\perp \cap \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H) = \{0\}$. Итак, $\operatorname{Ran}\Omega^- = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H)$ и аналогично $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H)$, так что волновые операторы полны.

Наконец, предположим, что $\{\varphi_n\}$ — последовательность ортогональных нормированных собственных векторов оператора H, $H\varphi_n = E_n\varphi_n$ и $E_n \to E \neq 0$. Если выбрать a, b так, чтобы $E \notin [-a, a] \cup [b, \infty)$, то выполняется предположение (b) теоремы XI.113. Более того, в силу компактности оператора $F(|x|\leqslant R)\times$

$\times(H+i)^{-1}$ и ортонормированности $\{\varphi_n\}$, имеем

$$\|F(|x|\leqslant R)\varphi_n\|=|E_n+i|\,\|F(|x|\leqslant R)(H+i)^{-1}\varphi_n\|\to 0.$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что φ_n удовлетворяет предположению (а) теоремы XI.113. Итак, выполняется (325), значит, $\{\varphi_n\}$ асимптотически лежит в $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H)$, что невозможно. Это противоречие влечет за собой справедливость утверждения (3). ∎

Доказательство теоремы XI.113 опирается на три подготовительные леммы. Первая — это утверждение, которое мы должны будем повторить в § XIII.5, что на больших расстояниях H и H_0 выглядят похоже.

Лемма 1. Пусть Φ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$, исчезающая на бесконечности. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\|[\Phi(H)-\Phi(H_0)]F(|x|\geqslant n)\|=0. \tag{326}$$

Доказательство. Поскольку оператор H ограничен снизу, выберем $E_0<\inf\sigma(H)-1$. Тогда для $z\leqslant E_0+1$ и $\Phi(x)=(x-z)^{-1}$ (326) выполняется, так как

$$\|[\Phi(H)-\Phi(H_0)]F(|x|\geqslant n)\|\leqslant\|(H-z)^{-1}\|\,\|V(H_0-z)^{-1}F(|x|\geqslant n)\|$$

и второй множитель стремится к нулю в силу условия Энсса и простого рассуждения (задача 151с). Поскольку разность $(H-z)^{-1}-(H_0-z)^{-1}$ равномерно ограничена и аналитична в области $\operatorname{Re}z\leqslant E_0+1$, из теоремы Витали следует сходимость производных от $[(H-z)^{-1}-(H_0-z)^{-1}]F(|x|\geqslant n)$ к нулю, т. е. (326) выполняется для $\Phi(x)=(x-E_0)^{-m}$ и, таким образом, для Φ, полиномиально зависящих от $(x-E_0)^{-1}$. Но по теореме Стоуна — Вейерштрасса такие полиномы $\|\cdot\|_\infty$-плотны во множестве непрерывных функций на $[E_0+1,\infty)$, исчезающих на бесконечности. Применяя $\varepsilon/3$-прием, получаем (326) для всех указанных в условии функций Φ. ∎

Во-вторых, нам нужна несколько более тонкая версия следствия теоремы XI.14.

Лемма 2. Пусть K — компактное подмножество в $\mathbb{R}^\nu$, и пусть $\mathfrak{G}$ — его открытая окрестность. Пусть $C(x_0,t)=\{x_0+vt\mid v\in\mathfrak{G}\}$ — «классически разрешенная область» для частиц, начинающих движение из точки x_0 со скоростями из $\mathfrak{G}$. Тогда для любого l существуют целое число μ и константа D, такие, что

$$|e^{-itH_0}u(x)|\leqslant D(1+\operatorname{dist}(x,C(x_0,t)))^{-l}\|(1+|x-x_0|^\mu)u\| \tag{327}$$

для всех u с $\operatorname{supp}\hat{u}\subset K$ и всех $x\notin C(x_0,t)$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $x_0=0$, поскольку оператор e^{-itH_0} коммутирует с трансляциями. Имея в виду предельный переход, можно предполагать, что $u\in\mathcal{S}$. По теореме XI.14 и доводам, приведенным при доказательстве ее следствия, для $\operatorname{supp}\hat{u}\subset K$, $u\in\mathcal{S}$ и $x\notin C(0, t)$ имеем

$$|(e^{-itH_0}u)(x)|\leqslant D_0(1+|x|+|t|)^{-l}\sum_{|\alpha|\leqslant l}\|D^\alpha\hat{u}\|_\infty.$$

Отсюда следует (327), если заметить, что, согласно неравенству Соболева и теореме Планшереля,

$$\sum_{|\alpha|\leqslant l}\|D^\alpha\hat{u}\|_\infty\leqslant C_0\sum_{|\alpha|\leqslant l+\nu+1}\|D^\alpha\hat{u}\|_2\leqslant C_1\|(1+|x|^{l+\nu+1})u\|_2$$

и что

$$|\operatorname{dist}(x, C(0, t))|\leqslant C(|x|+|t|+1). \tag{328}$$

Действительно, пусть $v_\infty=\sup\{|v|\,|\,v\in\mathfrak{S}\}$. Тогда либо $|x|\leqslant v_\infty|t|$, и в этом случае $|\operatorname{dist}(x, C(0, t))|\leqslant 2v_\infty|t|$, либо $|x|\geqslant v_\infty|t|$, и в этом случае $|\operatorname{dist}(x, C(0, t))|\leqslant 2|x|$. ∎

Наконец, нам нужна лемма о локализации в фазовом пространстве.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{X}_\alpha$, $\alpha\in Z^\nu$, — характеристическая функция единичного куба с центром в α. Пусть $f\in\mathcal{S}$ — фиксированная положительная функция, и пусть $f_\alpha\equiv f*\mathcal{X}_\alpha$. Предположим, что $\int f d^\nu x=1$. Для каждого $\alpha\in Z^\nu$ пусть g_α — функция из $\mathcal{S}$, такая, что $\sup_\alpha\|(1-\Delta)^\nu g_\alpha\|_2<\infty$. Тогда ($P=-i\nabla$, X есть оператор умножения на x):

(a) оператор T, заданный априори на C_0^∞ как $Tu=\sum\limits_\alpha g_\alpha(P)f_\alpha(X)u$, определяет ограниченное отображение из $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ в $L^2(\mathbb{R}^\nu)$;

(b) для некоторой не зависящей от R константы C выполнено неравенство $\left\|\sum\limits_{|\alpha|\leqslant 3/4R}f_\alpha(X)u\right\|_2\leqslant C[\|F(|x|\leqslant 7/8R)u\|_2+R^{-1}\|u\|_2]$.

Доказательство. (a) $\overline{g_\alpha}(P)g_\beta(P)$ — свертка с некоторой функцией $h_{\alpha\beta}$. Мы утверждаем, что $|h_{\alpha\beta}(x)|\leqslant C_0(1+|x|)^{-2\nu}$ для константы C_0, не зависящей от α и β. Это следует из равномерной оценки норм $\|\overline{g_\alpha}g_\beta\|_1$ и $\|(-\Delta)^\nu\overline{g_\alpha}g_\beta\|_1$, которая по правилу Лейбница вытекает из предположений о $\|g_\alpha\|_2$ и $\|(-\Delta)^\nu g_\alpha\|_2$. Таким образом,

$$\|Tu\|^2=\sum_{\alpha,\beta}\int\overline{u(x)}f_\alpha(x)h_{\alpha\beta}(x-y)f_\beta(y)u(y)\,dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant C_0\sum_{\alpha,\beta}\int|u(x)|f_\alpha(x)(1+|x-y|)^{-2\nu}f_\beta(y)|u(y)|\,dx\,dy=$$

$$=C_0\int|u(x)|(1+|x-y|)^{-\nu}|u(y)|\,dx\,dy\leqslant C_1\|u\|^2,$$

где на втором шаге мы воспользовались равенством $\sum_\alpha f_\alpha = 1$, а на последнем неравенством Юнга.

(b) Применяя неравенство Юнга, имеем

$$\| [f * F(|x| \leqslant {}^3/_4 R)]\, u \| \leqslant \| v \| + \| w \|,$$

где

$$\begin{aligned}\| v \| &= \| [f * F(|x| \leqslant {}^3/_4 R)]\, F(|x| \leqslant {}^7/_8 R)\, u \|_2 \leqslant \\ &\leqslant \| f * F(|x| \leqslant {}^3/_4 R) \|_\infty \| F(|x| \leqslant {}^7/_8 R)\, u \|_2 \leqslant \\ &\leqslant \| f \|_1 \| F(|x| \leqslant {}^7/_8 R)\, u \|_2\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\| w \| &= \| [f * F(|x| \leqslant {}^3/_4 R)]\, F(|x| \geqslant {}^7/_8 R)\, u \|_2 \leqslant \\ &\leqslant \| [f * F(|x| \leqslant {}^3/_4 R)]\, F(|x| \geqslant {}^7/_8 R) \|_\infty \| u \|_2.\end{aligned}$$

При $|y| \geqslant {}^7/_8 R$

$$(f * F(|x| \leqslant {}^3/_4 R))(y) = \int_{|x| \leqslant {}^3/_4 R} f(y-x)\, dy = \int_{|x| \leqslant {}^3/_4 R} h(y-x)\, dy,$$

где $h = f F(|x| \geqslant {}^1/_8 R)$, поскольку неравенства $|y| \geqslant {}^7/_8 R$ и $|x| \leqslant {}^3/_4 R$ влекут за собой, что $|y-x| \geqslant {}^1/_8 R$. Итак, $\| w \| \leqslant \leqslant F(|x| \geqslant {}^1/_8 R) f \|_1 \| u \|_2$. ∎

Доказательство теоремы XI.113. Выберем функцию Φ из $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ так, чтобы $\Phi = 0$ на $(-{}^1/_2 a, {}^1/_2 a)$ и $(2b, \infty)$ и $\Phi = 1$ на $[\inf \sigma(H), -a]$

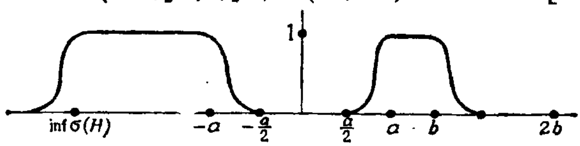

Рис. XI.16.

и $[a, b]$ (рис. XI.16). Пусть $\eta_n = \Phi(H_0)\varphi_n$ и

$$\varphi_{n;\,\mathrm{w}}^{(1)} \equiv \varphi_n - \eta_n = [1 - \Phi(H)]\varphi_n + [\Phi(H) - \Phi(H_0)]\varphi_n.$$

Тогда $\| \varphi_{n;\,\mathrm{w}}^{(1)} \| \to 0$ при $n \to \infty$, поскольку первый член стремится к нулю по предположению (ii) теоремы, а второй — по предположению (i) и лемме 1. Более того, поскольку $\Phi(H_0)$ — свертка с фиксированной функцией из $\mathscr{S}$, как и при доказательстве части (b) леммы 3, имеем

$$\lim_{n \to \infty} \| F(|x| \leqslant {}^7/_8 n)\, \eta_n \| = 0. \qquad (329)$$

Теперь проведем обещанное разбиение на «вылетающие частицы» и «влетающие частицы». Пусть f — фиксированная положительная функция из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$, такая, что носитель $\hat{f}$ лежит в $\{k \mid |k| \leqslant$

$\leqslant {}^1/_2\sqrt{a}\}$ и $\int f(x)\,d^\nu x = 1$. Тогда для свертки $f_\alpha \equiv f * \mathscr{X}_\alpha$ носитель $\hat{f}_\alpha$ также лежит в $\{k \mid |k| \leqslant {}^1/_2\sqrt{a}\}$, а носитель $\widehat{f_\alpha\eta_n}$ — в $\{k \mid {}^1/_2\sqrt{a} < |k| < 2\sqrt{b} + {}^1/_2\sqrt{a}\}$. Фиксируем функции g и h из $\mathscr{S}$, такие, что: (i) $g(k) + h(k) = 1$ для $|k| < 2\sqrt{b} + {}^1/_2\sqrt{a}$; (ii) $g(k) = 0$ (соответственно $h(k) = 0$), если $|k| > {}^1/_6\sqrt{a}$ и k образует угол, меньший 30°, с единичным вектором в направлениии k_1 (соответственно $-k_1$). Пусть g_α и h_α — функции, полученные поворотом g и h таким образом,

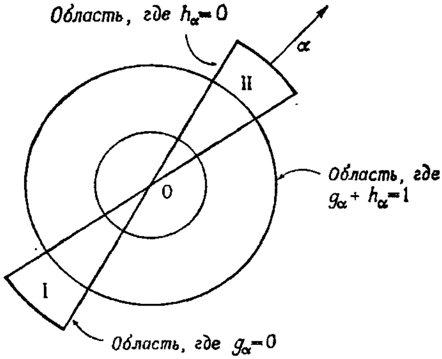

Рис. XI.17.

чтобы запрещенный конус для g_α (соответственно h_α) располагался вокруг направления от α назад к 0 (соответственно в обратном этому направлении); см. рис. XI.17. Мы возьмем

$$\varphi_{n;\,\mathrm{in}} = \sum_{|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n} h_\alpha(P) f_\alpha(X)\eta_n \equiv \sum \eta_{n;\,\alpha,\,\mathrm{in}},$$

$$\varphi_{n;\,\mathrm{out}} = \sum_{|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n} g_\alpha(P) f_\alpha(X)\eta_n \equiv \sum \eta_{n;\,\alpha,\,\mathrm{out}},$$

$$\varphi^{(2)}_{n;\,\mathrm{w}} = \sum_{|\alpha| < {}^3/_4 n} f_\alpha(X)\eta_n; \qquad \varphi_{n;\,\mathrm{w}} = \varphi^{(1)}_{n;\,\mathrm{w}} + \varphi^{(2)}_{n;\,\mathrm{w}}.$$

Поскольку $\operatorname{supp}\widehat{f_\alpha\eta_n}$ содержится во множестве, где $g_\alpha + h_\alpha = 1$, то $\varphi_{n;\,\mathrm{in}} + \varphi_{n;\,\mathrm{out}} + \varphi^{(2)}_{n;\,\mathrm{w}} = \eta_n$. Более того, $\|\varphi^{(2)}_{n;\,\mathrm{w}}\| \to 0$ по части (b) леммы 3 и равенству (329). Итак, выполняется равенство (324), а в силу части (a) леммы 3 выполняются и неравенства (321). Остается доказать (322) и (323).

Далее утверждается, что для некоторого фиксированного $\delta > 0$, всех l, $|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n$, $t \geqslant 0$ и $|x| \leqslant \delta(n + |t|)$

$$|(e^{-itH_0}(H_0 + i)\eta_{n;\,\alpha,\,\mathrm{out}})(x)| \leqslant C_l(1 + |\alpha| + n + |t|)^{-l}. \qquad (330)$$

Применяя лемму 2, это можно получить из следующих двух фактов:

(a) $\sup\limits_{n,\,\alpha} \| |x-\alpha|^{\mu} (H_0+i) g_\alpha(P) f_\alpha(x) \eta_n \| < \infty$. Это следует из того, что равномерно ограничена норма $\| |x-\alpha|^{\mu} f_\alpha \|_\infty$ и равномерно ограничены производные от $(k^2+i) g_\alpha$.

(b) Пусть $C_\alpha(t) = \{\alpha + vt \mid v \in \operatorname{supp} g_\alpha(k) \cap \{{}^1/_2\sqrt{a} \leqslant |k| \leqslant 2\sqrt{b} + {}^1/_2\sqrt{a}\}\}$. Тогда для x, α, t, таких же, как выше,

$$\operatorname{dist}(x, C_\alpha(t)) \geqslant \delta(1 + |\alpha| + n + |t|), \tag{331}$$

коль скоро δ достаточно мало. Иначе говоря, для $t \geqslant 0$, $|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n$, $|x_0| \leqslant \delta n$, $|w| \leqslant \delta$ и

$$v \in V_0 \equiv \operatorname{supp} g_\alpha \cap \{{}^1/_2\sqrt{a} < |k| \leqslant 2\sqrt{b} + {}^1/_2\sqrt{a}\}$$

имеем $\operatorname{dist}(x_0 + wt, \alpha + vt) \geqslant c(1 + |\alpha| + n + t)$. Предположим, можно доказать, что это расстояние всегда отлично от нуля, когда α заменено на $(1-\varepsilon)\alpha$ Тогда, сжимая δ, можно интересующее нас расстояние оценить снизу величиной $2c(1 + |\alpha| + t)$, а пользуясь тем, что $|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n$, найти искомую оценку. То, что это расстояние не обращается в нуль, означает, что частица, начиная движение из точки $\alpha - x_0$ со скоростью $v - w$, не попадает в начало координат, а это очевидно.

Из (300) для показателя степени $l + \nu/2$ немедленно получаем, что при $t > 0$ и $|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n$

$$F(|x| \leqslant \delta n + a\delta |t|)(H_0+i) e^{-itH_0} \eta_{n;\,\alpha.\,\mathrm{out}} \| \leqslant C_l'(1 + |\alpha| + n + |t|)^{-l},$$

а тогда для $t \geqslant 0$

$$\| F(|x| \leqslant \delta n + a\delta |t|)(H_0+i) e^{-itH_0} \varphi_{n;\,\mathrm{out}} \| \leqslant C_l''(1 + n + |t|)^{-2}. \tag{332}$$

Это неравенство, его аналог для $t \leqslant 0$ с заменой out на in, а также (320) влекут за собой (322). Предельное равенство (323) получается путем доказательства аналога (322) без дополнительного множителя (H_0+i). ∎

Дополнение к § XI.17. Теорема РАГЭ

В этом дополнении мы докажем теорему Винера о L^2-средних преобразования Фурье меры, а также еще один результат в том же духе, который мы называем теоремой РАГЭ в соответствии с вкладом, который внесли в него Рюэль, Амрейн, Георгеску и Энсс.

Напомним, что конечная (положительная) бэрова мера μ на локально компактном пространстве X обладает таким свойством: $\mu(\{x\}) = 0$ для всех, за исключением не более чем счетного мно-